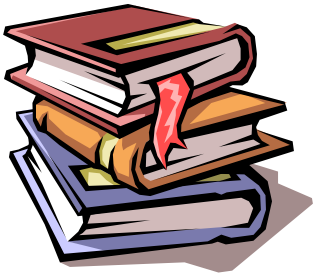
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Tài liệu sưu tầm, ngày 8 tháng 12 năm 2020

Bài 1 : Một số dạng hệ phương trình đặc biệt.

1) Hệ bậc nhất hai ẩn, ba ẩn.

a) $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \\ -x+2y+3z-4=0 \end{cases}$	d) $\begin{cases} -x-y+z+1=0 \\ x-y-2z+2=0 \\ -x+2y+3z-4=0 \end{cases}$

2) Hệ gồm một phương trình bậc nhất và phương trình bậc cao.

- PP chung : Sử dụng phương pháp thế.

- Hệ 2 phương trình.
- Hệ 3 phương trình.

3) Hệ đối xứng loại 1.

- PP chung : Đặt ẩn phụ $a=(x+y); b=xy$

4) Hệ đối xứng loại 2.

- PP chung : Trừ từng vế hai phương trình cho nhau ta được : $(x-y).f(x;y)=0$

5) Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai.

PP chung : Có 2 cách giải

- Đặt ẩn phụ $y=t.x$
- Chia cả hai vế cho y^2, và đặt $t=\frac{x}{y}$

Bài 2 : Một số phương pháp giải hệ phương trình

I. Phương pháp thế.

* *Cơ sở phương pháp.* Ta rút một ẩn (hay một biểu thức) từ một phương trình trong hệ và thế vào phương trình còn lại.

* *Nhận dạng.* Phương pháp này thường hay sử dụng khi trong hệ có một phương trình là bậc nhất đối với một ẩn nào đó.

Bài 1 . Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=5 & (1) \\ 3x^2-y^2+2y=4 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Từ (1) ta có $x=\dfrac{5-3y}{2}$ thế vào (2) ta được $3\left(\dfrac{5-3y}{2}\right)^2-y^2+2y-4=0$

$\Leftrightarrow 3(25-30y+9y^2)-4y^2+8y-16 \Leftrightarrow 23y^2-82y+59=0 \Leftrightarrow y=1,\ y=\dfrac{59}{23}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{(1;1);\left(-\dfrac{31}{23};\dfrac{59}{23}\right)\right\}$

Bài 2 Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2+2y^2-3x+2y-2=0 \end{cases}$

Bài 3 Giải hệ : $\begin{cases} 3x^3+(6-y)x^2-2xy=0 \\ x^2-x+y=-3 \end{cases}$

- PT (2) là bậc nhất với y nên Từ (2) $y=-3-x^2+x$ thay vào PT (1).
- Nghiệm $(0;-3);(-2;9)$

Bài 4 a) Giải hệ : $\begin{cases} 3x^3+(5-y)x^2-2xy-2x=0 \\ x^2-x+y=-4 \end{cases}$

- PT (2) là bậc nhất với y nên Từ (2) $y=-4-x^2+x$ thay vào PT (1).

b) Giải hệ : $\begin{cases} 3x^3+(6+y^2)x^2+2xy^2=0 \\ x^2-x+y^2=-3 \end{cases}$

Bài 6 (*Thử ĐT2012*) Giải hệ : $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$.

- Từ (1) $x^2+1=4y-y^2-xy$ thay vào (2). Nghiệm $(1;2);(-2;5)$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \ (1) \\ x^2+2xy=6x+6 \qquad (2) \end{cases}$

Phân tích. Phương trình (2) là bậc nhất đối với y nên ta dùng phép thế.

Lời giải.

TH 1 : x = 0 không thỏa mãn (2)

TH 2 : $x\neq 0, (2)\Leftrightarrow y=\dfrac{6x+6-x^2}{2x}$ thế vào (1) ta được

$$x^4+2x^3\left(\frac{6x+6-x^2}{2x}\right)+x^2\left(\frac{6x+6-x^2}{2x}\right)^2=2x+9$$

$$\Leftrightarrow x^4+x^2(6x+6-x^2)+\frac{(6x+6-x^2)^2}{4}=2x+9\Leftrightarrow x(x+4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Do $x\neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)$

Chú ý.: Hệ phương trình này có thể thế theo phương pháp sau:

- Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2+xy\right)^2=2x+9 \\ x^2+xy=\dfrac{x^2+6x+6}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x^2+6x+6}{2}\right)^2=2x+9 \\ x^2+xy=\dfrac{x^2+6x+6}{2}\end{cases}$
- Phương pháp thế thường là công đoạn cuối cùng khi ta sử dụng các phương pháp khác

Bài 8 *(D – 2009)* Giải hệ : $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$. Từ (1) thế $x+y=\dfrac{3}{x}-1$ và thay vào PT (2).

Bài 9 Giải hệ : $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 \\ y(y-2x)-2x=10 \end{cases}$

HD : Thế (1) vào PT (2) và rút gọn ta được : $x^2+2xy+4x+2y+3=0\Leftrightarrow(x+1)(x+2y+3)=0$

II. Phương pháp cộng đại số.

*** Cơ sở phương pháp**. Kết hợp 2 phương trình trong hệ bằng các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia ta thu được phương trình hệ quả mà việc giải phương trình này là khả thi hoặc có lợi cho các bước sau.

*** Nhận dạng**. Phương pháp này thường dùng cho các hệ đối xứng loại II, hệ phương trình có vế trái đẳng cấp bậc k.

Bài 1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-5y+4=0 \\ y^2-5x+4=0 \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y=\dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x=\dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

Lời giải.

