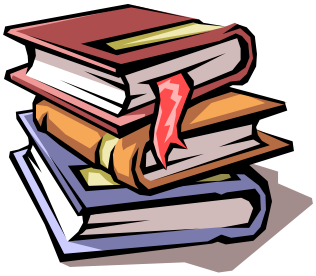
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 MỘT ẨN

Tài liệu sưu tầm, ngày 21 tháng 8 năm 2021

HÀM SỐ $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. HÀM SỐ $Y=Ax^2\left(A\neq 0\right)$

1. Kiến thức trọng tâm

*** Tập xác định của hàm số:**

+ Hàm số $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

*** Tính chất biến thiên của hàm số:**

+ Nếu $a>0$ thì hàm số $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ nghịch biến khi $x<0,$ và đồng biến khi $x>0.$

+ Nếu $a<0$ thì hàm số $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ đồng biến khi $x<0,$ và nghịch biến khi $x>0.$

*** Đồ thị của hàm số:** $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$

+ Đồ thị của hàm số $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy **làm trục đối xứng**. Đường cong đó được gọi là một **Parabol** $\left(P\right)$ **với đỉnh** $O.$

+ Nếu $a>0$ thì $y>0$ với mọi $x\neq 0,$ $y=0$ khi $x=0$. Do đó, đồ thị $\left(P\right)$ nằm phía trên trục hoành $\left(Ox\right)$, đỉnh O là điểm thấp nhất của đồ thị.

+ Nếu $a<0$ thì $y<0$ với mọi $x\neq 0,$ $y=0$ khi $x=0$. Do đó, đồ thị $\left(P\right)$ nằm phía dưới trục hoành $\left(Ox\right)$, đỉnh O là điểm cao nhất của đồ thị.

Vì đồ thị $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ luôn đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng nên để vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một điểm ở bên phải trục Oy rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy

2. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định hàm số bậc hai

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là hàm số bậc hai một ẩn nếu phương trình của hàm số có:

Vậy, để xác định một hàm số là hàm số bậc hai một ẩn phải thỏa mãn điều kiện sau:

+ Hàm số chỉ chứa một ẩn duy nhất, với bậc cao nhất của ẩn là bậc hai.

+ Hàm số có dạng $ax^2+bx+c=0$ với $\left(a\neq 0\right).$

+ Hàm số có dạng $y=ax^2+b$ có hệ số $a\neq 0.$

+ Hàm số có dạng $y=ax^2$ có hệ số $a\neq 0.$

Ví dụ minh họa 1:

Trong các hàm số sau: hàm số nào là hàm số bậc hai một ẩn?

a. $y=\frac{1}{x^2}+3$ b. $y=1+\frac{x^2}{5}$ c. $y=-x^2+\frac{1}{x}$

d. $y=\frac{1}{y^2}+x^2$ e. $y=1+x-x^2$ f. $y=3(x-1)^2$

Hướng dẫn giải:

Các hàm số là hàm số bậc hai một ẩn là: $y=1+\frac{x^2}{5}$ và $y=1+x-x^2$ và

$y=3(x-1)^2=3x^2-6x+3$

Ví dụ minh họa 2:Tìm m để hàm số là hàm số bậc hai một ẩn

a. $y=(m+2)x^2$ b. $y=(m^2-2)x^2$

Hướng dẫn giải:

a. Để hàm số $y=(m+2)x^2$ là hàm số bậc hai khi và chỉ khi: $m+2\neq 0\Leftrightarrow m\neq -2$

b. Để hàm số $y=(m^2-2)x^2$ là hàm số bậc hai khi và chỉ khi:

$$m^2-2\neq 0\Leftrightarrow m^2\neq 2\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \sqrt{2} \\ m\neq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy, với $m\neq \pm\sqrt{2}$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc hai.

Dạng 2. Điểm thuộc đô thị hàm số - Vẽ đồ thị hàm số

* Cho hàm số $y=ax^2\,(a\neq 0)$ có đồ thị là Parabol (P).

+ Điểm M có tọa độ $(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị parabol (P) khi và chỉ khi: $y_0=ax_0^2$

+ Điểm M có tọa độ $(x_0;y_0)$ không thuộc đồ thị parabol (P) khi và chỉ khi: $\Leftrightarrow y_0\neq ax_0^2$

* Vẽ đồ thị hàm số $y=ax^2\,(a\neq 0)$

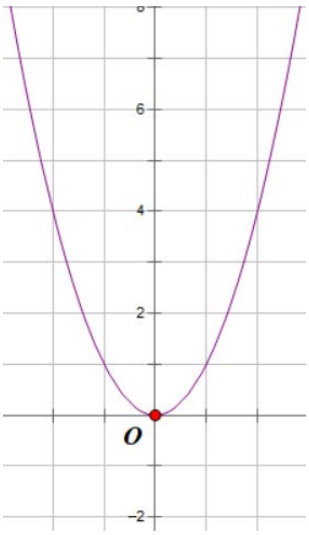
+ Xác định đỉnh của Parabol là góc tọa độ $O(0;0)$.

+ Xác định các điểm thuốc hàm số:

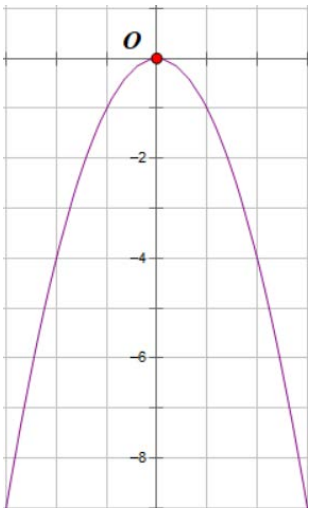
-2	-1	0	1	2
$4a$	a	0	a	$4a$

+ Hình dạng Parabol:

$a > 0$



$a < 0$



Parabol nhận trục tung là trục đối xứng.

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$

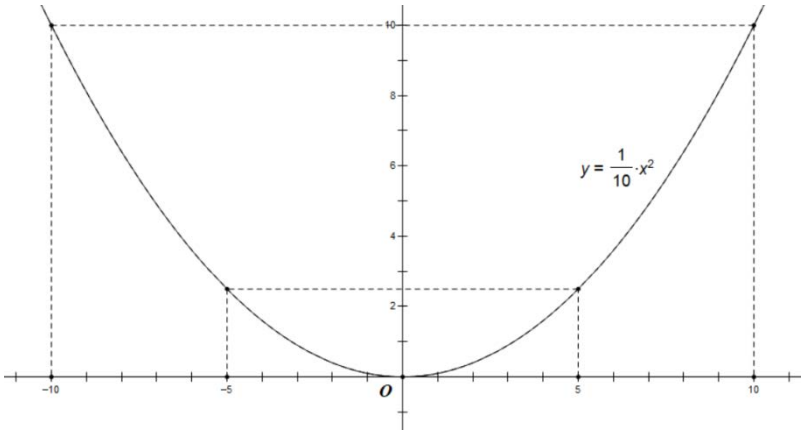
a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b. Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không? $A\left(3;\frac{9}{10}\right), B\left(-5;\frac{5}{2}\right), C(-10;1)$?

