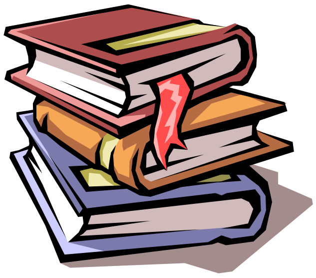
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



ĐỀ CƯƠNG

HỌC KÌ 2 MÔN TOÁN LỚP 9

Tài liệu sưu tầm, ngày 31 tháng 3 năm 2021

TRƯỜNG THCS DỊCH VỌNG
ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN 9

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM HỌC KỲ II

I. ĐẠI SỐ:

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, cách giải.
2. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$: tính chất, đồ thị hàm số.
3. Phương trình bậc hai: định nghĩa, cách giải.
4. Hệ thức Vi-et và ứng dụng.
5. Giải các phương trình quy về phương trình bậc hai.
6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trinh.

II. HÌNH HỌC:

1. Các loại góc liên quan đến đường tròn.
2. Tứ giác nội tiếp.
3. Độ dài đường tròn, cung tròn. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn.
4. Diện tích, thể tích các hình: Hình trụ, hình nón, hình cầu.

B. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP THAM KHẢO

I. ĐẠI SỐ

Dạng 1: Rút gọn biểu thức và bài toán tổng hợp.

Câu 1. Cho biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$(với $x \geq 0; x \neq 1$)

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

3) Tìm giá trị của x để $A = \dfrac{1}{2}$.

4) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

5) Tìm m để phương trình $m \cdot A = \sqrt{x} - 2$ có hai nghiệm phân biệt.

6) Tìm các giá trị của x đề $A < 1$.

7) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Câu 2. Cho biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$)

1) Rút gọn biểu thức B.

2) Tính giá trị của B khi $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

3) Tìm x để $B=\sqrt{x}$

4) Với $x>1$, hãy so sánh B và $\sqrt{B}$

Câu 3. Cho biểu thức $C=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ (với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$)

1) Rút gọn biểu thức C.

2) Tính giá trị của C, biết $x=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$.

3) Tìm giá trị của x để C đạt giá trị lớn nhất.

4) So sánh $\dfrac{1}{C}$ với 1.

Câu 4. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}; B=\dfrac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

1) Tính giá trị biểu thức A với $x=3-2\sqrt{2}$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P=AB$. Tìm các giá trị nguyên của x để $|P|+P=0; |p|=-p$

Câu 5. Cho hai biểu thức $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{6-\sqrt{x}}{4-x}\right).\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ và $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$

3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị của x để $P=0$.

Câu 6. Cho $A=\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}$.

a) Rút gọn A.

b) Với giá trị x; y nguyên dương nào thỏa mãn $x+2y=14$ thì A nhận giá trị nguyên dương.

Dạng 2: Phương trình bậc hai và quan hệ giữa (d), (P)

Câu 1. Cho phương trình ẩn x: $mx^2+2(m+1)x+m+3=0$. Tìm m để phương trình:

1) Có nghiệm duy nhất

2) Có nghiệm

Câu 2. Cho phương trình ẩn x: $x^2-2(m+1)x+m-4=0$

1) Giải phương trình với $m=1$

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm dương.

3) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

4) Chứng minh $\mathrm{M}=\mathrm{x}_1(1-\mathrm{x}_2)+\mathrm{x}_2(1-\mathrm{x}_1)$ không phụ thuộc vào m.

5) Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$ ($x_1;x_2$ là nghiệm của pt (1))

Câu 3. Cho phương trình: $x^2-3x+m-1=0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn:

1) $x_1^2+x_2^2=3$

2) $2x_1-5x_2=-8$

3) $x_1^2-x_2^2=15$

4) $x_1^3+x_2^3=11$

5) $|x_1-x_2|=1$

6) $|x_1|+|x_2|=2$

7) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{5}{2}=0$

8) $|x_1-x_2|>2$

Câu 4. Cho phương trình: $x^2-2mx+m^2-m+1=0$

1) Giải phương trình khi $m=1$

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2-2mx_1=9$.

Câu 5. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+2m+1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm
x_1; x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(\mathrm{d}):\mathrm{y}=\mathrm{x}+2$ và parabol $(\mathrm{P}):\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$

1) Tìm tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P).

2) Tính chu vi và diện tích tam giác AOB.

Câu 7. Cho (P): $y=x^2$ và đường thẳng $(\mathrm{d}):\mathrm{y}=(\mathrm{m}-1)\mathrm{x}+4$

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=-2$

2) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

3) Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (P) $y_1+y_2=y_1.y_2$.

Câu 8. Cho đường thẳng $(d): y=2x+m^2-1$ và $(P): y=x^2$

1) Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A;B$.

2) Gọi $H;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tìm m để độ dài đoạn thẳng HK bằng 3.

Dạng 3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Câu 1. Giải hệ phương trình

1) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(x+y)+\sqrt{x+2}=7 \\ 5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^3=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x+3}-2\sqrt{y+1}=2 \\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{9}{y-1}=-1 \\ \dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{4}{2y-2}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-3)(y+2)=xy-5 \\ (x+2)(y-3)=xy+1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{7}{|x-7|}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{|x-7|}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=2\dfrac{1}{6} \end{cases}$

10) $\begin{cases} |3-x|+\dfrac{2}{\sqrt{y-2}}=5 \\ 4|3-x|+\dfrac{3}{\sqrt{y-2}}=15 \end{cases}$

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax-2y=a \\ -2x+y=a+1 \end{cases}$

1) Giải hệ phương trình với $a=-2$

2) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x-y=1$

3) Tìm $a\in Z$ để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ sao cho x nhận giá trị nguyên

DẠNG 4: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. Hai người làm chung một công việc sau 6 giờ thì xong. Nếu làm một mình, người thứ nhất làm trong 2 giờ, sau đó người thứ hai là trong 3 giờ thì cả hai người làm được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao nhiêu giờ xong công việc?

Câu 2. Hai độ công nhân cùng tu sửa một đoạn đường trong 4 ngày thì xong công việc. Nếu mỗi đội làm một mình thì đội I cần ít hơn thời gian đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội cần bao lâu xong công việc?

Câu 3. Một ô tô đi từ để đến trong một thời gian quy định. Nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến sớm hơn quy định 2 giờ. Nếu giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến chậm hơn quy định 3 giờ. Tính quãng đường .

Câu 4. Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30 km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác HIệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

Câu 5. Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì chỗ ngồi trong phòng họp không đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng được chia thành bao nhiêu dãy.

Câu 6. Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỉ lệ 84%. Riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%. Riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Câu 7. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.

Câu 8. Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm $36cm^2$, và nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi $26cm^2$.

HÌNH HỌC

Câu 1. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm C thuộc (O). Gọi M,N lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ AC,CB. Nối $MN \cap AC = I$. Hạ $ND \perp AC$. Gọi E là trung điểm BC.

1. Tính $\widehat{MIC}$.

2. CMR ; DN là tiếp tuyến với $(O;R)$.

3. Dựng hình bình hành $ADEF$. CMR : F thuộc đường tròn $(O;R)$.

4. Cho $\widehat{CAB} = 30°$, $R = 10$ cm. Tính V hình tạo thành khi ΔABC quay một vòng quanh AB.

Câu 2. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây BC cố định. Điểm A thuộc cung lớn BC. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D. Các tiếp tuyến của $(O;R)$ tại C và D cắt nhau ở E. Tia CD cắt AB ở K, đường thẳng AD cắt CE tại I .

1) Chứng minh $BC//DE$.

2) Chứng minh $AKIC$ là tứ giác nội tiếp.

3) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính độ dài cung nhỏ BC của đường tròn $(O;R)$ theo R.

4) AD cắt BC tại M. Chứng minh $AB.AC = AM^2 + MB.MC$.

Câu 3. Cho $(O;R)$ và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm của CD. Nối BI cắt (O) tại E $(E \neq B)$. Nối OM cắt AB tại H.

1) Chứng minh 5 điểm M, A, O, I, B thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $AE//CD$.

3) Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$.

4) Chứng minh HD là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Câu 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm C thuộc đoạn thẳng đó (C khác A và B). Vẽ cùng nửa mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm M cố định. Kẻ tia $Cz \perp CM$ tại C, tia Cz cắt tia By tại K. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính MC cắt MK tại E.

1) Chứng minh $CEKB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $AM.BK = AC.BC$.

3) Chứng minh ΔAEB là tam giác vuông.

4) Cho A, B, M cố định. Tìm vị trí của điểm C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn nhất.

Câu 5. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại $A(R = 2R')$. Điểm B thuộc đường tròn $(O;R)$ sao cho $AB = R$. Điểm M thuộc cung lớn AB của đường tròn $(O;R)$ sao cho $MA \leq MB$. Nối MA cắt $(O';R')$ tại N. Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt $(O';R')$ tại E, cắt MB tại F.

1) Chứng minh ΔAOM ” $\Delta AO'N$.

2) Chứng minh độ dài đoạn thẳng NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của $(O;R)$.

3) Chứng minh $ABFE$ là hình thang cân.

4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ABFN$ lớn nhất.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao BE,CF cắt nhau tại H, cắt $(O;R)$ tại M và N.

1) Chứng minh $AFHE, BFEC$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AE.AC = AF.AB$

3) Chứng minh $MN // EF$

4) Chứng minh $\dfrac{MN}{AH} < 2$

5) Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Câu 7. Cho $(O;R)$, đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa của cung BC. Điểm M thuộc đoạn BC

Kẻ $ME \perp AB, MF \perp AC, MN \perp FE$ tại N.

a) Chứng minh: 5 điểm A, E, O, M, F cùng thuộc một đường tròn.

b) $BE.BA = BO.BM$

c) Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại A cắt MF tại K. chứng minh: $BE = KF$.

d) Khi M di chuyển trên BC. Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 8. Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Bán kính OC vuông góc với AB. Điểm E thuộc OC. Nối AE cắt nửa đường tròn tại M. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D.

1) Chứng minh ΔDME cân.

2) BM cắt OC tại K. Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC.

3) Tìm vị trí của E để $MA = 2MB$.

4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME. Chứng minh khi E di chuyển trên OC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 1. Chiếc nón làng Chuông (Thanh Oai – Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 cm, đường kính 40 cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón.

Câu 2. Một lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, độ dài trục là 12 cm. Tính diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó.

Câu 3. Một hình trụ có đường kính đáy bằng độ dài trục, một hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của hình trụ nói trên. Hãy so sánh thể tích của hai hình đó,

Câu 4. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Diện tích xung quanh hình trụ bằng $36\pi\left(\mathrm{cm}^2\right)$. Tính bán kính đáy hình trụ.

Câu 5. Khi bơm căng, một quả bóng hình cầu có đường kính 24 cm. Tính diện tích da dùng làm quả bóng nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt.

Câu 6. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đường sinh bằng 10 cm, đường kính đáy bằng 8 cm.

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO

Câu 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-4+2y^2+2xy+3y=0$

Câu 2. Giải phương trình $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=2$

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x-18}=5\sqrt{x}$

Câu 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\frac{x}{2}+\frac{8}{y}\le 2$. Tìm GTNN của biểu thức $K=\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}$

Câu 5. Cho x là số thực thỏa mãn $-1\le x\le\frac{1}{2}$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$M=\frac{x}{2}+\sqrt{1-x-2x^2}$$

Câu 6. Cho $x,y\ge 0;x+y=1$. Tìm GTNN của biểu thức $M=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{1+x}$

Câu 7. Cho $a,b>0;a+b\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

Câu 8. Cho $a,b>0;ab+a\le 2b$. Tìm GTLN của biểu thức $P=\frac{ab}{a^2+2b^2}$

HẾT

ĐÁP ÁN ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KỲ II - TOÁN 9

TRƯỜNG THCS DỊCH VỌNG
Năm học: 2020-2021

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

I. ĐẠI SỐ

Dạng 1: Rút gọn biểu thức và bài toán tổng hợp.