- ĐK: $xy \neq 0$
- Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y=y^2+2 & (1) \\ 3y^2x=x^2+2 & (2) \end{cases}$. Trừ vế hai phương trình ta được

$$3x^2y-3xy^2=y^2-x^2 \Leftrightarrow 3xy(x-y)+(x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 3xy+x+y=0 \end{array}\right.$$

- TH 1. $x-y=0 \Leftrightarrow y=x$ thế vào (1) ta được $3x^3-x^2-2=0 \Leftrightarrow x=1$
- TH 2. $3xy+x+y=0$. Từ $3y=\dfrac{y^2+2}{x^2} \Rightarrow y>0$, $3x=\dfrac{x^2+2}{y^2} \Rightarrow x>0$

  $\Rightarrow 3xy+x+y>0$. Do đó TH 2 không xảy ra.
- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1 ; 1)

Bài 2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{y}}=2 & (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}=2 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

- ĐK: $x \geq \dfrac{1}{2}, y \geq \dfrac{1}{2}$.
- Trừ vế hai pt ta được $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{y}}-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}+\frac{2-\frac{1}{y}-\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=0 \Leftrightarrow \frac{y-x}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{y-x}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}=0$$

- TH 1. $y-x=0 \Leftrightarrow y=x$ thế vào (1) ta được $\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}=2$
- Đặt $t=\frac{1}{\sqrt{x}}, t>0$ ta được

$$\sqrt{2-t^2}=2-t \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t\geq 0 \\ 2-t^2=4-4t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 2 \\ t^2-2t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=1$$

và $y=1$

- TH 2. $\frac{1}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{1}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}=0$. TH này vô nghiệm do ĐK.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1; 1)

Bài 5 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2xy-y^2=2 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ 5x^2-9xy-3y^2=15 \end{cases}$

Phân tích. Đây là hệ phương trình có vế trái đẳng cấp bậc hai nên ta sẽ cân bằng số hạng tự do và thực hiện phép trừ vế.

Lời giải.

- Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 45x^2+75xy-60y^2=570 \\ 190x^2-342xy-114y^2=570 \end{cases} \Rightarrow -145x^2+417xy+54y^2=0$

- Giải phương trình này ta được $y=\frac{1}{3}x,\ y=-\frac{145}{18}x$ thế vào một trong hai phương trình của hệ ta thu được kết quả $(3;1);\ (-3;-1)$

** Chú ý*

- Cách giải trên có thể áp dụng cho pt có vế trái đẳng cấp bậc cao hơn.
- Cách giải trên chứng tỏ rằng hệ phương trình này hoàn toàn giải được bằng cách đặt $y=tx, x\neq 0$ hoặc đặt $x=ty,\ y\neq 0$.

Bài 4. Tìm các giá trị m để hệ $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11\\x^2+2xy+3y^2=17+m\end{cases}$ có nghiệm.

- **Phân tích**. Để có kết quả nhanh hơn ta sẽ đặt ngay $y=tx, x\neq 0$

Lời giải.

- TH 1. $x=0\Rightarrow\begin{cases}y^2=11\\3y^2=m+17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=11\\y^2=\dfrac{m+17}{3}\end{cases}$

  Vậy hệ có nghiệm $x=0\Leftrightarrow\dfrac{m+17}{3}=11\Leftrightarrow m=16$

- TH 2. $x\neq 0$, Đặt $y=tx$. Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2tx^2+t^2x^2=11\\x^2+2tx^2+3t^2x^2=17+m\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3+2t+t^2)x^2=11\\(1+2t+3t^2)x^2=17+m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{11}{3+2t+t^2}\\(1+2t+3t^2).\dfrac{11}{3+2t+t^2}=17+m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{11}{3+2t+t^2}\\(m-16)t^2+2(m+6)t+3m+40=0\end{cases}\quad(*)$$

- Ta có $\dfrac{11}{3+2t+t^2}>0,\forall t$ nên hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt (*) có nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

  $m=16$ hoặc $m\neq 16,\ \Delta'=(m+6)^2-(m-16)(3m+40)\geq 0$

  $\Leftrightarrow 5-\sqrt{363}\leq m\leq 5+\sqrt{363}$

- Kết luận. $5-\sqrt{363}\leq m\leq 5+\sqrt{363}$

Bài 5. Tìm các giá trị của *m* để hệ $\begin{cases}5x^2+2xy-y^2\geq 3\\2x^2+2xy+y^2\leq\dfrac{m}{m-1}\end{cases}$ (I) có nghiệm.

Lời giải.

- Nhân 2 vế của bpt thứ hai với -3 ta được $\begin{cases}5x^2+2xy-y^2\geq 3\\-6x^2-6xy-3y^2\geq -3-\dfrac{1}{m-1}\end{cases}$

- Cộng vế hai bpt cùng chiều ta được $-x^2-4xy-4y^2\geq-\dfrac{1}{m-1}\Leftrightarrow(x+2y)^2\leq\dfrac{1}{m-1}$

- *Điều kiện cần* để hệ bpt có nghiệm là $\frac{1}{m-1}>0\Leftrightarrow m>1$
- *Điều kiện đủ.* Với $m>1$. Xét hệ pt $\begin{cases}5x^2+2xy-y^2=3\\2x^2+2xy+y^2=1\end{cases}$ (II)
- Giả sử $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ (II). Khi đó

$$\begin{cases}5x_0^2+2x_0y_0-y_0^2=3\\2x_0^2+2x_0y_0+y_0^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x_0^2+2x_0y_0-y_0^2\geq 3\\2x_0^2+2x_0y_0+y_0^2\leq\frac{m}{m-1}\end{cases}$$

- Vậy mọi nghiệm của hệ (II) đều là nghiệm của hệ (I)

$$\text{(II)}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2xy-y^2=3\\-6x^2-6xy-3y^2=-3\end{cases}\Rightarrow -x^2-4xy-4y^2=0\Leftrightarrow x+2y=0\Leftrightarrow x=-2y$$

- Thay $x=-2y$ vào pt thứ 2 của hệ (II) ta được

$$8y^2-4y^2+y^2=1\Leftrightarrow 5y^2=1\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow x=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- Hệ (II) có nghiệm, do đó hệ (I) cũng có nghiệm. Vậy $m>1$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2\\\sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2}\end{cases}$

- *Phân tích.* Các biểu thức trong ngoặc có dạng a + b và a – b nên ta chia hai vế pt thứ nhất cho $\sqrt{3x}$ và chia hai vế pt thứ hai cho $\sqrt{7y}$.