Hướng dẫn giải:

a. Hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$ có đồ thị là Parabol (P). Đồ thị (P) có đỉnh là $O(0;0)$, nằm phía trên trục hoành, nhận trục Oy là trục đối xứng và đồ thị đi qua các điểm sau:

x	10	-5	0	5	10
$y = \frac{1}{10}x^2$	10	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	10



b. Thay tạo độ điểm $A\left(3;\dfrac{9}{10}\right)$ vào phương trình Parabol (P): $y=\dfrac{1}{10}x^2$

Ta có: $\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}(3)^2 \Leftrightarrow \dfrac{9}{10}=\dfrac{9}{10}$ (đúng). Vậy điểm A thuộc đồ thị hàm số.

Thay tạo độ điểm $B\left(-5;\dfrac{5}{2}\right)$ vào phương trình Parabol (P): $y=\dfrac{1}{10}x^2$

Ta có: $\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{10}(-5)^2 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}=\dfrac{25}{10} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$ (đúng). Vậy điểm B thuộc đồ thị hàm số.

Thay tạo độ điểm $C(-10;1)$ vào phương trình Parabol (P): $y=\dfrac{1}{10}x^2$

Ta có: $1=\dfrac{1}{10}(-10)^2 \Leftrightarrow 1=\dfrac{100}{10} \Leftrightarrow 1=10$ (Vô lý).

Vậy điểm C không thuộc đồ thị hàm số.

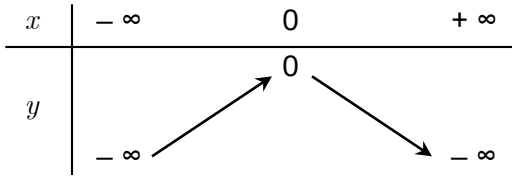
Dạng 3. Sự đồng biến – nghịch biến của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y=ax^2\ (a\neq 0)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

+ Nếu $a>0$: Hàm số $y=ax^2\ (a\neq 0)$ nghịch biến khi $x<0$ và đồng biến khi $x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y=ax^2\ (a\neq 0)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

+ Nếu $a<0$: Học sinh $y=ax^2\ (a\neq 0)$ đồng biến khi $x<0$ và nghịch biến khi $x>0$.



Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $y=\left(m^2-m\right)x^2$. Tính giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với mọi $x>0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x>0$.

Hướng dẫn giải:

a. Hàm số đồng biến với mọi $x>0\Leftrightarrow a>0\Leftrightarrow m^2-m>0\Leftrightarrow m\left(m-1\right)>0$

khi $\begin{cases}m>0\\m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m>1\end{cases}\Leftrightarrow m>1$ hoặc $\begin{cases}m<0\\m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m<1\end{cases}\Leftrightarrow m<0$

Vậy với $m<0$ và $m>1$ thì hàm số đã cho đồng biến với mọi $x>0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x>0\Leftrightarrow a<0\Leftrightarrow m^2-m<0\Leftrightarrow m\left(m-1\right)<0$

khi $\begin{cases}m>0\\m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m<1\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1$ hoặc $\begin{cases}m<0\\m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m>1\end{cases}\Leftrightarrow$ không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện này.

Vậy với $0<m<1$ thì hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x>0$.

Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

* Hàm số $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$

+ Nếu $a>0$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x=0$

+ Nếu $a<0$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 khi $x=0$

* Hàm số $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$

+ Nếu $a>0$ hàm số $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ có giá trị nhỏ nhất khi $x=-\dfrac{b}{2a}$

+ Nếu $a<0$ hàm số $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ có giá trị lớn nhất khi $x=-\dfrac{b}{2a}$

Dạng 5. Viết phương trình Parabol $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ (tìm hệ số a)

Khi biết tọa độ của một điểm thuộc đồ thị hàm số $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$, ta đi tìm hệ số a của nó bằng cách thay toa độ điểm đó vào phương trình hàm số.

Ví dụ minh họa 1. Cho hàm số $y=\left(m^2-m\right)x^2$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;2)$.

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số $y=\left(m^2-m\right)x^2$ đi qua điểm $A(1;2)$

$\Leftrightarrow 2=\left(m^2-m\right)(1)^2 \Leftrightarrow m^2-m=2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$

Vậy, với $m=-1$ hoặc $m=2$ thì đồ thị hàm số đa cho đi qua $A(1;2)$

Ví dụ minh họa 2: Viết phương trình Parabol $y=ax^2$. Biết đồ thị của nó đi qua điểm $M(-2;8)$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình Parabol $y=ax^2$ đi qua điểm $M(-2;8)$

$\Leftrightarrow -8=a(-2)^2 \Leftrightarrow a=-2$

Vậy, hàm số cần tìm là $y=-2x^2$

Dạng 6. Tương giao giữa Parabol với đường thẳng

Cho Parabol $y=ax^2\ (a\neq 0)$ và đường thẳng $y=kx+b$

+ Lập phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2=kx+b\ (1)$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của Parabol với đường thẳng.

+ Tọa độ giao điểm $(x_0;y_0)$ vừa là nghiệm của phương trình $y=ax^2$, vừa là nghiệm của phương trình $y=kx+b$.

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $y=mx^2$ có độ thì là Parabol (P). Tìm giá trị của m biến rằng đồ thị hàm số $y=mx^2$ cắt đường thẳng $(d): y=x-3$ tại điểm có hoành độ bằng 5.

Hướng dẫn giải:

Theo đề, $x_0=5$ và $M\in(d)$ nên ta có: $y_0=x_0-3 \Leftrightarrow y_0=5-3 \Leftrightarrow y_0=2$

Vậy $M(5;2)$. Điểm $M(5;2)\in(P): y=mx^2$

$\Leftrightarrow 2=m(5)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{2}{25}$. Vậy, hàm số cần tìm là $y=\dfrac{2}{25}x^2$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=-3x^2$

a. Lập bảng tính giá trị của hàm số tại các điểm có hoành độ (x) sau: $-2;-1;-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};1;2$

b. Với giá trị nào của x thì hàm số (y) nhận giá trị sau: $0;27;-27;5;-\frac{1}{9};-81;-3$

Bài 2. Cho hàm số $y=(m-4)x^2$. Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với mọi $x>0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x>0$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\left(k^2-2k+3\right)x^2$

a. Xét sự biến thiên của hàm số trên tập xác định của nó?

b. Tìm k biết đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;6)$?