Câu 1. Cho biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$(với $x\ge 0;x\ne 1$)

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của A khi $\mathrm{x}=9$.

3) Tìm giá trị của x để $A=\frac{1}{2}$.

4) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

5) Tìm m để phương trình $\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{x}}-2$ có hai nghiệm phân biệt.

6) Tìm các giá trị của x đề $A<1$.

7) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức A.

$$A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}\quad \text{với } x\ge 0,\ x\ne 1$$

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{3\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$A=\frac{\left(x+2\sqrt{x}+1\right)+\left(x-2\sqrt{x}+1\right)-3\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$A=\frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}-1-3\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$A=\frac{x-x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-1+1+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$A=\frac{-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$A=\frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$A=\frac{-1}{\sqrt{x}+1}$$

2) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$

Ta có $A=\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$

Có $x=9$ (thỏa mãn ĐKXĐ), nên $\sqrt{x}=\sqrt{9}=3$

Thay $x=9$ vào $A=\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}$ được $A=\dfrac{-1}{3+1}=\dfrac{-1}{4}$.

Vậy khi $x=9$ thì $A=\dfrac{-1}{4}$.

3) Tìm giá trị của x để $A=\dfrac{1}{2}$.

Để $A=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=-2\Leftrightarrow\sqrt{x}=-3$ (vô lý vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi với $x\ge 0$, $x\ne 1$)

Vậy không có giá trị nào của x để $A=\dfrac{1}{2}$.

4) Tìm giá trị của x để biểu thức A nguyên.

Ta có $A=\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$

A nguyên $\sqrt{x}+1\in \text{U}(1)=\{-1;1\}$.

$\sqrt{x}-1$	-1	1
$\sqrt{x}$	0	2
x	0	4
	(thoả mãn ĐKXĐ)	(thoả mãn ĐKXĐ)

Vậy với $x=0$ hoặc $x=4$ thì biểu thức A nguyên.

5) Tìm m để phương trình $m.A=\sqrt{x}-2$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $A=\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$

$m.A=\sqrt{x}-2$

$\Leftrightarrow m.\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-2$

$\Leftrightarrow -m=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$

$\Leftrightarrow -m=x-\sqrt{x}-2$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+m-2=0$

Đặt $t=\sqrt{x}$ (ĐK $t\ge 0;t\ne 1$)

Phương trình (*) trở thành $t^2-t+m-2=0$ (**)

$\Delta=\left(-1\right)^2-4.1.\left(m-2\right)=1-4m+8=-4m+7$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (**) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+7>0\\ \dfrac{-(-1)}{1}>0\\ m-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4m>-7\\ 1>0\\ m>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{-7}{-4}\\ m>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{7}{4}\\ m>2\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình $m.A=\sqrt{x}-2$ có hai nghiệm phân biệt.

6) Tìm giá trị của x để $A<1$.

Ta có $A=\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$

Để $A<1$ $\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}<1\Leftrightarrow -1<\sqrt{x}+1\Leftrightarrow \sqrt{x}>-2$ (luôn đúng vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi với $x\ge 0$, $x\ne 1$)

Vậy với mọi không có giá trị nào của x để $A=\dfrac{1}{2}$.

7) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Ta có $A=\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$, $x\ne 1$

Do $\sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \ge 1$ (với $x \ge 0$, $x \ne 1$)

$\Rightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}+1} \ge -1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy để giá trị nhỏ nhất của $A=-1$ khi và chỉ khi $x=0$.

Câu 2. Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ (với $x \ge 0, x \ne 1$)

1) Rút gọn biểu thức B.

2) Tính giá trị của B khi $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

3) Tìm x để $B=\sqrt{x}$

4) Với $x>1$, hãy so sánh B và $\sqrt{B}$

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức B.

$$B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\ (x \ge 0, x \ne 1)$$

$$=\left[\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right]:\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$=\left[\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right]:\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$=\dfrac{\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

2) Tính giá trị của B khi $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Có: $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$

Với $x=2\Rightarrow B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2}$

3) Tìm x để $B=\sqrt{x}$

Do $B=\sqrt{x}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=x-\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+1+\sqrt{2}\right)=0$

Do $\sqrt{x}+1+\sqrt{2}>0$

Nên $\sqrt{x}-1+\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=1-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x=3-2\sqrt{2}$ (thoả mãn)

Vậy $x=3-2\sqrt{2}$ thì $B=\sqrt{x}$

4) Với $x>1$, hãy so sánh B và $\sqrt{B}$

Có $x>1$ nên $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}>0$

Xét $B^2-B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-1\right)$

$=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}>0$ (Do $x>1$)

Hay $B^2-B>0\Leftrightarrow B^2>B\Leftrightarrow B>\sqrt{B}$

Vậy $B>\sqrt{B}$ khi $x>1$

Câu 3. Cho biểu thức $C=\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ (với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$)

1) Rút gọn biểu thức C .

2) Tính giá trị của C , biết $x=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

3) Tìm giá trị của x để C đạt giá trị lớn nhất.

4) So sánh $\frac{1}{C}$ với 1.

Lời giải

1) Rút gọn C.

$$C=\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}\ (x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9)$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9-\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

2) Tính giá trị của C, biết $x=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Có $x=\frac{2}{2-\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}$ thay vào $C=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-3}=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}=7+4\sqrt{3}$

3) Tìm giá trị của x để C đạt giá trị lớn nhất.

$C=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3}=1+\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$

Do $x\ge 0$ nên $\sqrt{x}-3\ge -3$

Để C có GTLN thì $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ có GTLN $\Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}\le 4$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-3=1\Leftrightarrow x=16$

Suy ra C có GTLN thì $1+\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}\le 1+4\Leftrightarrow 1+\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}\le 5$

Dấu "=" xảy ra khi $x=16$

Vậy $x=16$ thì GTLN của $C=5$

4) So sánh $\dfrac{1}{C}$ với 1.

Có $C=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}\Rightarrow \dfrac{1}{C}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow \dfrac{1}{C}-1=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}-1=\dfrac{\sqrt{x}-3-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{-4}{\sqrt{x}+1}<0$ $(x\ge 0)$

Do đó: $\dfrac{1}{C}<1$

Câu 4. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1};B=\dfrac{3x}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

1) Tính giá trị biểu thức A với $x=3-2\sqrt{2}$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P=AB$. Tìm các giá trị nguyên của x để $|P|+P=0;|p|=-p$.

Lời giải

Câu 5. Cho hai biểu thức $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{6-\sqrt{x}}{4-x}\right).\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ và $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$

3) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị của x để $P=0$.

Lời giải

Dạng 2: Phương trình bậc hai và quan hệ giữa (d), (P)

Câu 1. Cho phương trình ẩn x: $mx^2+2(m+1)x+m+3=0$. Tìm m để phương trình:

1) Có nghiệm duy nhất

2) Có nghiệm.

Lời giải

1) Có nghiệm duy nhất .

TH1: $m=0\Rightarrow pt(1):2x+3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất

TH2: $m\neq 0$, để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ pt (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2-m(m+3)=0$
$\Leftrightarrow m^2+2m+1-m^2-3m=0$
$\Leftrightarrow 1-m=0$
$\Leftrightarrow m=1$

Khi đó pt (1) có nghiệm kép là : $x=-\dfrac{b'}{a}=2$

Vậy $m=0$ hoặc $m=1$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất .

2) Có nghiệm :

TH1: $m=0\Rightarrow pt(1):2x+3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất .

TH2 : phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq 1$

Vậy $m\leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm .

Câu 2. Cho phương trình ẩn x: $x^2-2(m+1)x+m-4=0$

1) Giải phương trình với $m=1$

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm dương.

3) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

4) Chứng minh $\mathrm{M}=\mathrm{x}_1(1-\mathrm{x}_2)+\mathrm{x}_2(1-\mathrm{x}_1)$ không phụ thuộc vào m .

5) Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$ ($x_1;x_2$ là nghiệm của pt (1)).

Lời giải

1) Giải phương trình với $m=1.$

Thay $m=1.$ vào phương trình (1) , ta có :

$x^2-4x-3=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4=7$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\pm\sqrt{7}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{7} \\ x-2=-\sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{7}$

Vậy với $m=1$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là $x=2\pm\sqrt{7}$.

2) Tìm m ***để phương trình (1) có 2 nghiệm dương .***

Xét $\Delta'=(m+1)^2-m+4$

$=m^2+m+5=m^2+2m\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+5$

$=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\geq\frac{19}{4}>0\ \forall m$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi - ét, ta có : $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2m+2 \\ P=x_1.x_2=\frac{c}{a}=m-4 \end{cases}$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2>0 \\ m-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ m>4 \end{cases} \Rightarrow m>4$

3) Tìm m ***để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.***

Để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow m-4<0 \Leftrightarrow m<4$.

4) Chứng minh : $M=x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào m .

Có : $M=x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)$

$=(x_1+x_2)-2x_1x_2=2m+2-2(m-4)=10$ không phụ thuộc vào m .(đpcm)

5) Lập phương trình bậc 2 có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$ ***(*** $x_1;x_2$ ***là nghiệm của pt (1))***

Ta có : $\begin{cases} S = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = \dfrac{2m+2}{m-4} \\ P = \dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{m-4} \end{cases}$

Phương trình cần lập là : $x^2 - Sx + P = 0$

$\Rightarrow x^2 - \dfrac{2m+2}{m-4}x + \dfrac{1}{m-4} = 0$

$\Leftrightarrow (m-4)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$

Câu 3. Cho phương trình: $x^2 - 3x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thoả mãn:

1) $x_1^2 + x_2^2 = 3$

2) $2x_1 - 5x_2 = -8$

3) $x_1^2 - x_2^2 = 15$

4) $x_1^3 + x_2^3 = 11$

5) $|x_1 - x_2| = 1$

6) $|x_1| + |x_2| = 2$

7) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{5}{2} = 0$

8) $|x_1 - x_2| > 2$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$.