Lời giải.

- ĐK: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\neq 0$.
- Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ pt. Vậy $x>0,\ y>0$
- Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=\frac{2}{\sqrt{3x}}\\\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=\frac{2}{\sqrt{3x}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\\\frac{2}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{3x}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=1\\\frac{1}{\sqrt{3x}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=\frac{1}{x+y}\end{cases}$ (1)
- Nhân theo vế hai pt trong hệ ta được $\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)=\frac{1}{x+y}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3x}-\frac{8}{7y}=\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow 7y^2-38xy-24x^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}y=6x\\y=-\frac{4}{7}x\end{cases}$$

- TH 1. $y=6x$ thế vào pt (1) ta được

$$\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2}{\sqrt{21x}}=1\Leftrightarrow x=\frac{11+4\sqrt{7}}{21}\Rightarrow y=\frac{22+8\sqrt{7}}{7}$$

- TH 2. $y=-\frac{4}{7}x$ không xảy ra do $x>0,\ y>0$.
- Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{11+4\sqrt{7}}{21};\frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$.
- *Chú ý.* Hệ phương trình có dạng $\begin{cases}a+b=m\\a-b=n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+n=2a\\m-n=2b\end{cases}$. Trong trường hợp này, dạng thứ nhất có vế phải chứa căn thức nên ta chuyển về dạng thứ hai sau đó nhân vế để mất căn thức.
- *Tổng quát ta có hệ sau:* $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{bx}}=m+\dfrac{n}{px+qy}\\\dfrac{c}{\sqrt{dy}}=m+\dfrac{n}{px+qy}\end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1)y^2z^2\\y^2(z+x)^2=(4y^2+y+1)z^2x^2\\z^2(x+y)^2=(5z^2+z+1)x^2y^2\end{cases}$

- *Phân tích.* Nếu chia hai vế của mỗi phương trình cho $x^2y^2z^2$ thì ta được hệ mới đơn giản hơn.
- TH 1. $xyz=0$. Nếu $x=0$ thì hệ $\Leftrightarrow y^2z^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\z=t,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}z=0\\y=t,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$
- Tương tự với $y=0$ và $z=0$ ta thu được các nghiệm là $(0;0;t),\ (0;t;0),\ (t;0;0),\ t\in\mathbb{R}$
- TH 2. $xyz\neq 0$. Chia hai vế của mỗi pt trong hệ cho $x^2y^2z^2$ ta được

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)^2=3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} & (1)\\\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2=4+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2} & (2)\\\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2=5+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} & (3)\end{cases}$$

. Cộng vế 3 phương trình của hệ ta được :

$$\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2=12+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \ (4)\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-3 \qquad (5)\end{array}\right.$$

- Từ (4) và (1) ta có $\left(4-\frac{1}{x}\right)^2=3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{9}{x}=13 \Leftrightarrow x=\frac{9}{13}$
- Tứ (4) và (2) ta có $y=\frac{3}{4}$. Từ (4) và (3) ta có $z=\frac{9}{11}$
- Tương tự, từ (5), (1), (2), (3) ta có $x=-\frac{5}{6},\ y=-1,\ z=-\frac{5}{4}$.
- Vậy hệ có tập nghiệm là

$$S=\left\{(t;0;0);\ (0;t;0);\ (0;0;t);\ \left(\frac{9}{13};\frac{3}{4};\frac{9}{11}\right);\left(-\frac{5}{6};-1;-\frac{5}{4}\right),\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

- *Nhận xét*. Qua ví dụ trên ta thấy: từ một hệ phương trình đơn giản, bằng cách đổi biến số (ở trên là phép thay nghịch đảo) ta thu được một hệ phức tạp. Vậy đối với một hệ phức tạp ta sẽ nghĩ đến phép đặt ẩn phụ để hệ trở nên đơn giản.

III. Phương pháp biến đổi thành tích.

*** Cơ sở phương pháp**. Phân tích một trong hai phương trình của hệ thành tích các nhân tử. Đôi khi cần kết hợp hai phương trình thành phương trình hệ quả rồi mới đưa về dạng tích.

Bài 1 *(Khối D – 2012)* Giải hệ $\begin{cases} xy+x-2=0 & (1) \\ 2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0 & (2) \end{cases}$

- Biến đổi phương trình (2) thành tích.
- Hoặc coi phương trình (2) là bậc hai với ẩn x hoặc y.
- Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} xy+x-2=0 \\ (2x-y+1)(x^2-y)=0 \end{cases}$. Hệ có 3 nghiệm $(x;y)=(1;1);\ (\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\pm\sqrt{5})$

Bài 2. *(D – 2008)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y & (2) \end{cases}$

- *Phân tích.* Rõ ràng, việc giải phương trình (2) hay kết hợp (1) với (2) không thu được kết quả khả quan nên chúng ta tập trung để giải (1).

Lời giải.