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Cho các điểm sau: $A(0;1);B(2;2);C\left(-3;\frac{5}{2}\right);D\left(-\sqrt{5};\frac{5}{2}\right)$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

Bài 5. Cho hàm số $y=(m+1)x^2$. Xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;9)$

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-4;32)$.

Bài 6. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$

a. Biết điểm $A(-3;m)$ thuộc đồ thị hàm số, tìm m? Hỏi điểm $A'(3;m)$ có thuộc đồ thị hàm số không? Vì sao?

b. Biết điểm $M(k;-9)$ thuộc đồ thị hàm số, tìm k? Hỏi điểm $M'(k;9)$ có thuộc đồ thị hàm số không? Vì sao?

Bài 7. Cho hàm số $y=ax^2$

a. Xác định hàm số biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\sqrt{2};2\right)$

Vẽ đồ thị hàm số với giá trị a vừa tìm được.

b. Biết $B\left(-\sqrt{2};2\right)$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số trong câu a, O là góc tọa độ. Tam giác OAB là tam giác gì? Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 8. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ $\left(P\right)$ và $y=2x-2$

a. Vẽ hai đồ thị hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên.

Bài 9. Cho hàm số $y=-3x^2$

a. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -9

b. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số cách đều hai trục tọa độ.

Bài 10. Cho hàm số $y=kx^2$

a. Xác định k biết đồ thị hàm số có độ thị cắt đường thẳng $y=-3x+4$ tại điểm có hoành độ $x=-2$.

b. Với giá trị k vừa tìm được ở câu a, hãy vẽ đồ thị hàm số $y=kx^2$ và $y=-3x+4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

c. Bằng đồ thị hãy xác định tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=kx^2$ và $y=-3x+4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho hàm số $y=-3x^2$

a. Lập bảng tính giá trị của hàm số tại các điểm có hoành độ $\left(x\right)$ sau:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=-3x^2$	-12	-3	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	-3	-12

b. Với $y=0$, ta có $-3x^2=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Với $y=27$, ta có $-3x^2=27\Leftrightarrow x^2=-9$ không có giá trị x thỏa mãn.

Với $y=-27$, ta có $-3x^2=-27\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm3$.

Với $y=-3$, ta có $-3x^2=-3\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$

Với $y=-\frac{1}{9}$, ta có $-3x^2=-\frac{1}{9}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{27}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Bài 2. Cho hàm số $y=\left(m-4\right)x^2$. Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với mọi $x>0 \Leftrightarrow m-4>0 \Leftrightarrow m>4$

Vậy với $m>4$ thì hàm số đã cho đồng biến với mọi $x>0$

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x>0$.

$\Rightarrow m-4<0 \Leftrightarrow m<4$

Vậy với $m<4$ thì hàm số đã cho nghịch biến với $x>0$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\left(k^2-2k+3\right)x^2$

a. Hàm số $y=\left(k^2-2k+3\right)x^2$ có hệ số $a=k^2-2k+3=\left(k-1\right)^2+2>0$ với mọi giá trị của k.

Do đó, hàm số đã cho nghịch biến khi $x<0$ và đồng biến khi $x>0$.

b.Đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(1;6\right) \Leftrightarrow 6=\left(k^2-2k+3\right)1^2$

$\Leftrightarrow k^2-2k+3=6 \Leftrightarrow k^2-2k-3=0$

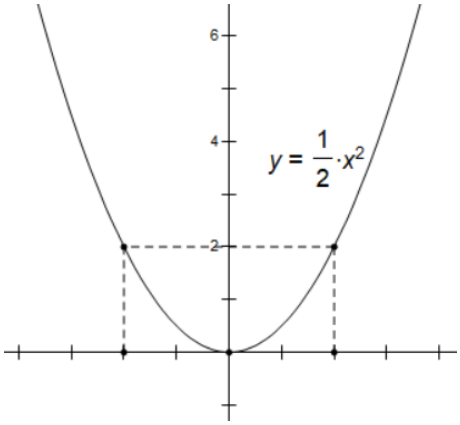
$\Leftrightarrow \left(k+1\right)\left(k-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=3 \end{array}\right.$

Vậy với $k=-1$ hoặc $k=3$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(1;6\right)$

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$

a. Vẽ đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ là Parabol $\left(P\right)$ có đỉnh $O\left(0;0\right)$, nhận trục Oy làm trục đối xứng, và đi qua điểm sau:



x	–2	0	2
$y=\frac{1}{2}x^2$	2	0	2

b. Ta có:

Thay hoành độ điểm $A\left(0;1\right)$ vào hàm số $\frac{1}{2}(0)^2=0\neq y_A=1$

Vậy điểm $A\left(0;1\right)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $B\left(2;2\right)$ vào hàm số $\frac{1}{2}(2)^2=2=y_B$

Vậy điểm $B\left(2;2\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $C\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ vào hàm số $\frac{1}{2}(-3)^2=\frac{9}{2}\neq y_C=\frac{5}{2}$

Vậy điểm $C\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $D\left(-\sqrt{5};\frac{5}{2}\right)$ vào hàm số $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}\right)^2=\frac{5}{2}=y_D$

Vậy điểm $D\left(-\sqrt{5};\frac{5}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

KL: Vậy điểm B và điểm D thuộc đồ thị hàm số.

Bài 5. Cho hàm số $y=(m+1)x^2$. Xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

a. Đồ thị hàm số $y=(m+1)x^2$ đi qua điểm $A(1;9)$

$\Leftrightarrow 9=(m+1)(1)^2\Leftrightarrow m+1=9\Leftrightarrow m=8$

Vậy với $m=8$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;9)$

b. Đồ thị hàm số đi $y=(m+1)x^2$ qua điểm $B(-4;32)$.

$\Leftrightarrow 32=(m+1)(-4)^2\Leftrightarrow 16(m+1)=32$

$\Leftrightarrow m+1=2\Leftrightarrow m=1$

Vậy với $m=1$ thì đồ thị hàm số không đi qua điểm $B(-4;32)$.