Ta có: $\Delta = 9 - 4m + 4 = 13 - 4m$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Rightarrow 13 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{13}{4}$

Áp dụng định lí Vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = m - 1 \end{cases}$

1) $x_1^2 + x_2^2 = 3$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 3$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$

$\Leftrightarrow 9 - 2m + 2 = 3$

$\Leftrightarrow m = 4$ (loại)

Vậy không có giá trị m để thõa $x_1^2 + x_2^2 = 3$

2) $2x_1 - 5x_2 = -8$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 - 5x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Thay vào $x_1.x_2 = m - 1$

$1.2 = m - 1$

$\Leftrightarrow m = 3$ (nhận)

Vậy giá trị $m=3$ thõa $2x_1-5x_2=-8$

3) $x_1^2-x_2^2=15$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)(x_1-x_2)=15$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=5^2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1.x_2=25$

$\Leftrightarrow 9-4(m-1)=25$

$\Leftrightarrow m=3$ (nhận)

Vậy giá trị $m=3$ thõa $x_1^2-x_2^2=15$

4) $x_1^3+x_2^3=11$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1.x_2(x_1+x_2)=11$

$\Leftrightarrow 27-9(m-1)=11$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{25}{9}$ (nhận)

Vậy giá trị $m=\dfrac{25}{9}$ thõa $x_1^3+x_2^3=11$

5) $|x_1-x_2|=1$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=1^2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1.x_2=1$

$\Leftrightarrow 9-4(m-1)=1$

$\Leftrightarrow m=3$ (nhận)

Vậy giá trị $m=3$ thõa $|x_1-x_2|=1$

6) $|x_1|+|x_2|=2$

$\Leftrightarrow (|x_1|+|x_2|)^2=2^2$

$\Leftrightarrow x_1^2+|2x_1.x_2|+x_2^2=4$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+|2x_1.x_2|=4$

$\Leftrightarrow 9-2(m-1)+2|m-1|=4$

$\Leftrightarrow |m-1|=\dfrac{7}{2}+m$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{-7}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m-1=\dfrac{-7}{2}+m \\ m-1=\dfrac{7}{2}-m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{-7}{2} \\ m=\dfrac{9}{4} \end{cases} \text{(nhận)}$$

Vậy giá trị $m=\dfrac{9}{4}$ thõa $|x_1|+|x_2|=2$

7) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1x_1+x_2x_2}{x_2x_1}=-\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2}{x_1.x_2}=\dfrac{-5}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9-2(m-1)}{m-1}=\dfrac{-5}{2}$ (đk $m\neq 1$)

$\Rightarrow 18-4m+4=-5m+5$

$\Leftrightarrow m=-17$ (nhận)

Vậy giá trị $m=-17$ thõa $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{5}{2}=0$

8) $|x_1-x_2|>2$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2>4$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1.x_2>4$

$\Leftrightarrow 9-4(m-1)>4$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}$ (nhận)

Vậy giá trị $m<\dfrac{9}{4}$ thõa $|x_1-x_2|>2$

Câu 4. Cho phương trình: $x^2-2mx+m^2-m+1=0$

1) Giải phương trình khi $m=1$

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2-2mx_1=9$

.

Lời giải

1) Với $m=1$ ***phương trình đã cho trở thành:***

$x^2-2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

2) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1\neq 0\\ m^2-(m^2-m+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow m-1>0\Leftrightarrow m>1$$

Theo đề bài ta có:

$x_1^2 - 2mx_1 = 9$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + m^2 - m + 1 = 9 + m^2 - m + 1$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ nên

$x_1^2 - 2mx_1 + m^2 - m + 1 = 0$

Suy ra $9 + m^2 - m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 10 = 0 \qquad (*)$

Phương trình $(*)$ có $\Delta_1 = 1^2 - 4.1.10 = -30 < 0$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy không tìm được giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

thỏa mãn $x_1^2 - 2mx_1 = 9$.

Câu 5. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm

x_1; x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải

Vì x_1; x_2 là độ dài hai cạnh tam giác nên x_1; x_2 là hai nghiệm dương.

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m+1)^2 - (2m+1) \geq 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \geq 0 \\ m > -1 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 2m + 1 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$x_1^2 + x_2^2 = 5$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$

$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(2m+1) = 5$

$\Leftrightarrow 4m^2+8m+4-4m-2-5=0$

$\Leftrightarrow 4m^2+4m-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m=\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=x+2$ và parabol $(P): y=x^2$

1) Tìm tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P).

2) Tính chu vi và diện tích tam giác AOB.

Lời giải

Câu 7. Cho (P): $y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m-1)x+4$

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=-2$

2) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

3) Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (P) $y_1+y_2=y_1.y_2$.

Lời giải

1) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=-2$

Thay $m=-2$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có:

$y=(-2-1)x+4 \Rightarrow y=-3x+4$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$x^2=-3x+4 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0$

Ta có: $a+b+c=1+3-4=0$

$\Rightarrow x_1=1 \Rightarrow y_1=1^2=1$

$x_2=-4 \Rightarrow \left({}_2=(-4)^2=16\right)$

Vậy với $m=-2$ thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $(-1;1)$ và $(-4;16)$.

2) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$x^2=(m-1)x+4$

$\Leftrightarrow x^2-(m-1)x-4=0$

$\Delta=\left[-(m-1)\right]^2-4.1.(-4)=(m-1)^2+16>0\ \forall m.$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\forall m$

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

3) Gọi** $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ **là tọa độ giao điểm của** (d) **và** (P) $y_1+y_2=y_1.y_2$ **.

Vì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ với mọi m.

Theo hệ thức Vi ét ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m-1\\x_1x_2=-4\end{cases}$$

$y_1+y_2=y_1.y_2$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=x_1^2.x_2^2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(x_1x_2)^2$

$\Leftrightarrow (m-1)^2-2.(-4)=(-4)^2$

$\Leftrightarrow (m-1)^2=16-8$

$\Leftrightarrow (m-1)^2=8$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}+1\\m=-2\sqrt{2}+1\end{array}\right.$$

Vậy $m=2\sqrt{2}+1; m=-2\sqrt{2}+1$ là giá trị cần tìm.

Câu 8. Cho đường thẳng $(d): y=2x+m^2-1$ và $(P): y=x^2$

1) Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A;B$.

2) Gọi $H;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tìm m để độ dài đoạn thẳng HK bằng 3.

Lời giải

1) Tìm** m **để** (d) **cắt** (P) **tại 2 điểm phân biệt** $A;B$**.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$x^2=2x+m^2-1$

$\Leftrightarrow x^2-2x-m^2+1=0$ (*)

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A;B$

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hia nghiệm phan biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 1.(-m^2+1) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Vậy $m \neq 0$ là giá trị cần tìm.

2) Gọi $H;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tìm m để độ dài đoạn thẳng HK bằng 3.

Vì $H;K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành

$\Rightarrow x_H = x_A; x_K = x_B$

$\Rightarrow HK = |x_H - x_K| = |x_A - x_B|$

Mà $HK = 3 \Rightarrow |x_A - x_B| = 3$

Với $x_A; x_B$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*)

Theo hệ thức Vi ét ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A x_B = -m^2 + 1 \end{cases}$$

$|x_A - x_B| = 3 \Leftrightarrow (x_A - x_B)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B = 9$

$\Leftrightarrow 2^2 - 4(-m^2+1) = 9$

$\Leftrightarrow 4 + 4m^2 - 4 = 9$

$\Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m = \pm\frac{3}{2}$(TM)

Vậy $m = \pm\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Dạng 3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Câu 1. Giải hệ phương trình

1) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+2} = 7 \\ 5(x+y) - 2\sqrt{x+2} = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^3 = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{x+3}-2\sqrt{y+1}=2\\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4\end{cases}$

6) $\begin{cases}\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{9}{y-1}=-1\\ \dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{4}{2y-2}=\dfrac{13}{6}\end{cases}$

7) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=4\\ x+xy+y=2\end{cases}$

8) $\begin{cases}(x-3)(y+2)=xy-5\\ (x+2)(y-3)=xy+1\end{cases}$

9) $\begin{cases}\dfrac{7}{|x-7|}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3}\\ \dfrac{5}{|x-7|}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=2\dfrac{1}{6}\end{cases}$

10) $\begin{cases}|3-x|+\dfrac{2}{\sqrt{y-2}}=5\\ 4|3-x|+\dfrac{3}{\sqrt{y-2}}=15\end{cases}$

Lời giải

1) $\begin{cases}x+2y=5\\ 3x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+6y=15\\ 3x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7y=14\\ 3x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ 3x-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x,y)=(1;2)$

2) $\begin{cases}2(x+y)+\sqrt{x+2}=7\\ 5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}$. ĐKXĐ: $x\ge -2$

$$\begin{cases}2(x+y)+\sqrt{x+2}=7\\ 5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x+y)+2\sqrt{x+2}=14\\ 5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9(x+y)=18\\ 5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ 5.2-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ 2\sqrt{x+2}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}=3\\ x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\ (t/m)\\ y=-5\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x,y)=(7;-5)$

3) $\begin{cases}x+y=3\\ x^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\ (x+y)^2-2xy=5\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}x+y=S\\ xy=P\end{cases}$. Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}S=3\\ S^2-2P=5\end{cases}$

$$\begin{cases}S=3\\ S^2-2P=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\ 3^2-2P=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\ P=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-y\\ (3-y).y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-y\\ 3y-y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-y\\ y^2-3y+2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y)=\{(1;2),(2;1)\}$

4) $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 8(x+1)-2(x+2y)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11(x+1)=22 \\ 3(x+1)+2(x+2y)=4 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ 3.2+2(x+2y)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2(x+2y)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x,y)=(1;-1)$

5) $\begin{cases} \sqrt{x+3}-2\sqrt{y+1}=2 \\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$. ĐKXĐ: $\begin{cases} x\ge -3 \\ y\ge -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-2\sqrt{y+1}=2 \\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+3}-4\sqrt{y+1}=4 \\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{y+1}=0 \\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{y+1}=0 \\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 2\sqrt{x+3}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ \sqrt{x+3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(t/m) \\ y=-1\ (t/m) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x,y)=(1;-1)$

6) $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{9}{y-1}=-1 \\ \dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{4}{2y-2}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} x\ne -\dfrac{1}{2} \\ y\ne 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{9}{y-1}=-1 \\ \dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{2}{y-1}=\dfrac{13}{6} \end{cases} (1)$$

Đặt $a=\dfrac{1}{2x+1}; b=\dfrac{1}{y-1}$ $(a,b\ne 0)$ (2).

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+9b=-1 \\ 3a-2b=\dfrac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+18b=-2 \\ 27a-18b=\dfrac{39}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35a=\dfrac{35}{2} \\ 3a-2b=\dfrac{13}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2}-2b=\dfrac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\,(t/m) \\ b=\dfrac{1}{3}\,(t/m) \end{cases}$$

Thay vào (2) ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y-1}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=2 \\ y-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\,(t/m) \\ y=4\,(t/m) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};4\right)$

7) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$ (1)

Đặt $a=x+y;\, b=xy$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b=4 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-6=0 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)(a-2)=0 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=2 \end{array}\right. \\ a+b=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-3 \\ -3+b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ 2+b=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-3 \\ b=5 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} a=-3 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3-x \\ x(-3-x)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3-x \\ x^2+3x+5=0 \end{cases}$

Ta thấy $x^2+3x+5=x^2+2.\dfrac{3}{2}.x+\dfrac{9}{4}+\dfrac{11}{4}=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Phương trình $x^2+3x+5=0$ (Vô nghiệm)

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y)=\{(0;2);(2;0)\}$

8) $\begin{cases} (x-3)(y+2)=xy-5 \\ (x+2)(y-3)=xy+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+2x-3y-6=xy-5 \\ xy-3x+2y-6=xy+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -3x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-9y=3 \\ -6x+4y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y=17 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{17}{5} \\ 2x+3.\dfrac{17}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{17}{5} \\ x=-\dfrac{23}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=\left(-\dfrac{17}{5};-\dfrac{23}{5}\right)$

9) $\begin{cases} \dfrac{7}{|x-7|}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{|x-7|}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=2\dfrac{1}{6} \end{cases}$ (1). Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 7 \\ y>-6 \end{cases}$

Đặt $a=\dfrac{1}{|x-7|};b=\dfrac{1}{\sqrt{y+6}}(a;b>0)$ (2)

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 7a-4b=\dfrac{5}{3} \\ 5a+3b=\dfrac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21a-12b=5 \\ 20a+12b=\dfrac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41a=\dfrac{41}{3} \\ 5a+3b=\dfrac{13}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{3}+3b=\dfrac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3}(t/m) \\ b=\dfrac{1}{6}(t/m) \end{cases}$$

Thay vào (2) ta có:

$$\begin{cases} |x-7|=3 \\ \sqrt{y+6}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-7=3 \\ x-7=-3 \end{array}\right. \\ y+6=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=10(t/m) \\ x=4(t/m) \end{array}\right. \\ y=30(t/m) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y)=\{(10;30);(4;30)\}$.