ĐK: $x\ge 1,\ y\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow y(x+y)+(x+y)=x^2-y^2 \Leftrightarrow (x+y)(y+1-x+y)=0$

TH 1. $x+y=0$ (loại do $x\ge 1,\ y\ge 0$)

TH 2. $2y+1-x=0\Leftrightarrow x=2y+1$ thế vào pt (2) ta được

$(2y+1)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=4y+2-2y \Leftrightarrow (y+1)\sqrt{2y}=2(y+1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+1=0 \\ \sqrt{2y}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=2 \end{array}\right.$. Do $y\ge 0\Rightarrow y=2$. Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(5;2)$

- *Chú ý.* Do có thể phân tích được thành tích của hai nhân tử bậc nhất đối y (hay x) nên có thể giải pt (1) bằng cách coi (1) là pt bậc hai ẩn y (hoặc x).

Bài 3. *(A – 2003)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} & (1) \\ 2y=x^3+1 & (2) \end{cases}$

- *Phân tích.* Từ cấu trúc của pt (1) ta thấy có thể đưa (1) về dạng tích.

Lời giải.

ĐK: $xy\ne 0$. (1) $\Leftrightarrow x-y-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0\Leftrightarrow x-y+\dfrac{x-y}{xy}=0\Leftrightarrow (x-y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=0$

TH 1. $x=y$ thế vào (2) ta được $x^3-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (t/m)

TH 2. $1+\frac{1}{xy}=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{x}$ thế vào (2) ta được

$$x^4+x+2=0\Leftrightarrow (x^2-\frac{1}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}=0.$$

PT này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của hệ là S = $\left\{(1;1);\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

Bài 3. *(Thi thử GL)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\frac{1}{x^3}=y-\frac{1}{y^3} & (1)\\ (x-4y)(2x-y+4)=-36 & (2)\end{cases}$

Lời giải.

$$x-\frac{1}{x^3}=y-\frac{1}{y^3}\Leftrightarrow (x-y)=\frac{(y-x)(y^2+xy+x^2)}{x^3y^3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y\\ \frac{y^2+xy+x^2}{x^3y^3}=-1\end{array}\right.$$

TH 1. $x=y$ thế vào pt thứ hai ta được $x^2+4x-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6\\ x=2\end{array}\right.$

TH 2. $\frac{y^2+xy+x^2}{x^3y^3}=-1\Rightarrow xy<0$.

(2) $\Leftrightarrow 2x^2+4y^2-9xy+4x-16y=-36\Leftrightarrow 2(x+1)^2+4(y-2)^2-9xy=-18$

Trường hợp này không xảy ra do $xy<0\Rightarrow 2(x+1)^2+4(y-2)^2-9xy>0$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là S = $\{(2;2);(-6;-6)\}$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{8xy}{x+y}=16 & (1)\\ \sqrt{x+y}=x^2-y & (2)\end{cases}$

- *Phân tích.* Rõ ràng, việc giải phương trình (2) hay kết hợp (1) với (2) không thu được kết quả khả quan nên chúng ta tập trung để giải (1)

Lời giải.

ĐK: $x+y>0$. (1) $\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x+y)+8xy=16(x+y)$

$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2-2xy\right](x+y)+8xy=16(x+y)$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-16\right]-2xy(x+y-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[(x+y)(x+y+4)-2xy\right]=0$

TH 1. $x+y-4=0$ thế vào (2) ta được $x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow y=7 \\ x=2 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

TH 2. $(x+y)(x+y+4)-2xy=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+4(x+y)=0$ vô nghiệm do ĐK

Vậy tập nghiệm của hệ là S = $\{(-3;7);(2;2)\}$

Bài 5 *(Thử ĐT 2013)* Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)(y+\sqrt{xy}+x-x^2)=4 \end{array}\right.$

- Điều kiện : $\left\{\begin{array}{l} x;y\ge 0 \\ xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)\ge 0 \end{array}\right.$ - PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}-y+(\sqrt{x}-\sqrt{y})=0$ $\Leftrightarrow \dfrac{(x-y)(y+\sqrt{xy}-2)}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$ $\Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$ (3)	0,25
- Từ PT (2) ta có $y+\sqrt{xy}=x^2-x+\dfrac{4}{x+1}=(x-1)^2+\left(x+1+\dfrac{4}{x+1}\right)-2\ge 2$ $\Rightarrow \dfrac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$	0,25
- PT (3) $\Leftrightarrow x=y$, thay vào PT (2) ta được : $x^3-2x^2-3x+4=0$ $\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$	0,25
- Kết hợp với điều kiện ta có $x=1$, $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ - KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x; y) là : (1; 1); $\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$	0,25

Bài 6 *(A – 2011)* Giải hệ PT : $\left\{\begin{array}{ll} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 & (1) \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 & (2) \end{array}\right.$

HD : Biến đổi PT (2) thành tích ta có $\left[\begin{array}{l} xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right.$.

- TH1: $y=\frac{1}{x}$ thay vào PT (1).
- TH 2: PT(1) $\Leftrightarrow 3y(x^2+y^2)+2x^2y-4xy^2-2(x+y)\Leftrightarrow (xy-1)(2x-4y)=0$

Bài 7 *(Thử GL 2012)* Giải hệ : $\begin{cases} x^3-y^3=4(4x-y) \\ 1+y^2=5(1+x^2) \end{cases}$

HD : Từ (2) $4=y^2-5x^2$ thay vào (1) ta có : $x^3-y^3=(y^2-5x^2)(4x-y)$

IV. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ x^2+y^2-xy=7 \end{cases}$

Lời giải.