Bài 6. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$

a. Viết điểm $A(-3;m)$ thuộc đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$, nên:

$m=-\frac{1}{3}(-3)^2\Leftrightarrow m=-\frac{9}{3}\Leftrightarrow m=-3$

Suy ra tọa độ điểm $A(-3;-3)$ và $A'(3;-3)$ là hai điểm đối xứng nhau qua trục Oy (tính chất đối xứng của học sinh $y=ax^2\ (a\neq 0)$). Mà điểm $A(-3;-3)$ thuộc đồ thị hàm số nên điểm $A'(3;-3)$ cũng thuộc đồ thị hàm số.

b. Điểm $M(k;-9)$ thuộc đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{3}x^2$, nên:

$-9=-\frac{1}{3}(k)^2 \Leftrightarrow k^2=27 \Leftrightarrow k=\pm 3\sqrt{3}$

Với $k=\pm 3\sqrt{3}$ thay vào phương trình hàm số ta được: $y=-\frac{1}{3}\left(\pm 3\sqrt{3}\right)^2=-9\neq y_{M'}$

Do đó điểm $M'\left(k;9\right)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Bài 7. Cho hàm số $y=ax^2$

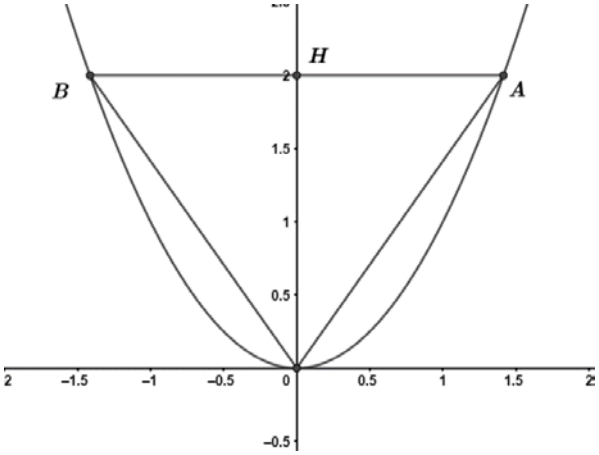
a. Đồ thị hàm số $y=ax^2$ đi qua điểm $A\left(\sqrt{2};2\right) \Leftrightarrow 2=a\left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow a=1$

Vậy $a=1$ và hàm số cần tìm là $y=x^2$

Đồ thị hàm số $y=x^2$ là Parabol có đỉnh $O\left(0;0\right)$ có trục đối xứng Oy

Đồ thị hàm số $y=x^2$ đi qua các điểm

x	-1	0	1
$y=x^2$	1	0	1



b. Điểm $A\left(\sqrt{2};2\right)$ và $B\left(-\sqrt{2};2\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=x^2$

Vì $\begin{cases}x_A=-x_B\\y_A=y_B\end{cases}$ nên hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục Oy.

Do đó, Oy là đường trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra $OA=OB$.

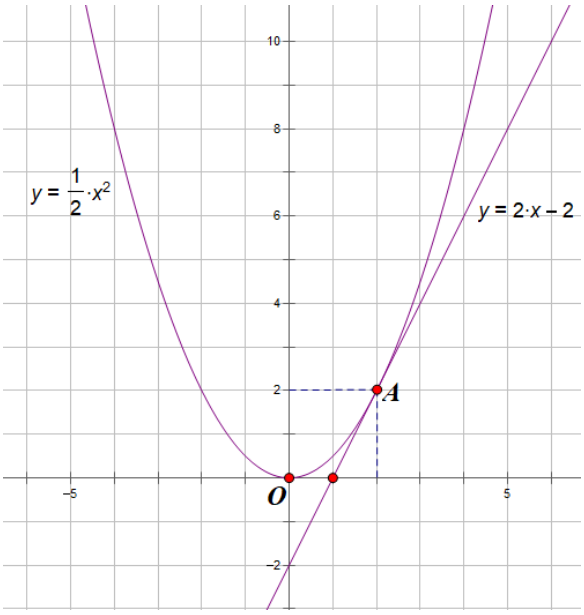
Vậy tam giác OAB là tam giác cân tại O.

Ta có: $OH=\left|y_A\right|=2;\ AB=2\sqrt{2}$

Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{1}{2}.2.2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (đvdt).

Bài 8. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ (P) và $y=2x-2$.

a. * Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ là parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$, có trục đối xứng Oy.



Đồ thị hàm số $y=x^2$ đi qua các điểm sau:

x	-2	0	2
$y=x^2$	2	0	2

* Đồ thị hàm số $y=2x-2$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;-2)$ và $(1;0)$.

b. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2=2x-2\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-2x+2=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Với $x=2\Rightarrow y=2$. Vậy tọa độ giao điểm là $(2;2)$.

Bài 9. Cho hàm số $y=-3x^2$ (P).

a. Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số và có $y_M=-9$

Vì M thuộc (P) nên ta có: $-9=-3x_M^2\Leftrightarrow x_M^2=3\Leftrightarrow x_M=\pm\sqrt{3}$.

Vậy điểm thuộc đồ thị hàm số và có tung độ bằng -9 là: $M_1(-\sqrt{3};-9)$ và $M_2(\sqrt{3};-9)$.

b. Gọi $N(x_N;y_N)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số và có khoảng cách đến các trục tọa độ bằng nhau.

N thuộc đồ thị hàm số nên: $y_N=-3x_N^2$

N có khoảng cách đến hai trục tọa độ bằng nhau nên:

$$|y_N|=|x_N|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_N=x_N\quad(1)\\y_N=-x_N\quad(2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $y_N=x_N\Leftrightarrow-3x_N^2=x_N$

$$\Leftrightarrow x_N(1+3x_N)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_N=0\Rightarrow y_N=0\\x_N=-\frac{1}{3}\Rightarrow y_N=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ta có điểm $(0;0);\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Vậy, các điểm thuộc đồ thị hàm số cách đều hai trục tọa độ là: $(0;0);\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

c. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ.

Điểm $A(x_A;y_A)$ có tung độ gấp 9 lần hoành độ: $y_A=9x_A$.

Điểm A thuộc đồ thị hàm số nên: $y_A=-3x_A^2\Leftrightarrow 9x_A=-3x_A^2$

$$\Leftrightarrow 3x_A(x_A+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=0\Rightarrow y_A=0\\x_A=-3\Rightarrow y_A=-27\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ là: $(0;0);(-3;-27)$.

Bài 10. Cho hàm số $y=kx^2\ \ (P)$.

a. Đồ thị hàm số có cắt đường thẳng $(d):y=-3x+4$ tại điểm cps hoành độ $x=-2$.