10) $\begin{cases} |3-x|+\dfrac{2}{\sqrt{y-2}}=5 \\ 4|3-x|+\dfrac{3}{\sqrt{y-2}}=15 \end{cases}$ (1). Điều kiện: $y>2$

Đặt $a=|3-x|;b=\dfrac{1}{\sqrt{y-2}}(a;b>0)$ (2)

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=5 \\ 4a+3b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+8b=20 \\ 4a+3b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b=5 \\ a+2b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1(t/m) \\ a=3(t/m) \end{cases}.$$

Thay vào (2) ta có:

$$\begin{cases}|3-x|=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{y-2}}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3-x=1\\3-x=-1\end{array}\right.\\ \sqrt{y-2}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.\\ y-2=\dfrac{1}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\left(t/m\right)\\x=4\left(t/m\right)\end{array}\right.\\ y=\dfrac{19}{9}\left(t/m\right)\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $\left(x;y\right)=\left\{\left(2;\dfrac{19}{9}\right);\left(4;\dfrac{19}{9}\right)\right\}$.

Câu 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases}ax-2y=a\\-2x+y=a+1\end{cases}$

1) Giải hệ phương trình với $a=-2$

2) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$ thỏa mãn điều kiện $x-y=1$

3) Tìm $a\in Z$ để hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$ sao cho x nhận giá trị nguyên.

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases}ax-2y=a & (1)\\-2x+y=a+1 & (2)\end{cases}$

1) Giải hệ phương trình với $a=-2$**.**

Với $a=-2$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}-2x-2y=-2\\-2x+y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=1\\-2x+y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=2\\x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=1-\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy với $a=-2$ hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

2) Tìm a ***để hệ phương trình có nghiệm*** $\left(x;y\right)$ ***thỏa mãn điều kiện*** $x-y=1$**.**

PT $(2)\Leftrightarrow y=a+1+2x$ thay vào phương trình (1) ta được:

$ax-2\left(a+1+2x\right)=a\Leftrightarrow ax-2a-2-4x=a\Leftrightarrow\left(a-4\right)x=3a+2\qquad(3)$

TH1: Nếu $a-4=0\Leftrightarrow a=4$

PT $(3)\Leftrightarrow 0x=14$ (phương trình vô nghiệm)

TH2: Nếu $a-4\neq 0\Leftrightarrow a\neq 4$

PT (3) có nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{3a+2}{a-4}$

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x=\dfrac{3a+2}{a-4} \\ y=a+1+\dfrac{2(3a+2)}{a-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3a+2}{a-4} \\ y=\dfrac{a^2-4a+a-4+6a+4}{a-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3a+2}{a-4} \\ y=\dfrac{a^2+3a}{a-4} \end{cases}$$

Theo bài ra: $x-y=1$

$$\Rightarrow \frac{3a+2}{a-4}-\frac{a^2+3a}{a-4}=1 \Rightarrow \frac{3a+2-a^2-3a}{a-4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{-a^2+2}{a-4}=1 \Rightarrow -a^2+2=a-4$$

$$\Rightarrow a^2+a-6=0 \Rightarrow (a-2)(a+3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x-y=1$.

3) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ sao cho x nhận giá trị nguyên.

Với $a\neq 4$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\dfrac{3a+2}{a-4} \\ y=\dfrac{a^2+3a}{a-4} \end{cases}$.

Theo bài ra, $x\in\mathbb{Z}$.

Mà: $x=\dfrac{3a+2}{a-4}=3+\dfrac{14}{a-4}$

Để $x\in\mathbb{Z}$ thì $a-4\in Ư(14)=\{\pm1;\pm2;\pm7;\pm14\}$.

Ta có bảng sau:

$a-4$	-14	-7	-2	-1	1	2	7	14
a	-10	-3	2	3	5	7	11	18
	Thỏa mãn	Thảo mãn	Thảo mãn	Thảo mãn	Thảo mãn	Thảo mãn	Thảo mãn	Thảo mãn

Vậy $a\in\{-10;-3;2;3;5;7;11;18\}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm sao cho x nhận giá trị nguyên

DẠNG 4: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 9. Hai người làm chung một công việc sau 6 giờ thì xong. Nếu làm một mình, người thứ nhất làm trong 2 giờ, sau đó người thứ hai là trong 3 giờ thì cả hai người làm được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao nhiêu giờ xong công việc?

Lời giải

Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là: x, y (giờ, $x, y > 6$).

Cả hai cùng làm xong công việc trong 6 giờ.

Trong 1 giờ:

+ Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

+ Người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

+ Cả hai cùng làm được $\frac{1}{6}$ công việc.

Do đó ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 2 giờ được $\frac{2}{x}$ công việc.

Người thứ hai làm trong 3 giờ được $\frac{3}{y}$ công việc.

Cả hai làm được $\frac{2}{5}$ công việc nên ta có phương trình: $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{10} \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=15 \end{cases} \text{(t/m)}$$

Vậy thời gian người thứ nhất, người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là 10 giờ và 15 giờ.

Câu 10. Hai độ công nhân cùng tu sửa một đoạn đường trong 4 ngày thì xong công việc. Nếu mỗi đội làm một mình thì đội I cần ít hơn thời gian đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội cần bao lâu xong công việc?

Lời giải

Gọi thời gian đội I làm một mình xong công việc là x (ngày, $x > 6$).

Thời gian đội II làm một mình xong công việc là $x + 6$ ngày.

Thời gian hai đội cùng làm xong công việc là 4 ngày.

Trong một ngày:

+ Đội I làm được $\frac{1}{x}$ công việc

+ Đội II làm được $\frac{1}{x+6}$ công việc

+ Cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$ công việc nên ta có phương trình:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ (t/m)} \\ x = -4 \text{ (l)} \end{array}\right.$

Vậy thời gian đội I, đội II làm một mình xong công việc lần lượt là 6 giờ và 12 giờ.

Câu 11. Một ô tô đi từ   để đến   trong một thời gian quy định. Nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến   sớm hơn quy định 2 giờ. Nếu giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến chậm hơn quy định 3 giờ. Tính quãng đường .

Lời giải

Gọi vận tốc dự định đi là x (km/h), ($x > 10$).

Thời gian dự định đi là y (h), ($y > 2$).

Vì nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến B sớm hơn quy định 2 giờ nên quãng đường AB là:

$(x+10)(y-2) = xy$ (1).

Vì nếu giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến B chậm hơn quy định 3 giờ nên quãng đường AB là:

$(x-10)(y+3) = xy$ (2).

Vậy ta có hệ:

$\begin{cases} (x+10)(y-2) = xy \\ (x-10)(y+3) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 10y = 20 \\ 3x - 10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 12 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy quãng đường $AB = 600$ km.

Câu 12. Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30 km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác HIệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

Lời giải

Gọi vận tốc xe của cô Liên là x (km/h), ($x>0$).

Ta có vận tốc xe của bác Hiệp là $x+3$ (km/h).

Thời gian cô Liên đi là $\frac{30}{x}$ (h).

Thời gian bác Hiệp đi là $\frac{30}{x+3}$ (h).

Vì bác HIệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 60(x+3)-60x=x(x+3)\Leftrightarrow x^2+3x-180=0$$

$$\Leftrightarrow (x-12)(x+15)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12\ (\text{Tm}) \\ x=-15\ (\text{Loai}) \end{array}\right..$$

Vậy vận tốc xe của cô Liên là 12 km/h, vận tốc xe của bác Hiệp là 15 km/h.

Câu 13. Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì chỗ ngồi trong phòng họp không đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng được chia thành bao nhiêu dãy.

Lời giải

Gọi số dãy ban đầu trong phòng là x (dãy), ($x\in\mathbb{N}^*, x>3$).

Ta có số chỗ ngồi trong mỗi dãy ban đầu là $\frac{360}{x}$ (chỗ).

Vì nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì chỗ ngồi trong phòng họp không đổi nên ta có phương trình:

$$\left(\frac{360}{x}+4\right)(x-3)=360\Leftrightarrow (360+4x)(x-3)=360x\Leftrightarrow 360x-1080+4x^2-12x=360x$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-270=0\Leftrightarrow (x-18)(x+15)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=18\ (\text{Tm}) \\ x=-15\ (\text{Loai}) \end{array}\right..$$

Vậy ban đầu phòng được chia thành 18 dãy.

Câu 14. Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỉ lệ 84%. Riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%. Riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Lời giải

Gọi số học sinh dự thi trường A x (em), ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số học sinh dự thi trường B y (em), ($y \in \mathbb{N}^*$).

Ta có:

Số học sinh trường A đỗ là $80\%.x$ (em), số học sinh trường B thi đỗ là $90\%.y$ (em).

Vì hai trường có 420 học sinh thi đỗ nên ta có phương trình:

$80\%x + 90\%y = 420 \Leftrightarrow 8x + 9y = 4200$ (1).

Vì tỉ lệ đỗ là 84% nên ta có phương trình:

$84\%\left(x + y\right) = 420 \Leftrightarrow x + y = 500$ (2).

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} 8x + 9y = 4200 \\ x + y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 4200 \\ 8x + 8y = 4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 \\ x = 300 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy trường A có 300 học sinh dự thi, trường B có 200 học sinh dự thi.

Câu 15. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.

Lời giải

Gọi số sản phẩm tổ I được giao theo kế hoạch là x (sản phẩm), ($x \in \mathbb{N}^*$).

Ta có số sản phẩm được giao theo kế hoạch của tổ II là $600 - x$ (sản phẩm).

Vì do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%, mà thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm nên ta có phương trình:

$18\%x + 21\%\left(600 - x\right) = 120 \Leftrightarrow 0{,}18x + 126 - 0{,}21x = 120 \Leftrightarrow 0{,}03x = 6 \Leftrightarrow x = 200$ (thỏa mãn).

Vậy số sản phẩm tổ I được giao theo kế hoạch là 200 sản phẩm, số sản phẩm tổ II được giao theo kế hoạch là 400 sản phẩm.

Câu 16. Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm $36cm^2$, và nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi $26cm^2$.

Lời giải

Gọi a,b (cm) lần lượt là độ dài hai cạnh của tam giác vuông đã cho. ($a,b>0$).

Vì rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm $36cm^2$ nên ta có phương trình:

$(a+3)(b+3)=ab+36$ (1)

Vì nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi $26cm^2$ nên ta có phương trình :

$(a-2)(b-4)=ab-26$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}(a+3)(a+3)=ab+36\\(a-2)(b-4)=ab-26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+3b=27\\2a+b=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=1\end{cases}$$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đã cho là 8 cm và 1 cm.

HÌNH HỌC

Câu 1. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm C thuộc (O). Gọi M,N lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ AC,CB. Nối $MN\cap AC=I$. Hạ $ND\perp AC$. Gọi E là trung điểm BC.

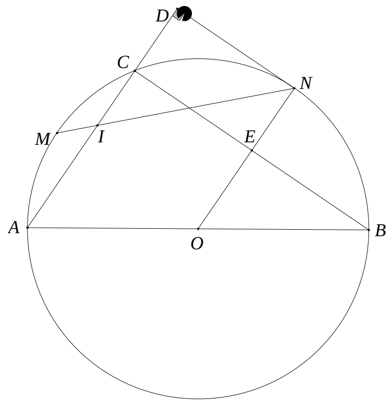
1. Tính $\widehat{MIC}$.