Đây là hệ đối xứng loại I đơn giản nên ta giải theo cách phổ biến.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=-1 \\ (x+y)^2-3xy=7 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \left(\exists x,\, y \Leftrightarrow S^2 \geq 4P\right)$ ta được $\begin{cases} S+P=-1 \\ S^2-3P=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1,\, P=-2 \\ S=-4,\, P=3 \end{array}\right.$

TH 1. $\begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\, y=2 \\ x=2,\, y=-1 \end{array}\right.$

TH 2. $\begin{cases} S=-4 \\ P=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\, y=-3 \\ x=-3,\, y=-1 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của hệ là

S = $\{(-1;2);\,(2;-1);\,(-1;-3);\,(-3;-1)\}$

Chú ý.

- Nếu hệ pt có nghiệm là $(x;y)$ thì do tính đối xứng, hệ cũng có nghiệm là $(y;x)$. Do vậy, để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x=y$.
- Không phải lúc nào hệ đối xứng loại I cũng giải theo cách trên. Đôi khi việc thay đổi cách nhìn nhận sẽ phát hiện ra cách giải tốt hơn.

Bài tập tương tự : *(ĐT 2010)* Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x-y-xy=3 \end{cases}$

Bài 2 *(D – 2004)*Tìm m để hệ có nghiệm : $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ xy(x+1)(y+1)=72 \end{cases}$

Phân tích. Đây là hệ đối xứng loại I

- Hướng 1. Biểu diễn từng pt theo tổng $x+y$ và tích xy
- Hướng 2. Biểu diễn từng pt theo x^2+x và y^2+y. Rõ ràng hướng này tốt hơn.

Lời giải.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+x)+(y^2+y)=18\\(x^2+x)(y^2+y)=72\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}x^2+x=a,\ a\ge -\dfrac{1}{4}\\ y^2+y=b,\ b\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}$ ta được

$$\begin{cases}a+b=18\\ab=72\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6,\ b=12\\a=12,\ b=6\end{array}\right.$$

TH 1. $\begin{cases}a=6\\b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+x=6\\y^2+y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\ x=-3\\y=3,\ y=-4\end{cases}$

TH 2. Đổi vai trò của a và b ta được $\begin{cases}x=3,\ x=-4\\y=2,\ y=-3\end{cases}$. Vậy tập nghiệm của hệ là

S = $\{(2;3);(2;-4);(-3;3);(-3;-4);(3;2);(-4;2);(3;-3);(-4;-3)\}$

❖ **Nhận xét**. Bài toán trên được hình thành theo cách sau

- Xuất phát từ hệ phương trình đơn giản $\begin{cases}a+b=18\\ab=72\end{cases}$ (I)

1) Thay $a=x^2+x,\ b=y^2+y$ vào hệ (I) ta được hệ

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=18\\xy(x+1)(y+1)=72\end{cases}$ đó chính là ví dụ 2.

2) Thay $a=x^2+xy,\ b=y^2-xy$ vào hệ (I) ta được hệ

(2) $\begin{cases}x^2+y^2=18\\xy(x^2-y^2)=72\end{cases}$

3) Thay $a=x^2+2x,\ b=2x+y$ vào hệ (I) ta được hệ

(3) $\begin{cases}x^2+4x+y=18\\x(x+2)(2x+y)=72\end{cases}$

4) Thay $a=x+\dfrac{1}{x},\ b=y+\dfrac{1}{y}$ vào hệ (I) ta được hệ

(4) $\begin{cases}(x+y)xy+x+y=18xy\\(x^2+1)(y^2+1)=72xy\end{cases}$

5) Thay $a=x^2+2xy,\ b=y^2-xy$ vào hệ (I) ta được hệ

(5) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=18\\xy(x+2y)(y-x)=72\end{cases}$ …

a. Như vậy, với hệ xuất (I), bằng cách thay biến ta thu được rất nhiều hệ pt mới.

b. Thay hệ xuất phát (I) bằng hệ xuất phát (II) $\begin{cases} a+b=7 \\ a^2-b^2=21 \end{cases}$ và làm tương tự như trên ta lại thu được các hệ mới khác. Chẳng hạn :

6) Thay $a=x^2+y^2, b=xy$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(6)\ \begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$$

7) Thay $a=x+\frac{1}{x}, b=y+\frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(7)\ \begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7 \\ x^2-y^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=21 \end{cases}$$

8) Thay $a=x+\frac{1}{y}, b=\frac{x}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(8)\ \begin{cases} xy+x+1=7y \\ (xy+1)^2+x^2=21y^2 \end{cases}$$

9) Thay $a=x+y, b=\frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(9)\ \begin{cases} (x+y)y+1=9y \\ (x+y-2)^2y^2-21y^2=1 \end{cases}$$

10) Thay $a=x^2+2x, b=y^2+2x$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(10)\ \begin{cases} x^2+y^2+4x=7 \\ x^4-y^4+4x(x^2-y^2)=21 \end{cases}$$ ...

Bài 5 *(D – 2007)* Tìm m để hệ có nghiệm : $\begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5 \\ x^3+\frac{1}{x^3}+y^3+\frac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$.