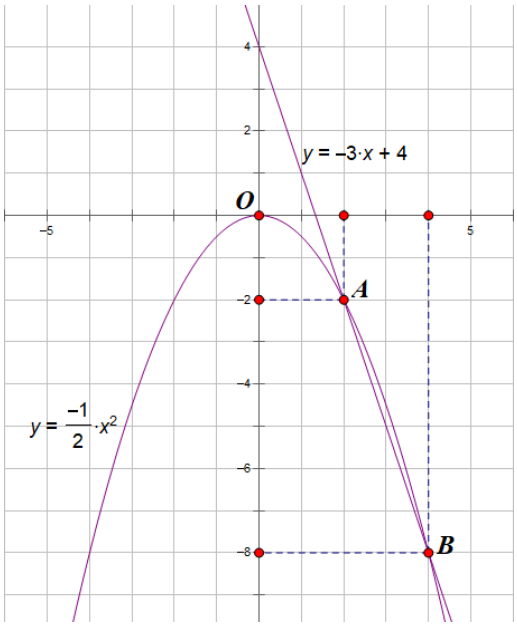
Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ giao điểm của (P) và (d). Theo đề bài ta có $x_0=-2$.

M thuộc đường thẳng (d) nên:

$y_0=-3x_0+4\Leftrightarrow y_0=-3.2+4=-2$

Suy ra $M(-2;-2)$. Thay vào phương trình (P), ta có: $-2=k(-2)^2\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$

Vậy đồ thị hàm số cần tìm là: $y=-\frac{1}{2}x^2$



b. Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2\ \ (P)$ và đường thẳng $(d):y=-3x+4$

Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2\ \ (P)$ là parabol có đỉnh $O(0;0)$, có trụ đối xứng là Oy và đi qua các điểm:

x	-2	0	2
$y=-\frac{1}{2}x^2$	-2	0	-2

- Đồ thị hàm số $y=-3x+4$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;4)$ và $(1;1)$

c. Dựa vào đồ thị ta thấy tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ (P) và đường thẳng $(d): y=-3x+4$ là: $A(2;-2); B(4;-8)$.

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Kiến thức trọng tâm

a. **Phương trình bậc hai một ẩn có dạng:** $ax^2+bx+c=0$ $(*)$ trong đó x là ẩn; a, b, c là các hệ số cho trước với $a\neq 0$.

Cách giải:

+) Nếu $c=0,$ ta có phương trình:

$$ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(ax+b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{b}{a}\end{array}\right.$$

+) Nếu $b=0,$ ta có phương trình: $ax^2+c=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$

Khi $-\frac{c}{a}>0$ thì $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Khi $-\frac{c}{a}<0$ thì phương trình vô nghiệm.

+) Nếu $b\neq 0, c\neq 0$ biến đổi phương trình về dạng $a(x-\alpha)(x-\beta)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha\\x=\beta\end{array}\right.$

b. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai:

Để giải phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

Biệt thức Delta: $\Delta=b^2-4ac$

- Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt**:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$

- Lưu ý: Nếu $a.c<0$ (a,c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

c. Công thức nghiệm thu gọn

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ và $b=2b'$

Tính biệt thức: $\Delta'=b'^2-ac$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

d. Hệ thức Viet và ứng dụng:

+ Định lý Viet: Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

thì tổng và tích của hai nghiệm là: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

+ Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - Sx + P = 0$. (Điều kiện để có hai số đó là: $S^2 - 4P \geq 0$).

e. Cách nhẩm nghiệm của phương trình:

+ Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.

+Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

+ Nếu nhẩm được: $x_1 + x_2 = m + n;\ x_1.x_2 = m.n$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = m, x_2 = n$.

f. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

1. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

2. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

3. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

4. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

5. Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

6. Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

7. Phương trình có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

8. Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

9. Phương trình có hai nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

10. Phương trình có hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$

11. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases}$

12. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$

13. Phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$

g. Các biểu thức thường gặp trong việc giải toán phương trình bậc hai chứa tham số $(\Delta \geq 0)$:

* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$

* $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$

* $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=S^3-3SP$

- $x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2=\left(S^2-2P\right)-2P^2$
- $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}$
- $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}$

Đây là một số biểu thức căn bản nhất, thường xuất hiện trong các bài toán phương trình bậc hai có chứa tham số, nằm trong cấu trúc đề thi vào 10. Do đó, các em cần nắm vững những kiến thức này, để có thể vận dụng thuần thục, giúp biến đổi các loại biểu thức khác để giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn.

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Phương trình bậc hai không chứa tham số

b. Phương trình bậc hai $\left(a\neq 0\right)$ dạng khuyết hạng tử bâc nhất $\left(b=0\right)$, ta có phương trình:

$$ax^2+c=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$

Khi $-\frac{c}{a}>0$ thì $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Khi $-\frac{c}{a}<0$ thì phương trình vô nghiệm

c. Phương trình bậc hai dạng khuyết hạng tử tự do $\left(c=0\right)$, ta có phương trình:

$$ax^2+bx=0\Leftrightarrow x\left(ax+b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{b}{a}\end{array}\right.$$

d. Phương trình bậc hai có đầy đủ các hạng tử $\left(b\neq 0;c\neq 0\right)$:

Ta biến đổi phương trình về dạng: $a\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha\\x=\beta\end{array}\right.$

Ví dụ minh họa 1: Chỉ ra các hệ số a, b, c trong mỗi phương trình, sau đó giải phương trình:

a. $3x^2+5x=0$

b. $x^2-16=0$

c. $x^2-5x+4=0$

d. $x^2+2x-8=0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2+5x=0$, có hệ số $a=3;b=5$ và $c=0$.

$3x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(3x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=0; x=-\dfrac{5}{3}.$

b. Phương trình $x^2-16=0,$ có hệ số $a=1; b=0; c=-16.$

$x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=-4; x=4.$

c. Phương trình $x^2-5x+4=0,$ có hệ số $a=1; b=-5; c=4.$

$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=1; x=4.$

d. Phương trình $x^2+2x-8,$ có hệ số $a=1; b=2; c=-8.$

$x^2+2x-8 \Leftrightarrow (x-2)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=2; x=-4.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2+bx+c=0 (a\neq 0).$ Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c?

a. $3x^2+3x+5=5x+1$

b. $\dfrac{3}{4}x^2-4x-3=3x+\dfrac{1}{3}$

c. $-\sqrt{5}x^2+x-1=\sqrt{5}x+1$

d. $x^2-3(k-2)x-8=1-k^2$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $x^2-5x=0$

b. $2x^2-32=0$

c. $3x^2+4=0$

d. $2x^2+\sqrt{2}x=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng: $f^2(x)=m$ với m là hằng số:

a. $x^2-10x+9=0$

b. $x^2+2x-3=0$

c. $2x^2+2x+7=0$

d. $4x^2-7x+3=0$

Bài 4. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi vế trái về dạng tích của các biểu thức:

a. $x^2-5x+4=0$

b. $x^2+x-6=0$

c. $-3x^2+2x+5=0$

d. $4x^2+24x+9=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2+bx+c=0 (a\neq 0).$ Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c?