2. CMR ; DN là tiếp tuyến với $(O;R)$.

3. Dựng hình bình hành $ADEF$. CMR : F thuộc đường tròn $(O;R)$.

4. Cho $\widehat{CAB}=30°$, $R=10$ cm. Tính V hình tạo thành khi ΔABC quay một vòng quanh AB.

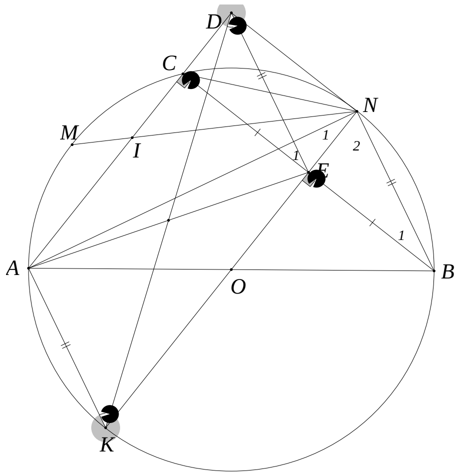
Lời giải



1. Tính $\overset{\frown}{MIC}$.

Ta có $\widehat{MIC}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{MC}+sd\overset{\frown}{AN}\right)=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{MN}$ (cung lớn MN).

2. CMR ; DN là tiếp tuyến với $(O;R)$.



Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC nên $ON\perp CB$ (mối quan hệ giữa đường kính và dây cung).

Mà $\widehat{ACB}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $AC\perp CB$

Do đó $AD//ON$

Lại có $AD\perp DN$ (gt) suy ra $DN\perp NO$.

Vậy DN là tiếp tuyến với $(O;R)$.

3. CMR : F thuộc đường tròn $(O;R)$.

Gọi $K=NO\cap(O)$ Ta có $BC\perp AC$, $BC\perp NK$ suy ra $AC//NK$ hay $AC//EK$ (1)

Tứ giác $NDCE$ có : $\widehat{D}=\widehat{C}=\widehat{E}=90°$ nên $NDCE$ là hình chữ nhật, suy ra $DN=CE$ mà $CE=EB$ (gt) nên $DN=EB$, lại có $ND//BE(\perp AC)$

Suy ra $DNBE$ là hình bình hành.

nên $DE//NB$ suy ra $\widehat{E_1}=\widehat{B_1}$ (cặp góc đồng vị) $\widehat{B_1}+\widehat{N_2}=90°$, $\widehat{N_1}+\widehat{N_2}=90°$ suy ra $\widehat{N_1}=\widehat{B_1}=\widehat{E_1}$

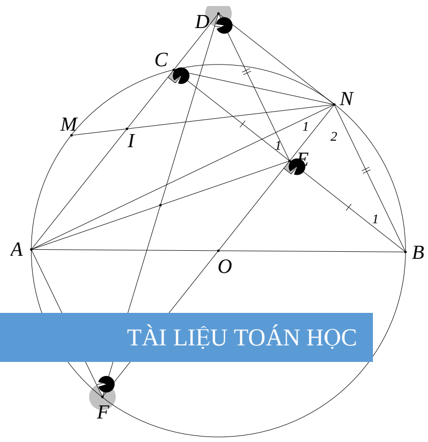
Lại có $\widehat{N_1}+\widehat{NKA}=90°$, $\widehat{E_1}+\widehat{DEN}=90°$

Nên $\widehat{NKA}=\widehat{DEN}$, dolà cặp góc đồng vị suy ra $DE//AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ADEK$ là hình bình hành, mà $ADEF$ là hình bình hành nên $F\equiv K$.

Chứng tỏ F thuộc (O).

4. Tính V hình tạo thành khi ΔABC quay một vòng quanh AB.



Cho $\widehat{CAB}=30°$, $R=10$ cm. Tính V hình tạo thành khi ΔABC quay một vòng quanh AB .
Kẻ $CH\perp AB=H$. Vậy khi ΔABC quay một vòng quanh AB sẽ tạo cho ta hai hình nón như sau :
Hình nón thứ nhất (tạo thành khi quay ΔAHC quanh AH) có đường cao là AH, bán kính đáy là CH.

Hình nón thứ hai (tạo thành khi quay ΔBHC quanh BH) có đường cao là BH , bán kính đáy là CH .

Vì $\widehat{CAB}=30°$, $R=10$ cm nên $AB=2r=20$ (cm), vậy $AC=AB.\cos\widehat{CAB}$ $=20.\cos 30°=10\sqrt{3}$

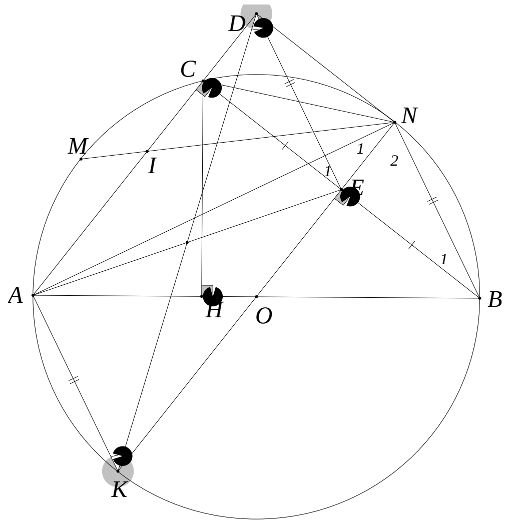
Do $\Delta ABC:\widehat{C}=90°;CH\perp AB=H$ nên $AH=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{\left(10\sqrt{3}\right)^2}{20}=15$ (cm), suy ra

$HB=AB-AH=20-15=5$ (cm)

$CH=\sqrt{HA.HB}=\sqrt{15.5}=5\sqrt{3}$ (cm)

Vậy thể tích hình thu được sẽ là:

$V=\dfrac{1}{2}\pi.CH^2.AH+\dfrac{1}{3}\pi.CH^2.BH=\dfrac{1}{3}.3,14.\left(5\sqrt{3}\right)^2.15+\dfrac{1}{3}.3,14.\left(5\sqrt{3}\right)^2.5=1570\left(cm^3\right)$.



Câu 2. Cho đường tròn $(O;R)$ với dây BC cố định. Điểm A thuộc cung lớn BC. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D. Các tiếp tuyến của $(O;R)$ tại C và D cắt nhau ở E. Tia CD cắt AB ở K, đường thẳng AD cắt CE tại I .

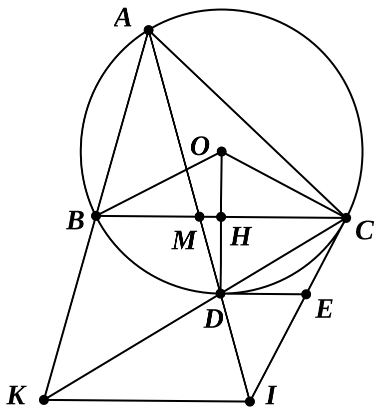
1) Chứng minh $BC//DE$.

2) Chứng minh $AKIC$ là tứ giác nội tiếp.

3) Cho $BC=R\sqrt{3}$. Tính độ dài cung nhỏ BC của đường tròn $(O;R)$ theo R.

4) AD cắt BC tại M . Chứng minh $AB.AC=AM^2+MB.MC$.

Lời giải



1) Chứng minh $BC//DE$**.**

Ta có: $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$); $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ (AD là phân giác $\widehat{BAC}$); $\widehat{CAD}=\widehat{CDE}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

$\Rightarrow \widehat{BCD}=\widehat{CDE}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BC//DE$.

2) Chứng minh $AKIC$ ***là tứ giác nội tiếp.***

Ta có $\widehat{DCE}=\widehat{DAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$); $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ (AD là phân giác $\widehat{BAC}$);

$\Rightarrow \widehat{DCE}=\widehat{BAD}\left(=\widehat{DAC}\right)\Rightarrow$ Tứ giác $AKIC$ có hai đỉnh A,C cùng nhìn cạnh KI dưới góc bằng nhau nên là tứ giác nôi tiếp.

3) Cho $BC=R\sqrt{3}$***. Tính độ dài cung nhỏ*** BC ***của đường tròn*** $(O;R)$ ***theo*** R**.**

Vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}\Rightarrow D$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}\Rightarrow OD\perp BC$ tại trung điểm H của BC (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow HB=HC=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác OHC vuông tại H có $\sin\widehat{HOC}=\dfrac{HC}{OC}=\dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{HOC}=60^\circ$.

Lại có ΔOBC cân tại O có OH là đường cao nên cũng là phân giác

$\Rightarrow\widehat{BOC}=2\widehat{HOC}=2.60^\circ=120^\circ$ nên độ dài cung nhỏ BC của đường tròn $(O;R)$là:

$l=\dfrac{\pi.R.n}{180}=\dfrac{\pi.R.120}{180}=\dfrac{2\pi R}{3}$ (đơn vị độ dài).

4) AD ***cắt*** BC ***tại*** M***. Chứng minh*** $AB.AC=AM^2+MB.MC$**.**

Xét ΔABM và ΔADC có:

$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ (AD là phân giác $\widehat{BAC}$); $\widehat{ABM}=\widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow\Delta ABM\backsim\Delta ADC\,(g.g)\Rightarrow\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AD}{AC}\Leftrightarrow AB.AC=AM.AD$ (1).

Xét ΔMAB và ΔMCD có:

$\widehat{AMB}=\widehat{CMD}$ (đối đỉnh); $\widehat{MAB}=\widehat{MCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta MCD\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{MC}{MD} \Leftrightarrow AM.MD=MB.MC$ (2).

Từ (1) và (2), ta có:
$AB.AC=AM.AD=AM\left(AM+MD\right)=AM^2+AM.MD=AM^2+MB.MC$.

Vậy $AB.AC=AM^2+MB.MC$.

Câu 3. Cho $(O;R)$ và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm của CD. Nối BI cắt (O) tại E $(E \neq B)$. Nối OM cắt AB tại H.

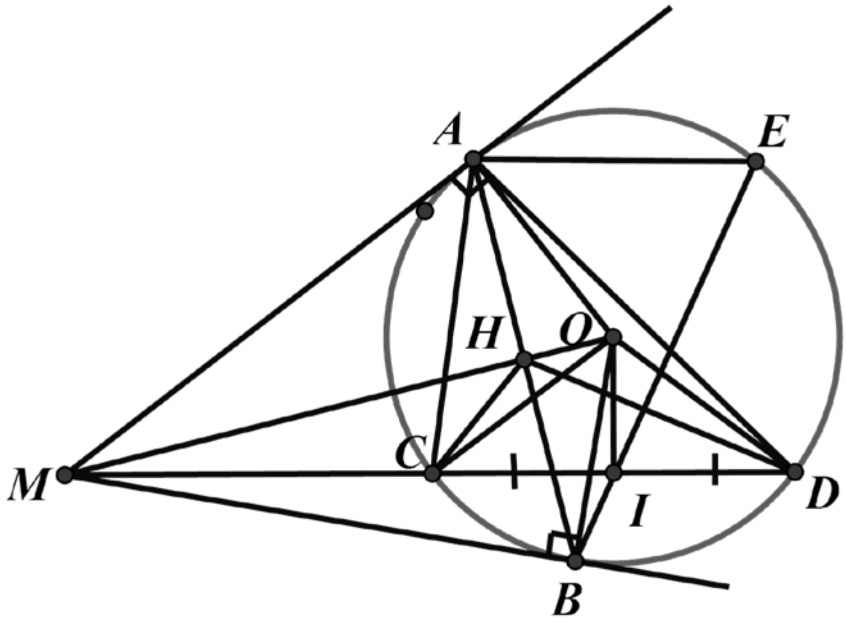
1) Chứng minh 5 điểm M, A, O, I, B thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $AE//CD$.

3) Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$.

4) Chứng minh HD là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Lời giải



1) Chứng minh 5 điểm M, A, O, I, B thuộc một đường tròn.