Đặt ẩn phụ $\begin{cases} a=x+\frac{1}{x} \\ b=y+\frac{1}{y} \end{cases}$	Điều kiện $\lvert a\rvert;\lvert b\rvert \ge 2$ Ta có hệ $\begin{cases} a+b=5 \\ a^3-3a+b^3-3b=15m-10 \end{cases}$

Bài 6 Giải hệ phương trình :

a) *(CĐ – 2010)* $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y}=3-2x-y \\ x^2-2xy-y^2=2 \end{cases}$	b) *(B – 2002)* $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases}$
c) $\begin{cases} \sqrt{x-2y}=2-x+2y \\ \sqrt[3]{4-2x}-\sqrt{2y+4}=1 \end{cases}$	d)

Bài 7 ***(****Sát hạch khối 10 năm 2012****)*** Giải hệ :

a) $\begin{cases} 3x^3+(6-y)x^2-2xy-18=0 \\ x^2-x+y=-3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x^3+(6-y)x^2-3xy-18=0 \\ x^2+x+y=-7 \end{cases}$

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)(3x-y)-18=0 \\ x(x+2)-(3x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow$ Đặt $\begin{cases} a=x(x+2) \\ b=3x-y \end{cases}$ Nghiệm $x=1;-3$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3)(2x-y)-18=0 \\ x(x+3)-(2x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow$ Đặt $\begin{cases} a=x(x+3) \\ b=2x-y \end{cases} \Rightarrow$ Nghiệm

Bài 8 *(D – 2009)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$

- ĐK. $x\neq 0$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-3.\dfrac{1}{x}=0 \\ (x+y)^2-5.\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+1=0 \end{cases}$ Đặt $x+y=a, \dfrac{1}{x}=b$ ta được hệ :

$$\begin{cases} a+1-3b=0 \\ a^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b-1 \\ (3b-1)^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, b=1 \\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=2,\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 9 *(A – 2008)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

- Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y)+xy(x^2+y+1)=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x^2+y=a \\ xy=b \end{cases}$ ta được :

$$\begin{cases} a+b(a+1)=-\dfrac{5}{4} \\ a^2+b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-ab=0 \\ b=-\dfrac{5}{4}-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0,\ b=-\dfrac{5}{4} \\ a=-\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

- Vậy tập nghiệm của hệ pt là S = $\left\{\left(1;-\dfrac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right)\right\}$

Bài 10 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 \\ y(y-2x)-2x=10 \end{cases}$

- Hệ $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 \\ y(y-2x)-2x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=9 \\ (y-x)^2-(x+1)^2=9 \end{cases}$.

- Đặt $a=x+1, b=y+1 \Rightarrow b-a=y-x$ ta được hệ $\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ (b-a)^2-a^2=9 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2+b^2=(b-a)^2-a^2 \Leftrightarrow a^2=-2ab \Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=-2b$

- Với $a=0 \Rightarrow b=\pm 3 \Rightarrow x=-1, y=2$ hoặc $x=-1, y=-4$

- Với $a=-2b \Rightarrow 5b^2=9 \Leftrightarrow b=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow a=\mp\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow x=-1-\dfrac{6}{\sqrt{5}}, y=-1+\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ hoặc $x=-1+\dfrac{6}{\sqrt{5}}, y=-1-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Cách 2 : Thế (1) vào PT (2) và rút gọn ta được :

$x^2+2xy+4x+2y+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2y+3)=0$

Bài 11 *(A – 2006)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

- ĐK: $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$

- Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2\sqrt{x+y+xy+1}=14 \end{cases}$

- Đặt $x+y=a, \sqrt{xy}=b$. $a \geq -2, b \geq 0, a^2 \geq 4b^2$ ta được hệ pt

$\begin{cases} a-b=3 \\ a+2\sqrt{a+b^2+1}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+b \\ 2\sqrt{b^2+b+4}=11-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+b \\ 3b^2+26b-105=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Bài 12 *(Thử ĐT2010)* Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \end{cases}$. Bình phương cả 2 PT.

Bài 13 *(Thử GL 2012)* Giải hệ : $\begin{cases} \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}=2\sqrt{7} \\ \frac{6}{x+y}+\frac{1}{xy}=-1 \end{cases}$

- PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-2}+\sqrt{(y+\frac{1}{y})^2-2}=2\sqrt{7}$
- PT (2) $\Leftrightarrow 6+\frac{x+y}{xy}=-(x+y) \Leftrightarrow (x+\frac{1}{x})+(y+\frac{1}{y})=-6$ Ta có

$\begin{cases} a+b=-6 \\ \sqrt{a^2-2}+\sqrt{b^2-2}=2\sqrt{7} \end{cases}$

Bài 14 *(ĐT 2011)* Giải hệ : $\begin{cases} y(x-7)+x+1=0 \\ 21y^2-x^2=(xy+1)^2 \end{cases}$. Lần lượt chia cho $y; y^2$ và đặt ẩn phụ.

Bài 15 *(B – 2009)* Giải hệ : $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$. Lần lượt chia cho $y; y^2$ và đặt ẩn phụ.

Bài 16 *(Thử ĐT2012)* Giải hệ : $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$ Chia 2 vế của 2 PT cho y và đặt ẩn phụ.

Bài 17 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x-y)^2=0 \\ 2x+\frac{1}{2x-y}=3-y \end{cases}$

V. Phương pháp hàm số.

*** Cơ sở phương pháp**. Nếu $f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ và $x,\ y \in (a;b)$ thì :

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Bài 1 Giải các HPT sau :

a) $\begin{cases} x^3 + x = y^3 + y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x^5 + x = y^5 + y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Bài 2 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^5 - 5x = y^5 - 5y & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Phân tích. Ta có thể giải hệ trên bằng phương pháp đưa về dạng tích. Tuy nhiên ta muốn giải hệ này bằng phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số. Hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ không đơn điệu trên toàn trục số, nhưng nhờ có (2) ta giới hạn được x và y trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải.

Từ (2) ta có $x^2 \le 1, y^2 \le 1 \Leftrightarrow x,\ y \in [-1;1]$

Hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \forall t \in (-1;1) \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$. $x,\ y \in [-1;1]$ nên (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào pt (2) ta được

$x = y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là S = $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

Nhận xét. Trong TH này ta đã hạn chế miền biến thiên của các biến để hàm số đơn điệu trên đoạn đó.