a. Phương trình $3x^2+3x+5=5x+1\Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$

có hệ số: $a=3;b=-2;c=4.$

b. Phương trình $\frac{3}{4}x^2-4x-3=3x+\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-7x-\frac{10}{3}=0$

có hệ số: $a=\frac{3}{4};b=-7;c=-\frac{10}{3}.$

c. Phương trình $-\sqrt{5}x^2+x-1=\sqrt{5}x+1\Leftrightarrow -\sqrt{5}x^2+\left(1-\sqrt{5}\right)x-4=0$

có hệ số: $a=-\sqrt{5};b=1-\sqrt{5};c=-4.$

d. Phương trình $x^2-3\left(k-2\right)x-8=1-k^2\Leftrightarrow x^2-3\left(k-2\right)x+k^2-9=0$

có hệ số: $a=1;b=-3\left(k-2\right);c=k^2-9.$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x^2-5x=0\Leftrightarrow x\left(x-5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=0;x=5.$

b. Phương trình $2x^2-32=0\Leftrightarrow 2x^2=32\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm 4$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=-4;x=4.$

c. Phương trình $3x^2+4=0\Leftrightarrow 3x^2=-4$

$VT=3x^2\geq 0$ với mọi x, $VP=-4<0.$ Do đó phương trình $3x^2=-4$ vô nghiệm.

d. Phương trình $2x^2+\sqrt{2}x=0\Leftrightarrow \sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=0;x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng: $f^2\left(x\right)=m$ với m là hằng số:

a. Phương trình $x^2-10x+9=0\Leftrightarrow x^2-10x+25-16=0\Leftrightarrow\left(x-5\right)^2=16\Leftrightarrow\left(x-5\right)^2=4^2=\left(-4\right)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=-4\\x-5=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=9\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=1;x=9.$

b. Phương trình $x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x^2+2x+1-4=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2=4\Leftrightarrow\left(x+1\right)=\left(\pm 2\right)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=-2\\x+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=-3; x=1.$

c. Phương trình $x^2+2x+7=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+6=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=-6$ không có giá trị x thỏa mãn.

Vậy phương trình vô nghiệm.

d. Phương trình $4x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow 4x^2-7x+\frac{49}{16}-\frac{1}{16}=0 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\frac{7}{4}\right)^2=\left(\pm\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{7}{4}=-\frac{1}{4} \\ 2x-\frac{7}{4}=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{3}{2} \\ 2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{4} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x=\frac{3}{4}; x=1.$

Bài 4. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi vế trái về dạng tích của các biểu thức:

a. Phương trình $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=1; x=4.$

b. Phương trình $x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=-3; x=2.$

c. Phương trình $-3x^2+2x+5=0 \Leftrightarrow (-3x+5)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=-1; x=\frac{5}{3}.$

d. Phương trình $4x^2+\left(8-\sqrt{3}\right)x-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left(4x-\sqrt{3}\right)(x+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\sqrt{3}=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{3}}{4} \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=\frac{\sqrt{3}}{4}; x=-2.$

b. Dạng 2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm.

1. Giải phương trình bậc hai bằng công thức nghiệm:

Để giải phương trình: $ax^2+bx+c=0 (a\neq 0)$

* Biệt thức Delta: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt**: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

* Lưu ý: Nếu $a.c < 0$ (a, c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và $b = 2b'$

Tính biệt thức: $\Delta' = b'^2 - ac$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}.$

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ minh họa 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c rồi tính biệt thức delta (Δ) và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2 + 5x + 2 = 0$

b. $x^2 - 5x + 9 = 0$

c. $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$

d. $x^2 + \left(\sqrt{2}+1\right)x - \sqrt{2} = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 + 5x + 2 = 0,$ có hệ số $a = 3; b = 5; c = 2.$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.3.2 = 25 - 24 = 1 > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

e. Phương trình $x^2 - 5x + 9 = 0,$ có hệ số $a = 1; b = -5; c = 9.$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.9 = 25 - 36 = -11 < 0$

Vậy phương trình vô nghiệm.

c. Phương trình $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0,$ có hệ số $a = 2; b = -6; c = \frac{9}{2}.$

d. $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.2.\frac{9}{2} = 36 - 36 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm kép.

d. Phương trình $x^2 + \left(\sqrt{2}+1\right)x - \sqrt{2} = 0,$ có hệ số $a = 1; b = \sqrt{2}+1; c = -\sqrt{2}.$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 4.1.\left(-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh họa 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. $3x^2 - 5x + 8 = 0$ b. $5x^2 - 3x - 2 = 0$

c. $x^2 - 4x + 1 = 0$ d. $3x^2 + 7x + 2 = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 - 5x + 8 = 0$, có hệ số $a = 3; b = -5; c = 8.$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.3.8 = 25 - 96 = -71 < 0$

Vậy phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2 - 3x - 2 = 0$, có hệ số $a = 5; b = -3$ và $c = -2.$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.5.(-2) = 9 + 40 = 49 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) - 7}{2.5} = -\dfrac{2}{5}; x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) + 7}{2.5} = 1$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -\dfrac{2}{5}; x_2 = 1.$

c. Phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$, có hệ số $a = 2; b = -4;$ và $c = 1.$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.1 = 16 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - 2\sqrt{3}}{2.1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) + 2\sqrt{3}}{2.1} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2 - \sqrt{3}; x_2 = 2 + \sqrt{3}.$

d. Phương trình $3x^2 + 7x + 2 = 0$, có hệ số $a = 3; b = 7$ và $c = 2.$

$\Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4.3.2 = 49 - 24 = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7 - 5}{2.3} = -2; x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7 + 5}{2.3} = -\dfrac{1}{3}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -2; x_2 = -\frac{1}{3}.$

Ví dụ minh hoạ 3: Với giá trị nào của m thì:

a. Phương trình $3x^2 + (m+1)x + 5 = 0$ có nghiệm $x = 1.$

b. Phương trình $mx^2 - 4x - 3 = 0$ có nghiệm kép? Tìm nghiệm đó.

c. Phương trình $-x^2 + 2mx - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Hướng dẫn giải

a. Phương trình $3x^2 + (m+1)x + 5 = 0$ có nghiệm $x = 1$

Thay $x = 1$ vào phương trình đã cho:

$3.1^2 + (m+1).1 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 + m + 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -9$

Vậy, với $m = -9$ thì phương trình có nghiệm $x = 1.$

b. Phương trình $mx^2 - 4x - 3 = 0$

Với hệ số $a = m, \Delta = (-4)^2 - 4.m.(-3) = 16 + 12m.$

Để phương trình có nghiệp kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16 + 12m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$

Với $m = -\frac{4}{3}$ thì phương trình có nghiệm kép, và

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.m} = -\frac{(-4)}{2.\left(-\frac{4}{3}\right)} = -\frac{3}{2}.$

c. Phương trình $-x^2 + 2mx - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Với hệ số $a = -1, \Delta = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4.(-1).(-1) = 4m^2 - 4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 0 \\ 4m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 0 \\ m^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$

Vậy, với $m>1$ hoặc $m<-1$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh hoạ 4: Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a,c trái dấu.