Vì MA, MB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow MA \perp AO$ và $MB \perp BO \Rightarrow \widehat{MAO}=\widehat{MBO}=90^0$

$\Rightarrow$ 2 đỉnh $A, B \in$ đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ nội tiếp $\Rightarrow$ 4 điểm $M, A, O, B \in$ đường tròn đường kính MO (1)

Xét (O) có CD là dây cung, OI là một phần đường kính và $IC = ID$ (gt)

$\Rightarrow OI \perp CD$

$\Rightarrow \widehat{OIM} = 90^0 \Rightarrow \Delta MIO$ vuông tại $I \Rightarrow I \in$ đường tròn đường kính MO (2)

Từ $(1);(2) \Rightarrow$ 5 điểm $M, A, O, B, I \in$ đường tròn đường kính MO.

2) Chứng minh $AE//CD$.

Xét (O) có $\widehat{AEB} = \widehat{MAB}$ (Hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Xét đường tròn đường kính MO có $\widehat{MAB} = \widehat{MIB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{MIB} \Rightarrow AE//CD$

3) Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$.

$MA \perp MB \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$

Xét tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $MAOB$ là hình chữ nhật

Mà $OA = OB = R \Rightarrow AMBO$ là hình vuông $\Rightarrow OM$ là phân giác của $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} = 45^0$

Xét ΔMAO vuông tại A có $\cos\widehat{AOM} = \cos 45^0 = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow OM = OA.\sqrt{2} = R.\sqrt{2}$

Vậy $OM = R.\sqrt{2}$ thì $MA \perp MB$

4) Chứng minh HD là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Có MA, MB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow MA = MB \Rightarrow M \in$ đường trung trực của AB

Có $OA = OB = R \Rightarrow O \in$ đường trung trực của AB

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại H

Xét ΔMAO vuông tại A đường cao AH có: $MA^2 = MH.MO$ (4)

Xét ΔMAC và ΔMDA CÓ

$\widehat{AMC}$ chung

$\widehat{MAC} = \widehat{MDB}$ (hệ quả của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDB\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA}$

$\Rightarrow MA^2 = MC.MD$ (3)

Từ $(3);(4) \Rightarrow MH.MO = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$

Xét ΔMHC và ΔMDO CÓ

$\widehat{HMC}$ chung

$\frac{MH}{MC}=\frac{MD}{MO}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MHC \backsim \Delta MDO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MHC}=\widehat{CDO} \Rightarrow CHOD$ nội tiếp $\widehat{OHD}=\widehat{OCD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

Mà $\widehat{OCD}=\widehat{ODC}$ (ΔOCD cân tại O _ $OC=OD=R$) $\Rightarrow \widehat{MHC}=\widehat{OHD}$

Lại có $\widehat{MHC}+\widehat{CHB}=\widehat{OHD}+\widehat{DHB}=90^0 \Rightarrow \widehat{CHB}=\widehat{DHB}$

$\Rightarrow HB$ là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Câu 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm C thuộc đoạn thẳng đó (C khác A và B). Vẽ cùng nửa mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm M cố định. Kẻ tia $Cz \perp CM$ tại C, tia Cz cắt tia By tại K. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính MC cắt MK tại E.

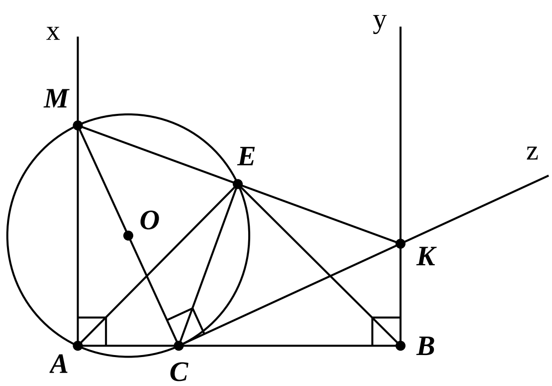
1) Chứng minh $CEKB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $AM.BK = AC.BC$.

3) Chứng minh ΔAEB là tam giác vuông.

4) Cho A, B, M cố định. Tìm vị trí của điểm C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn nhất.

Lời giải



1) Chứng minh $CEKB$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $CEKB$ có: $\widehat{CBK}=90°$ (GT); $\widehat{CEM}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CEK}=90°$ (kề bù với $\widehat{CEM}=90°$) $\Rightarrow$ tứ giác $CEKB$ nội tiếp đường tròn đường kính CK.

2) Chứng minh $AM.BK = AC.BC$.

Xét ΔAMC và ΔBCK có:

$\widehat{MAC} = \widehat{CBK} = 90°(GT)$; $\widehat{AMC} = \widehat{BCK}$ (cùng phụ với $\widehat{ACM}$)

$\Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta BCK\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BC}{BK} \Leftrightarrow AM.BK = AC.BC$.

3) Chứng minh ΔAEB là tam giác vuông.

Ta có $\widehat{CAE} = \widehat{CME}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$);

Ta có $\widehat{CBE} = \widehat{CKE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$);

$\Rightarrow \widehat{CAE} + \widehat{CBE} = \widehat{CME} + \widehat{CKE} = 90°$ (ΔCMK vuông tại C)

$\Rightarrow \widehat{AEB} = 180° - \left(\widehat{CAE} + \widehat{CBE}\right) = 180° - 90° = 90° \Rightarrow \Delta AEB$ vuông tại E.

4) Cho A, B, M cố định. Tìm vị trí của điểm C để diện tích tứ giác $ABKM$ lớn nhất.

Ta có tứ giác $ABKM$ là hình thang vuông nên có diện tích là

$S = \dfrac{(AM + KB).AB}{2}$.

Vì A, B, M cố định nên S lớn nhất khi BK lớn nhất.

Lại có $AM.BK = AC.BC$ (ý 2)) $\Rightarrow BK = \dfrac{AC.BC}{AM}$ nên BK lớn nhất khi $AC.BC$ lớn nhất.

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $AC.BC \le \left(\dfrac{AC + BC}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$ không đổi nên $AC.BC$ lớn nhất bằng $\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$ khi $AC = BC$ tức là C là trung điểm của AB.

Vậy diện tích tứ giác $ABKM$ lớn nhất khi C là trung điểm của AB.

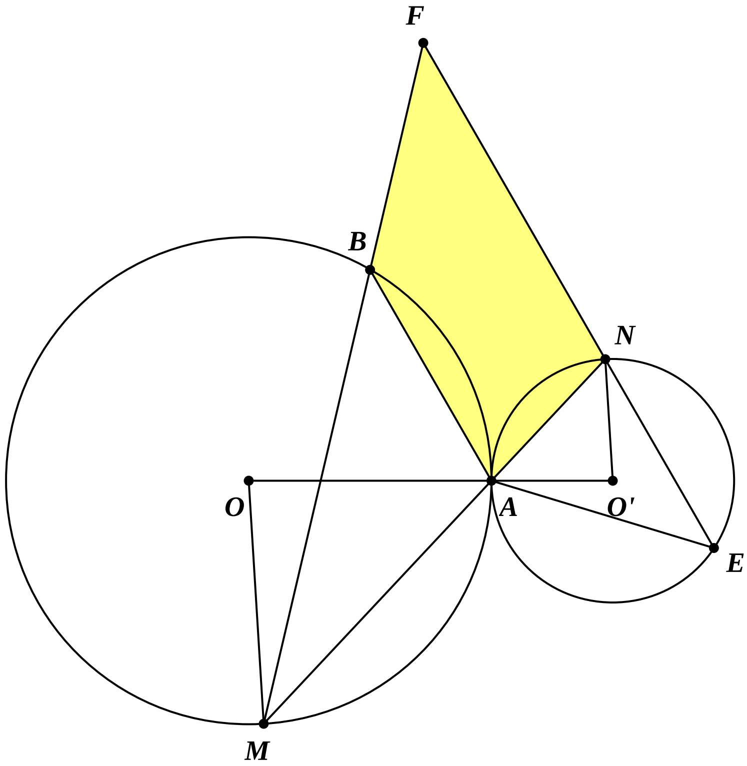
Câu 5. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại $A(R = 2R')$. Điểm B thuộc đường tròn $(O;R)$ sao cho $AB = R$. Điểm M thuộc cung lớn AB của đường tròn $(O;R)$ sao cho $MA \le MB$. Nối MA cắt $(O';R')$ tại N. Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt $(O';R')$ tại E, cắt MB tại F.

1) Chứng minh $\Delta AOM \backsim \Delta AO'N$.

2) Chứng minh độ dài đoạn thẳng NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của $(O;R)$.

3) Chứng minh $ABFE$ là hình thang cân.

4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ABFN$ lớn nhất.



Lời giải

1) Chứng minh $\Delta AOM \backsim \Delta AO'N$.

Xét ΔAOM và $\Delta AO'N$ có:

$$OA = OM = R; O'A = O'N = R'; R = 2R'(GT) \Rightarrow \frac{OA}{O'A} = \frac{OM}{O'M} = \frac{2}{1} = 2;$$

$\widehat{OAM} = \widehat{O'AN}$ (đối đỉnh), mà các ΔAOM và $\Delta AO'N$ là các tam giác cân nên:

$$\widehat{AOM} = 180° - \widehat{OAM} = 180° - \widehat{O'AN} = \widehat{AO'N}$$

$\Rightarrow \Delta AOM \backsim \Delta AO'N\,(c.g.c)$.

2) Chứng minh độ dài đoạn thẳng NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của $(O;R)$.

Vì $\Delta AOM \backsim \Delta AO'N$ (ý 1)) nên $\dfrac{MA}{AN} = \dfrac{OA}{O'A} = 2 \Rightarrow \dfrac{MA}{MN} = \dfrac{2}{3}$.

Mặt khác $AB//NF\left(GT\right)$ nên theo hệ quả của định lý Ta-let, ta có:

$$\frac{AB}{NF}=\frac{MA}{MN}=\frac{2}{3}\Rightarrow NF=\frac{3AB}{2}=\frac{3R}{2}.$$

Vậy $NF=\dfrac{3R}{2}$ không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của $\left(O;R\right)$.

3) Chứng minh $ABFE$ là hình thang cân.

Vì $AB//EF\left(GT\right)$ nên ta có tứ giác $ABFE$ là hình thang.

Lại có $\widehat{EFB}=\widehat{ABM}$ (so le trong, $AB//EF$) (1);

$\widehat{ABM}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOM}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$); $\widehat{AEF}=\dfrac{1}{2}\widehat{AO'N}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$); $\widehat{AOM}=\widehat{AO'N}$ (ΔAOM" $\Delta AO'N$)

$\Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{AEF}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{EFB}=\widehat{AEF}$ $\Rightarrow$ hình thang $ABFE$ có hai góc ở đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $ABFN$ lớn nhất.

Theo GT ta có $MA\le MB$ nên trong tam giác MAB ta có $\widehat{MBA}\le\widehat{MAB}$ (góc đối diện với cạnh nhỏ hơn thì nhỏ hơn);

Lại có $\widehat{MAB}=\widehat{ANF}$ (hai góc đồng vị, $AB//EF$); $\widehat{MBA}=\widehat{AEF}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{ANF}\ge\widehat{AEF}\Rightarrow$ $NF\le EF\Rightarrow$ diện tích tứ giác $ABFN$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng diện tích tứ giác $ABFE$.

Vậy diện tích tứ giác $ABFN$ là lớn nhất khi nó bằng diện tích tứ giác $ABFE$ hay $\widehat{ANF}=\widehat{AEF}$ $\Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M hay $MA=MB\Rightarrow M$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$.

Vậy M là điểm chính giữa của cung lớn AB của $\left(O;R\right)$ thì diện tích tứ giác $ABFN$ lớn nhất.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$. Các đường cao BE,CF cắt nhau tại H, cắt $\left(O;R\right)$ tại M và N.