Bài 4 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 = -3x + y(y^2 + 3) & (1) \\ y(y^2 + 1) + \sqrt{x} + \sqrt{y^2 + x + 2} - 5 = 0 & (2) \end{cases}$

PT $(1) \Leftrightarrow x^3 + 3x = y^3 + 3y$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t$. HS đồng biến. Từ (1) $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Thay và (2) tiếp tục sử dụng PP hàm số CM PT (2) có 1 nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Bài 5 *(A – 2003)* Giải hệ : $\begin{cases} x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} & (1) \\ 2y=x^3+1 & (2) \end{cases}$

- Xét hàm số $f(t)=t-\frac{1}{t} \quad (t\neq 0) \Rightarrow f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0$ nên hàm số đồng biến.
- Từ $(1) \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$
- Thay vào (2) có nghiệm $x=1;\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

Bài 6 *(Thử GL)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\frac{1}{x^3}=y-\frac{1}{y^3} & (1) \\ (x-4y)(2x-y+4)=-36 & (2) \end{cases}$.

- Xét hàm số $f(t)=t-\frac{1}{t^3} \quad (t\neq 0) \Rightarrow f'(t)=1+\frac{3}{t^4}>0$ nên hàm số đồng biến.
- Từ $(1) \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$
- Thay vào (2) có nghiệm $x=2;-6$. vậy hệ có nghiệm $(2;2);(-6;-6)$.

Bài 7 *(Thi HSG tỉnh Hải Dương 2012)* $\begin{cases} x^3-3x=\sqrt{(y-1)^3}-\sqrt{9(y-1)} & (1) \\ 1+\sqrt{x-1}=\sqrt{y-1} & (2) \end{cases}$

- Từ điều kiện và từ phương trình (2) có $x\geq 1;\sqrt{y-1}\geq 1$
- $(1) \Leftrightarrow x^3-3x=(\sqrt{y-1})^3-3\sqrt{y-1}$, xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $[1;+\infty)$
- Hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$, ta có $f(x)=f(\sqrt{y-1}) \Rightarrow x=\sqrt{y-1}$
- Với $x=\sqrt{y-1}$ thay vào (2) giải được $x=1;\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

Bài 8 *(A – 2012)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$

- Từ phương trình (2) $\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=1$ nên

  $\frac{-3}{2}\leq x-1\leq\frac{1}{2}$; và $\frac{-1}{2}\leq y+1\leq\frac{3}{2}$
- $(1) \Leftrightarrow (x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1)$ nên xét $f(t)=t^3-12t$ trên $[\frac{-3}{2};\frac{3}{2}]$
- Chỉ ra f(t) nghịch biến. Có $f(x-1)=f(y+1) \Rightarrow x-1=y+1$
- Nghiệm $(x;y)=(\frac{1}{2};\frac{-3}{2});(\frac{3}{2};\frac{-1}{2})$

Bài 9. *(A – 2010)* Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$

Lời giải.

- $(1)\Leftrightarrow(4x^2+1)2x+(2y-6)\sqrt{5-2y}=0$

  $\Leftrightarrow\left[(2x)^2+1\right](2x)=\left[\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1\right]\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow(2x)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$

  $\Leftrightarrow(2x)=f(\sqrt{5-2y})$ với $f(t)=t^3+t\,.\,f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow(t)$ ĐB

  trên $\mathbb{R}$. Vậy $f(2x)=f(\sqrt{5-2y})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow y=\dfrac{5-4x^2}{2},x\geq 0$

- Thế vào pt (2) ta được $4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0\Leftrightarrow g(x)=0$

- Với $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7,x\in\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$. CM hàm g(x) nghịch biến.

- Ta có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=2$

Bài 10.*(Thi thử ĐT 2011)* Tìm các giá trị của *m* để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0\end{cases}$$

Lời giải.

- Điều kiện. $-1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2$

(1) $\Leftrightarrow x^3-3x=(y-1)^3-3(y-1)$

- Hàm số $f(t)=t^3-3t$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$

$x,y-1\in[-1;1]$ nên $f(x)=f(y-1)\Leftrightarrow x=y-1\Leftrightarrow y=x+1$

Thế vào pt (2) ta được $x^2-2\sqrt{1-x^2}=-m\ (3)$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Pt (3) có nghiệm $x\in[-1;1]$

Xét $g(x)=x^2-2\sqrt{1-x^2},x\in[-1;1],g'(x)=2x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0.\ g(0)=-2,\ g(\pm1)=1$

Pt (3) có nghiệm $x\in[-1;1]\Leftrightarrow -2\le -m\le 1\Leftrightarrow -1\le m\le 2$

Bài 11 *(Thử ĐT 2012)* Giải hệ : $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$.

TH1 : Xét $y=0$ thay vào hệ thấy không thỏa mãn.

TH2 : Xét $y\neq 0$, chia 2 vế của (1) cho y^5 ta được $(\frac{x}{y})^5+\frac{x}{y}=y^5+y$ (3)

- Xét hàm số $f(t)=t^5+t\Rightarrow f'(t)=5t^4+1>0$ nên hàm số đồng biến.
- Từ (3) $\Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(y)\Rightarrow \frac{x}{y}=y\Rightarrow x=y^2$
- Thay vào (2) ta có PT $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6\Rightarrow x=1$. Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1)$

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x-2^y=(y-x)(xy+2)\\ x^2+y^2=2\end{cases}$

Phân tích. Nếu thay $2=x^2+y^2$ vào phương trình thứ nhất thì ta sẽ được hđt

Lời giải.