Áp dụng: Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có mấy nghiệm:

a. $\left(1+\sqrt{2}\right)x^2-2x-\sqrt{3}=0$

b. $5x^2-3mx-1-m^2=0.$

Hướng dẫn giải

a. Phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ có $\Delta=b^2-4ac.$

Khi a,c trái dấu thì $a.c<0,$ suy ra $-ac>0,$ do đó $-4ac>0$

Mặt khác: $b^2\geq 0$ với mọi $b.$

Vì vậy, $\Delta=b^2-4ac>0.$

Vậy, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a,c trái dấu.

Điều này cũng đúng khi chứng minh với $\left(\Delta'\right).$

Áp dụng:

a. Phương trình $\left(1+\sqrt{2}\right)x^2-2x-\sqrt{3}=0$ có hệ số $a=1+\sqrt{2}>0$, hệ số $c=-\sqrt{3}<0$

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $5x^2-3mx-1-m^2=0$ có hệ số $a=5>0$, hệ số $c=-1-m^2<0$ với mọi m.

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh hoạ 5: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn.

a. $3x^2-5x+8=0$

b. $5x^2-3x-2=0$

c. $x^2-4x+1=0$

d. $3x^2+7x+2=0$

Hướng dẫn giải

a. Phương trình $3x^2-5x+8=0$, có hệ số $a=3;b=-5\Rightarrow b'=-\frac{5}{2};$ và $c=8.$

$$\Delta'=\left(b'\right)^2-ac=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-3.8=\frac{25}{4}-24=-\frac{71}{4}<0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2-3x-2=0$, có hệ số $a=5;b=-3\Rightarrow b'=-\frac{3}{2};$ và $c=-2.$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5.(-2) = \frac{9}{4} + 10 = \frac{49}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \frac{7}{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2}}{5} = -\frac{2}{5}; x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{7}{2}}{5} = 1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -\frac{2}{5}; x_2 = 1.$

c. Phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$, có hệ số $a = 1; b = -4 \Rightarrow b' = -2;$ và $c = 1$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (-2)^2 - 1.1 = 3 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{3}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-2) - \sqrt{3}}{1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3};$$

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-2) + \sqrt{3}}{1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2 - \sqrt{3}; x_2 = 2 + \sqrt{3}.$

d. Phương trình $3x^2 + 7x + 2 = 0$, có hệ số $a = 3; b = 7 \Rightarrow b' = \frac{7}{2};$ và $c = 2.$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3.2 = \frac{49}{4} - 6 = \frac{25}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \frac{5}{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{5}{2}}{3} = -2; x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\frac{7}{2} + \frac{5}{2}}{3} = -\frac{1}{3}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -2; x_2 = -\frac{1}{3}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của phương trình. Tính biệt thức delta Δ và cho biết số nghiệm của phương trình:

a. $x^2 - 5x + 1 = 0$

b. $2x^2 - 9x + 10 = 0$

c. $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d. $-x^2 + 6x - 9 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. $x^2-8x+17=0$

b. $\frac{1}{2}x^2-5x-3=0$

c. $-x^2+\sqrt{5}x-1=0$

d. $5x^2+\sqrt{3}x-2=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. $3x^2+\sqrt{2}x-3+\sqrt{2}=0$

b. $5x^2-5\sqrt{2}x+\frac{5}{2}=0$

c. $x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

d. $x^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}=0$

Bài 4. Với giá trị nào của k thì các phương trình sau có nghiệm kép? Tính nghiệm kép đó.

a. $x^2-10x+k+2=0$

b. $x^2+kx-3=0$

c. $x^2+2kx+7-k=0$

d. $x^2-(k+1)x-1=0$

Bài 5. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau vô nghiệm?

a. $3x^2+2mx+4=0$

b. $x^2+2x+m=0$

c. $-3x^2+mx+2=0$

d. $-x^2+(m-2)x+9=0$

Bài 6. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt?
Tính nghiệm của phương trình theo m.

a. $4x^2-mx-15=0$

b. $x^2-8x+4m^2=0$

c. $4x^2+3x+m-1=0$

d. $3x^2-2(m-1)x+3=0$

Bài 7. Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình:

a. $x^2-6x+8=0$

b. $2x^2-9x-5=0$

c. $x^2+5x-14=0$

d. $-x^2+4x+12=0$

Bài 8. Giải các phương trình sau, nghiệm gần đúng chính xác đến chữ số thập phân thứ hai:

a. $x^2-4x+2=0$

b. $x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$

c. $x^2+7x-2=0$

d. $-x^2+7x-5=0$

Bài 9. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau:

a. Phương trình $2x^2+mx-6=0$ có nghiệm $x=-2.$

b. Phương trình $(m-5)x^2-x+2=0$ có nghiệm $x=2.$

Bài 10. Với giá trị nào của x hai hàm số sau có giá trị bằng nhau:

a. $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ và $y=2x$

b. $y=x^2-2$ và $y=3x+2$

Bài 11. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm kép:

a. $x^2-4x+m=0$

b. $2x^2+mx+1=0$

c. $2x^2-2(m-4)x+m^2+m+3=0$

d. $mx^2-4x+4m=0$

Bài 12. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt?

a. $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$

b. $x^2-mx+m+3=0$

c. $-x^2+2mx+3=0$

d. $-x^2+9x+12m=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của các phương trình. Tính biệt thức delta Δ và cho biết số nghiệm của phương trình:

a. Phương trình $x^2-5x+1=0$, có hệ số $a=1;b=-5$ và $c=1$

$\Delta=(-5)^2-4.1.1=25-4=21>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $2x^2-9x+10=0$, có hệ số $a=2;b=-9$ và $c=10$

$\Delta=(-9)^2-4.2.10=81-80=1>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Phương trình $2x^2+7x+3=0$, có hệ số $a=2;b=7$ và $c=3$

$\Delta=(7)^2-4.2.3=49-24=25>0$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

d. Phương trình $-x^2+6x-9=0$, có hệ số $a=-1;b=6$ và $c=-9$

$\Delta=(6)^2-4.(-1)(-9)=36-36=0$

Vậy, phương trình có nghiệm kép.