1) Chứng minh $AFHE,BFEC$ nội tiếp.

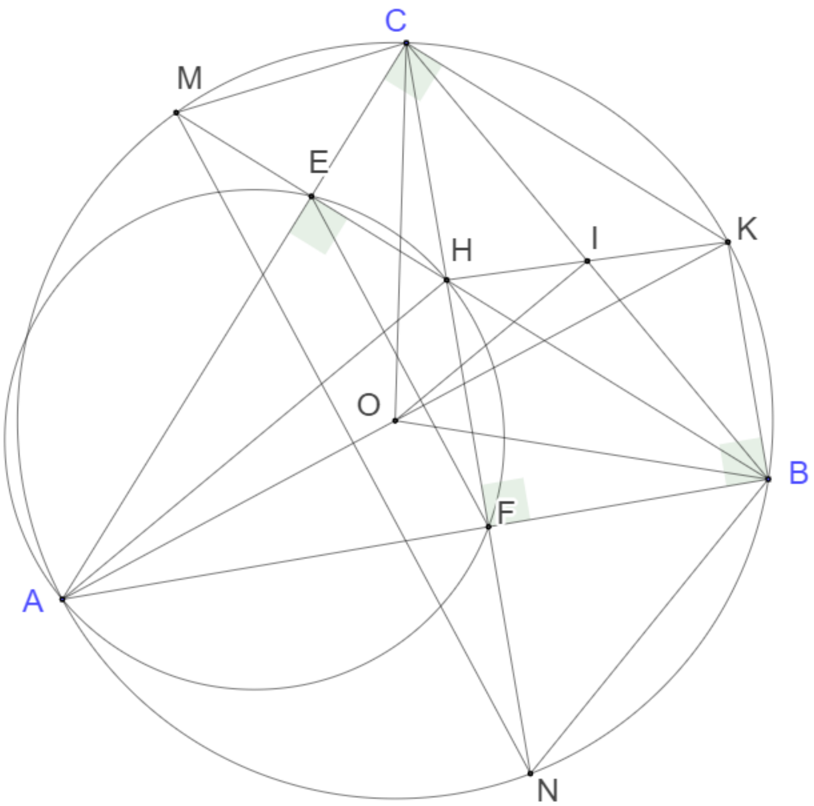
2) Chứng minh $AE.AC=AF.AB$

3) Chứng minh $MN//EF$

4) Chứng minh $\dfrac{MN}{AH}<2$

5) Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Lời giải



1) Chứng minh $AFHE, BFEC$ nội tiếp.

Vì $BE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEB} = 90°$

$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFA} = 90°$

Xét tứ giác $AFHE$ có: $\widehat{AEB} + \widehat{CFA} = 90° + 90° = 180°$. Mà $\widehat{AEB}$ và $\widehat{CFA}$ là hai góc ở vị trí đối nhau. Nên tứ giác $AFHE$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AFHE$ có: $\widehat{CFB} + \widehat{CEB} = 90°$. Mà $\widehat{CEB}$ và $\widehat{CFB}$ là hai góc ở vị trí đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh CB. Nên tứ giác $CEFB$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AE.AC = AF.AB$

Ta có $\widehat{AEF}$ là góc ngoài tại đỉnh E của tứ giác nội tiếp $CEFB$ $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB}$

Xét tam giác AEF và tam giác ABC có:

$\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$

$\widehat{CAB}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF" \ \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$

3) Chứng minh $MN//EF$

Tứ giác $CEFB$ nội tiếp nên $\widehat{CFE}=\widehat{CBE}$ (hai góc kề cùng nhìn cạnh CE)

Xét (O) có $\widehat{CNM}=\widehat{CBE}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{CM}$)

Suy ra $\widehat{CFE}=\widehat{CNM}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $MN//EF$.

4) Chứng minh $\dfrac{MN}{AH}<2$

Tứ giác $CEFB$ nội tiếp nên $\widehat{ACN}=\widehat{ABM}$ (1) (hai góc kề cùng nhìn cạnh FE)

Xét (O) có $\widehat{ACM}=\widehat{ABM}$ (2) (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AM}$)

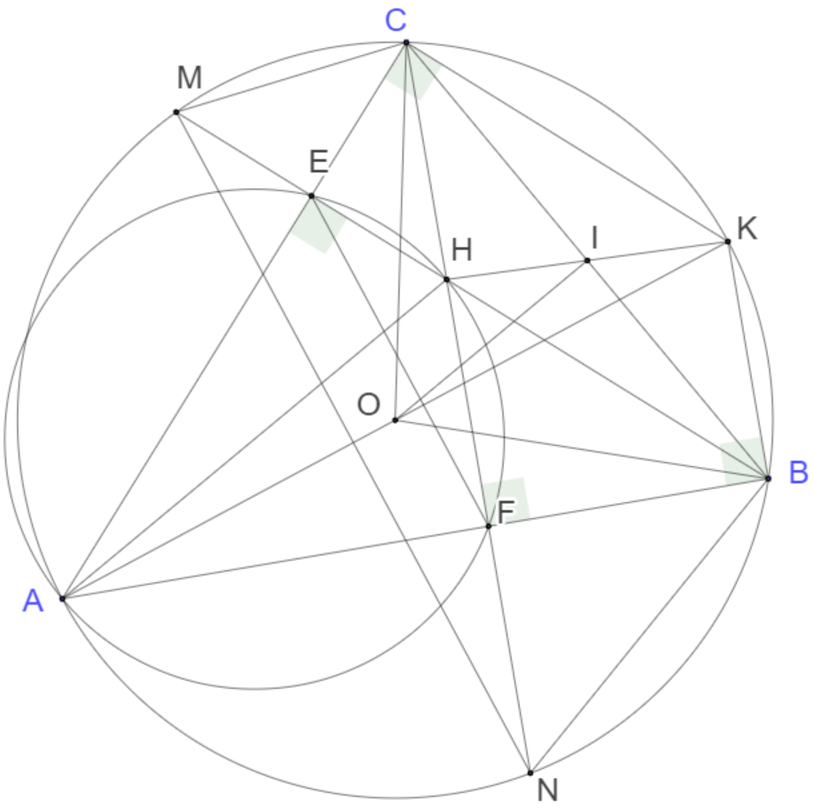
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACN}=\widehat{ACM}$, hay AC là phân giác $\widehat{MCN}$.
Xét tam giác MCH có CE vừa là phân giác, vừa là đường cao nên ΔMCH cân tại C $\Rightarrow$ E là trung điểm MH.

Xét (O) có $\widehat{ACN}=\widehat{ABN}$ (3) (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AN}$)

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{ABN}=\widehat{ABM}$, hay AB là phân giác $\widehat{MBN}$.
Xét tam giác MBH có BF vừa là phân giác, vừa là đường cao nên ΔMBH cân tại B $\Rightarrow$ F là trung điểm NH.
Xét tam giác NHM có:
+) E là trung điểm MH.
+) F là trung điểm NH.
$\Rightarrow EF$ là đường trung bình tam giác NHM $\Rightarrow MN=2EF$
Ta lại có tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên $EF<AH$ (trong đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất)

Suy ra $\dfrac{MN}{AH}<\dfrac{MN}{EF}=2$

5) Cho** BC **cố định,** A **chuyển động trên cung lớn** BC **sao cho tam giác** ABC **có ba góc nhọn. Chứng minh diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác** AEF **không đổi.



Trong đường tròn (O), kẻ đường kính AK.

Xét (O) có: $\widehat{ABK} = \widehat{ACK}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp KB \\ AC \perp KC \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CH // KB \\ CK // HB \end{cases} \Rightarrow$ $CHBK$ là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm HK và CB $\Rightarrow I$ là trung điểm của HK và CB.

Xét tam giác AHK có I là trung điểm HK, O là trung điểm AK nên OI là đường trung bình tam giác AHK $\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}AH$.

Xét tam giác cân OBC có I là trung điểm BC $\Rightarrow OI$ vừa là đường cao vừa là phân giác $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{OIB} = 90^\circ \\ \widehat{BOI} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BOI} \ \left(= \frac{1}{2}\widehat{BOC}\right)$$

Xét tam giác vuông BOI có: $OI = BI.\cot\widehat{BOI} = \dfrac{1}{2}BC.\cot\widehat{BAC}$

Vì BC cố định nên $\widehat{BAC}$ cũng cố định.

Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

$$\Rightarrow r = \frac{AH}{2} = OI = \frac{1}{2}BC\cot\widehat{BAC}$$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác AEF là:

$S = \pi\left(\frac{1}{2}BC.\cot\widehat{BAC}\right)^2$ không đổi

Câu 7. Cho $(O;R)$, đường kính BC . Gọi A là điểm chính giữa của cung BC. Điểm M thuộc đoạn BC

Kẻ $ME \perp AB, MF \perp AC, MN \perp FE$ tại N.

a) Chứng minh: 5 điểm A, E, O, M, F cùng thuộc một đường tròn.

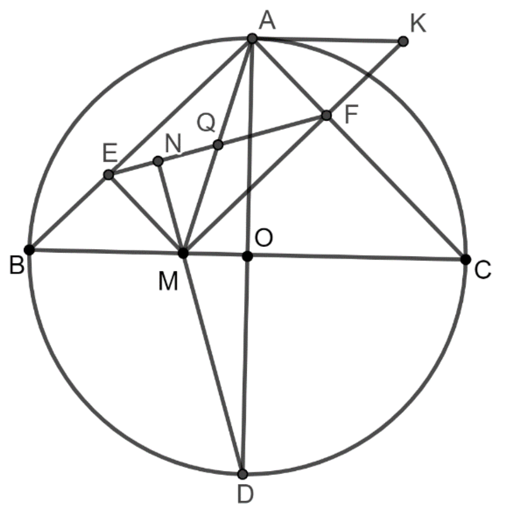
b) $BE.BA = BO.BM$

c) Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại A cắt MF tại K . chứng minh: $BE = KF$.

d) Khi M di chuyển trên BC. Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Chứng minh: 5 điểm A, E, O, M, F ***cùng thuộc một đường tròn.***



Vì

$ME \perp AB \Rightarrow \widehat{MEA} = 90^0$

$MF \perp AC \Rightarrow \widehat{MFA} = 90^0$

Lại có: $\widehat{BAC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$Tứ giác $AEMF$ có: $\widehat{MEA} = \widehat{MFA} = 90^0$

$\Rightarrow$Tứ giác $AEMF$ nội tiếp.

$\Rightarrow A, E, M, F$ cùng thuộc một đường tròn (1)

Vì A là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

mà AO là trung tuyến của $\Delta ABC \Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{AOM} = 90^0$

Xét tứ giác $AEMO$ có: $\widehat{AEM} = \widehat{AOM} = 90^0 \Rightarrow$Tứ giác $AEMO$ nội tiếp

$\Rightarrow A, E, M, O$ cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow A, E, M, O, F$ cùng thuộc một đường tròn.

b) CM : $BE.BA = BO.BM$

Xét ΔBAO và ΔBME ta có:

$$\begin{cases} \widehat{B}\ chung \\ \widehat{BEM} = \widehat{BOA} = 90^0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta BAO \backsim \Delta BME (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BA}{BM} = \dfrac{BO}{BE}$

$\Rightarrow BE.BA = BO.BM$

c) chứng minh: $BE = KF$ **.**

Vì AK là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AK \perp AO$. Mà $BC \perp AO \Rightarrow AK // BC$. Hay $AK // BM$

Lại có: $\widehat{BAC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BA \perp AC$ mà $MF \perp AC \Rightarrow BA // MF$

Tứ giác $AKMB$ có: $\begin{cases} BA // MF \\ AK // BM \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $AKMB$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = MK (3)$

Mà $AE = MF$ (vì $AEMF$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow AE = MF (4)$

Lại có: $AB = AE + BE; MK = MF + KF (5)$

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow$ $BE = KF$

Cách 2: chứng minh $\Delta EBM = \Delta FAK$ (c.h-gn) $\Rightarrow BE = KF$

d) Chứng minh rằng: MN ***luôn đi qua một điểm cố định.***

Gọi AO cắt (O) tại $D \Rightarrow D$ cố định .