Thay $2=x^2+y^2$ vào phương trình thứ nhất ta được

$2^x-2^y=(y-x)(xy+x^2+y^2)\Leftrightarrow 2^x-2^y=y^3-x^3\Leftrightarrow 2^x+x^3=2^y+y^3$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3, t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=2^t\ln 2+3t^2>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thế vào pt thứ hai ta được

$x=y=\pm 1$. Vậy tập nghiệm của hệ là S = $\{(1;1);(-1;-1)\}$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=3^y\\ y+\sqrt{y^2+1}=3^x\end{cases}$

Lời giải.

Trừ vế hai pt ta được

$x+\sqrt{x^2+1}-\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=3^y-3^x\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}+3^x=y+\sqrt{y^2+1}+3^y$

$f(x)=f(y)$ với $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}+3^t$. $f(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+3^t\ln 3>0,\forall\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thế vào pt thứ nhất ta được

$x+\sqrt{x^2+1}=3^x\Leftrightarrow 1=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\Leftrightarrow g(0)=g(x)$

Với $g(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\ g'(x)=3^x\ln 3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+3^x\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$

$=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\ln 3-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ do $\sqrt{x^2+1}-x>0$ và $\sqrt{x^2+1}\geq 1$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $g(x)=g(0)\Leftrightarrow x=0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất x = y = 0

Bài 17. Chứng minh hệ $\begin{cases} e^x=2007-\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y=2007-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$ có đúng 2 nghiệm $x>0,y>0$

Lời giải.

ĐK: $\begin{cases} x^2-1>0 \\ y^2-1>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \\ y\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \end{cases}$. Do $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} x>1 \\ y>1 \end{cases}$

Trừ vế hai pt ta được $e^x-e^y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}\Leftrightarrow e^x-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=e^y-\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}$

Hay $f(x)=f(y)$ với $f(t)=e^t-\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}},t\in(1;+\infty)$.

$f'(t)=e^t+\dfrac{1}{\left(t^2-1\right)\sqrt{t^2-1}}>0,t\in(1;+\infty)\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Bởi vậy $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thế vào pt thứ nhất ta được

$e^x=2007-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow e^x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-2007=0\Leftrightarrow g(x)=0$

Với $g(x)=e^x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-2007,x\in(1;+\infty)$. Ta có

$g'(x)=e^x-\dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}};\ g''(x)=e^x+\dfrac{3x(x^2-1)}{(x^2-1)^3\sqrt{x^2-1}}>0,\forall x\in(1;+\infty)$

Suy ra $g'(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. $g'(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$ và có

$\lim\limits_{x\to 1^+}g'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty$ nên $g'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(1;+\infty)$ và

$g'(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>g'(x_0)\Leftrightarrow x>x_0.\ g'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<x_0$

Từ BBT của $g(x)$ ta suy ra pt $g(x)=0$ có đúng 2 nghiệm $x\in(1;+\infty)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương.

Bài 18 Giải hệ phương trình $\begin{cases}\ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y & (1)\\ x^2-12xy+20y^2=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải.

ĐK: $x>-1,\ y>-1$

(1) $\Leftrightarrow \ln(1+x)-x=\ln(1+y)-y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$ với
$f(t)=\ln(1+t)-t, t\in(-1;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1=\dfrac{-t}{1+t}=0\Leftrightarrow t=0\in(-1;+\infty)\Rightarrow f(t)$ ĐB trên $(-1;0)$ và NB trên $(0;+\infty)$

TH 1. $x,y\in(-1;0)$ hoặc $x,y\in(0;+\infty)$ thì $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Thế vào pt (2) ta được $x=y=0$ (không thỏa mãn)

TH 2. $x\in(-1;0), y\in(0;+\infty)$ hoặc ngược lại thì $xy<0\Rightarrow x^2-12xy+20y^2>0$

TH 3. $xy=0$ thì hệ có nghiệm $x=y=0$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=0$

VI. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức.

1) Cơ sở phương pháp : Sử dụng BĐT để chứng minh $VT \ge VP$ hoặc ngược lại, dấu bằng xảy ra khi $x = y$

2) Một số BĐT quen thuộc.

Bài 1 Giải hệ : $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y & (1) \\ \sqrt{x^2-2y-1} + \sqrt[3]{x^3+x-y-14} = y-2 & (2) \end{cases}$

- HD : Từ (1) VT ≥ VP, dầu bằng khi $x = y$ thay vào PT (2) ta có :

$\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt[3]{x^3-14} = x-2$

Ta có : $\begin{cases} x^2-2x-1 \ge 0 \\ \sqrt[3]{x^2-14} \le x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1 \ge 0 \\ x^2-2x-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Bài 2 *(Thi thử ĐT 2013)* Giải hệ : $\begin{cases} (2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4) = 18 \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

- (2) $\Leftrightarrow x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0$. $\exists x \Leftrightarrow \Delta_x \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le \dfrac{7}{3}$	0,25
- (2) $\Leftrightarrow y^2+(x-6)y+x^2-7x+14=0$. $\exists y \Leftrightarrow \Delta_y \ge 0 \Rightarrow 2 \le x \le \dfrac{10}{3}$	0,25
- Xét hàm số $f(t) = 2t^2-3t+4, t \in R \Rightarrow f'(t) = 4t-3, f'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{3}{4} < 1$ - Vì vậy trên $\left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$ hàm số f(t) đồng biến	0,25
- TH 1. $x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 6$ Kết hợp với $y \ge 1$ $\Rightarrow f(y) \ge f(1) = 3 \Rightarrow f(x).f(y) = (2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4) > 18$. - TH 2. $x = 2$ hệ trở thành $\begin{cases} 2y^2-3y+1=0 \\ y^2-4y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, y=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$ vô nghiệm - Vậy hệ đã cho vô nghiệm.	0,25