Gọi FE cắt AM tại $Q \Rightarrow Q$ là trung điểm của FE và AM .

Vì $\widehat{EAO} = \widehat{FAO} \Rightarrow OE = FO \Rightarrow \Delta FEO$ cân tại $O \Rightarrow OQ \perp FE$

Xét ΔAMD có QO là đường trung bình $\Rightarrow QO //$DM .

Mà $OQ \perp FE$ nên $MD \perp FE (6)$

Mà $MN \perp FE (7)(gt)$ (gt)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow MN \equiv MD \Rightarrow M, N, D$ thẳng hàng.

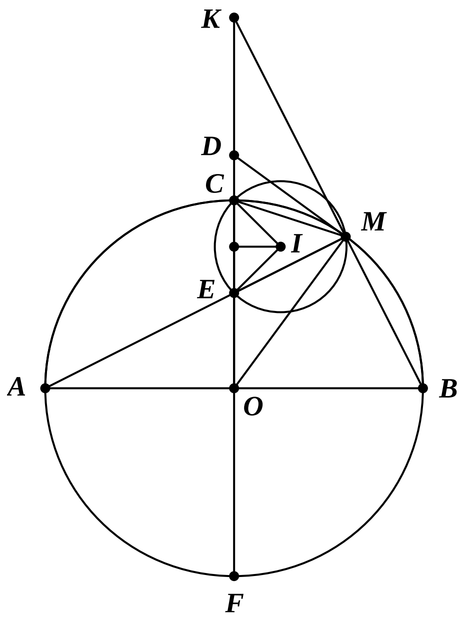
$\Rightarrow MN$ đi qua điểm D cố định.

Câu 8. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB. Bán kính OC vuông góc với AB. Điểm E thuộc OC. Nối AE cắt nửa đường tròn tại M. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt OC tại D.

1) Chứng minh ΔDME cân.

2) BM cắt OC tại K. Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC.
3) Tìm vị trí của E để $MA = 2MB$.
4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME. Chứng minh khi E di chuyển trên OC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải



1) Chứng minh ΔDME cân.

CO cắt $(O;R)$ tại điểm thứ hai F, vì $AB \perp CO(GT) \Rightarrow A$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CF}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AF}$ (1);

$\widehat{MED}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn nên ta có $\widehat{MED} = \dfrac{sd\overset{\frown}{CM} + sd\overset{\frown}{AF}}{2}$ (2);

$\widehat{EMD} = \dfrac{sd\overset{\frown}{MA}}{2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{MA}$) $\Rightarrow \widehat{EMD} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AC} + sd\overset{\frown}{CM}}{2}$ (3);

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{MED} = \widehat{EMD} \Rightarrow \Delta DME$ cân tại D.

2) BM cắt OC tại K. Chứng minh $BM.BK$ không đổi khi E di chuyển trên OC.

Ta có ΔBMA” ΔBOK (hai tam giác vuông có góc nhọn B chung)

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BO}{BK} \Rightarrow BM.BK = BO.BA = R.2R = 2R^2$.

Vậy $BM.BK = 2R^2$ không đổi khi E di chuyển trên OC.

3) Tìm vị trí của E để $MA = 2MB$.

Ta có ΔAOE” ΔAMB (hai tam giác vuông có góc nhọn A chung)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{OA}{OE}$. Để $MA = 2MB \Leftrightarrow \dfrac{MA}{MB} = 2$ thì $\dfrac{OA}{OE} = 2$ mà $OA = OC = R$

$\Rightarrow \dfrac{OC}{OE} = 2 \Leftrightarrow OC = 2OE \Rightarrow E$ là trung điểm của OC.

Vậy E là trung điểm của OC thì $MA = 2MB$.

4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME. Chứng minh khi E di chuyển trên OC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME nên I thuộc trung trực của $CE \Rightarrow IC = IE \Rightarrow \Delta ICE$ cân tại I.

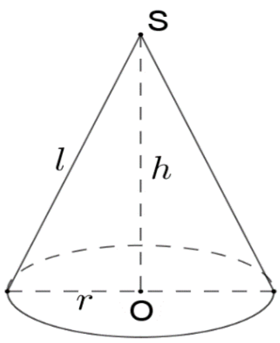
Vì $OC \perp AB \Rightarrow \widehat{AOC} = 90° \Rightarrow \widehat{CME} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2}90° = 45°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) $\Rightarrow \widehat{CIE} = 2\widehat{CME} = 2.45° = 90°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$ của (I)) $\Rightarrow \Delta ICE$ vuông cân tại $I \Rightarrow \widehat{ECI} = 45°$, mà CO cố định nên CI tạo với CO góc $ICE = 45°$ cố định.

Vậy khi E di chuyển trên OC thì I luôn thuộc đường thẳng CI tạo với CO góc $ICE = 45°$ cố định.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 7. Chiếc nón làng Chuông (Thanh Oai – Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30 cm, đường kính 40 cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón.

Lời giải



Với $\pi = 3{,}14$.

Bán kính đáy của nón là: $r = 40:2 = 20(\text{cm})$.

Diện tích xung quanh của nón là:

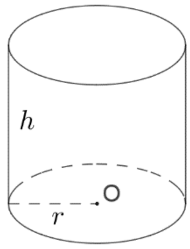
$S_{xq} = \pi rl = \pi.20.30 = 600\pi = 1884(\text{cm}^2)$

Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón nên diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón là: $1884.2 = 3768(\text{cm}^2)$.

Vậy diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón là: 3768cm^2.

Câu 8. Một lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5 cm, độ dài trục là 12 cm. Tính diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó.

Lời giải



Độ dài trục là 12 cm nên $h = 12\text{cm}$.

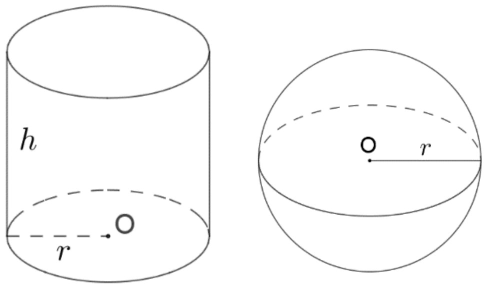
Diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó là:

$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) = 5\pi.12 = 60\pi(\text{cm}^2)$.

Vậy diện tích toàn phần của lon nước hình trụ đó là 60π cm^2.

Câu 9. Một hình trụ có đường kính đáy bằng độ dài trục, một hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của hình trụ nói trên. Hãy so sánh thể tích của hai hình đó.

Lời giải



Gọi bán kính của hình trụ là r.

Khi đó hình trụ có: $h = 2r$ và mặt cầu có bán kính là r

Thể tích của hình trụ là: $V_t = S.h = \pi r^2.2r = 2\pi r^3$.

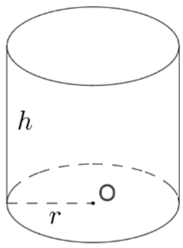
Thể tích của hình cầu là: $V_c = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Do đó: $V_t > V_c$.

Vậy thể tích hình trụ lớn hơn thể tích hình cầu.

Câu 10. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Diện tích xung quanh hình trụ bằng $36\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Tính bán kính đáy hình trụ.

Lời giải



Gọi bán kính của hình trụ là r. Khi đó hình trụ có: $h = 2r$

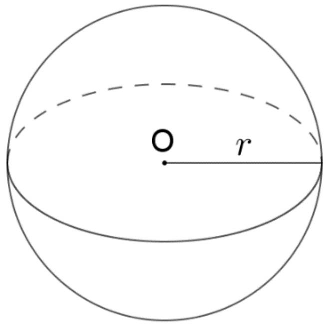
Diện tích xung quanh hình trụ bằng $36\pi\ \text{cm}^2$ nên:

$2\pi rh = 36\pi \Leftrightarrow 2\pi r.2r = 36\pi \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3$ (vì $r > 0$).

Vậy bán kính đáy của hình trụ cần tìm là 3 cm.

Câu 11. Khi bơm căng, một quả bóng hình cầu có đường kính 24 cm. Tính diện tích da dùng làm quả bóng nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt.

Lời giải



Với $\pi = 3{,}14$.

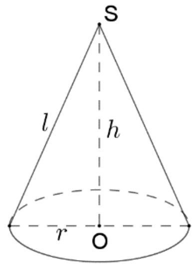
Quả bóng hình cầu có đường kính 24 cm nên diện tích của mặt cầu là:

$S = 4\pi R^2 = \pi d^2 = \pi.24^2 = 576\pi = 1808{,}64\left(\text{cm}^2\right)$.

Vậy diện tích da dùng làm quả bóng (nếu không tính đến tỉ lệ hao hụt) là $1808{,}64\,\text{cm}^2$.

Tính diện tích xung quanh của hình nón có đường sinh bằng 10 cm, đường kính đáy bằng 8

Lời giải



Hình nón có đường kính đáy bằng 8 cm nên bán kính đáy nón là 4 cm.

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$S_{xq} = \pi.r.l = \pi.4.10 = 40\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Vậy hình nón đó có diện tích xung quanh là $40\pi\,\text{cm}^2$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO

Câu 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 4 + 2y^2 + 2xy + 3y = 0$.

Lời giải

Câu 2. Giải phương trình $x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = 2$.

Lời giải

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$.

Lời giải

Câu 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\frac{x}{2} + \frac{8}{y} \le 2$. Tìm GTNN của biểu thức $K = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}$.

Lời giải

Câu 5. Cho x là số thực thỏa mãn $-1 \le x \le \frac{1}{2}$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$M = \frac{x}{2} + \sqrt{1 - x - 2x^2}.$$

Lời giải

Câu 6. Cho $x, y \ge 0; x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $M = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{1+x}$.

Lời giải

$$M=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{1+x}$$

$$M+2=\frac{x+y+1}{y+1}+\frac{y+x+1}{1+x}$$

$$M+2=(x+y+1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{x+1}\right)\geq 2.\frac{4}{x+y+2}=\frac{8}{3}$$

$$M\geq\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+1=y+1\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

Câu 7. Cho $a,b>0;a+b\leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

Lời giải

$$P=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

$$P=a^2+\frac{1}{16a^2}+b^2+\frac{1}{16b^2}+\frac{15}{16}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{16a^2}}+2\sqrt{\frac{b^2}{16b^2}}+\frac{15}{32}\left(\frac{4}{a+b}\right)^2\geq 1+\frac{15}{32}.4=\frac{23}{8}$$

GTNN $P=\frac{23}{8}$ khi $a=b=\frac{1}{2}$

Câu 8. Cho $a,b>0;ab+a\leq 2b$. Tìm GTLN của biểu thức $P=\frac{ab}{a^2+2b^2}$.

Lời giải

Ta có: $2b\geq ab+4\geq 4\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{b}\geq 2\sqrt{a}\Leftrightarrow b\geq 4a\Rightarrow\frac{b}{a}\geq 4$$

ta lại có: $P=\frac{ab}{a^2+2b^2}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{16}\frac{b}{a}\right)+\frac{31}{16}\frac{b}{a}}\leq\frac{1}{2.\sqrt{\frac{1}{16}}+\frac{31}{16}.4}=\frac{4}{33}$

GTLN $P=\frac{4}{33}$ khi $\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$

ᘓHẾTᘐ