Bài 2. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $x^2-8x+17=0$, có hệ số $a=1;b=-8$ và $c=17$

$\Delta=(-8)^2-4.1.17=64-68=-4<0$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $\frac{1}{2}x^2-5x-3=0$, có hệ số $a=\frac{1}{2};b=-5$ và $c=-3$

$\Delta = (-5)^2 - 4.\frac{1}{2}.(-3) = 25 + 6 = 31 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{31}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{31}}{2.\frac{1}{2}} = 5 - \sqrt{31}$; và $x_2 = \frac{5 + \sqrt{31}}{2.\frac{1}{2}} = 5 + \sqrt{31}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 5 - \sqrt{31}; x_2 = 5 + \sqrt{31}.$

c. Phương trình $-x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$, có hệ số $a = -1; b = \sqrt{5}$ và $c = -1.$

$\Delta = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4.(-1).(-1) = 5 - 4 = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{-\left(\sqrt{5}\right) - 1}{2.(-1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; x_2 = \frac{-\left(\sqrt{5}\right) + 1}{2.(-1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$

d. Phương trình $5x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$, có hệ số $a = 5; b = \sqrt{3}$ và $c = -2$

$\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4.5.(-2) = 3 + 40 = 43 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{43}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{-\left(\sqrt{3}\right) - \sqrt{43}}{2.5} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{43}}{10}; x_2 = \frac{-\left(\sqrt{3}\right) + \sqrt{43}}{2.5} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{43}}{10}$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{43}}{10}; x_2 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{43}}{10}$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $3x^2 + \sqrt{2}x - 3 + \sqrt{2} = 0$ có

$\Delta = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4.3.\left(-3 + \sqrt{2}\right) = 2 + 36 - 12\sqrt{2} = \left(6 - \sqrt{2}\right)^2 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6 - \sqrt{2}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\left(\sqrt{2}\right)-\left(6-\sqrt{2}\right)}{2.3} = \frac{-6}{6} = -1;$$

$$x_2 = \frac{-\left(\sqrt{2}\right)+\left(6-\sqrt{2}\right)}{2.3} = \frac{6-2\sqrt{2}}{6} = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$.

b. Phương trình $5x^2 - 5\sqrt{2}x + \frac{5}{2} = 0$ có:

$$\Delta = \left(-5\sqrt{2}\right)^2 - 4.5.\frac{5}{2} = 50 - 50 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-\left(-5\sqrt{2}\right)}{2.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. Phương trình $x^2 - \left(1-\sqrt{3}\right)x - \sqrt{3} = 0$ có:

$$\Delta = \left[-\left(1-\sqrt{3}\right)\right]^2 - 4.1.\left(-\sqrt{3}\right) = 4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = 1+\sqrt{3}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\left[-\left(1-\sqrt{3}\right)\right]-\left(1+\sqrt{3}\right)}{2.1} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3};$$

$$x_2 = \frac{-\left[-\left(1-\sqrt{3}\right)\right]+\left(1+\sqrt{3}\right)}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x_1 = -\sqrt{3}$ và $x_2 = 1$.

d. Phương trình $x^2 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0$ có:

$$\Delta = \left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]^2 - 4.1.\left(-\sqrt{6}\right) = 5 - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} > 0$$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-\left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2.1} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2};$

$x_2 = \dfrac{-\left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2.1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x_1 = -\sqrt{2}$ và $x_2 = \sqrt{3}.$

Bài 4. Tìm m để phương trình có nghiệm kép

a. Phương trình $x^2 - 10x + k + 2 = 0$ có:

$\Delta = (-10)^2 - 4.1.(k+2) = 100 - 4k - 8 = 92 - 4k$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 92 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 23$

Vậy, với $k = 23$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 5.$

b. Phương trình $x^2 + kx - 3 = 0$ có:

$\Delta = k^2 - 4.1.(-3) = k^2 + 12 > 0$ với mọi $k.$ Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị k thoả mãn điều kiện bài toán.

c. Phương trình $x^2 + 2kx + 7 - k = 0$ có:

$\Delta = (2k)^2 - 4.1.(7-k) = 4k^2 + 4k - 28.$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k - 28 = 0 (*)$

Giải phương trình $4k^2 + 4k - 28 = 0 (*)$ ta được $k = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}; k = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}.$

Vậy, với $k = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}.$

Với $k = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}.$

d. Phương trình $x^2 - (k+1)x - 1 = 0$ có:

$\Delta = \left[-(k+1)\right]^2 - 4.1.(-1) = (k+1)^2 + 4 > 0$ với mọi k.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi k.

Vậy, không có giá trị thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 5. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm.

a. Phương trình $3x^2+2mx+4=0$ có:

$\Delta=(2m)^2-4.1.4=4m^2-16$

Để phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 4m^2-16<0 \Leftrightarrow m^2<4 \Leftrightarrow -2<m<2$

Vậy, với $-2<m<2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b. Phương trình $x^2+2x+m=0$ có:

$\Delta=2^2-4.1.m=4-4m$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 4-4m<0 \Leftrightarrow 4m>4 \Leftrightarrow m>1$

Vậy, với $m>1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

c. Phương trình $-3x^2+mx+2=0$ có:

$\Delta=(m)^2-4.(-3).2=m^2+24>0$ với mọi m.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị m thoả mãn để phương trình vô nghiệm.

d. Phương trình $-x^2+(m-2)x+9=0$ có:

$\Delta=(m-2)^2-4.(-1).9=(m-2)^2+36>0$ với mọi m.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị m thoả mãn để phương trình vô nghiệm.

Bài 6.

a. Phương trình $4x^2-mx-15=0$ có:

$\Delta=(-m)^2-4.1.(-15)=m^2+60>0$ với mọi m.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m, với:

$x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2+60}}{8}; x_2=\dfrac{m+\sqrt{m^2+60}}{8}.$

b. Phương trình $x^2-8x+4m^2=0$ có:

$\Delta=(-8)^2-4.1.(4m^2)=64-16m^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 64-16m^2>0 \Leftrightarrow 16m^2<64 \Leftrightarrow m^2<4 \Leftrightarrow -2<m<2$

Vậy, với $-2<m<2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{8-\sqrt{64-16m^2}}{2}=4-2\sqrt{4-m^2};$$

$$x_2=\frac{8+\sqrt{64-16m^2}}{2}=4+2\sqrt{4-m^2}$$

c. Phương trình $4x^2+3x+m-1=0$ có:

$$\Delta=3^2-4.4.(m-1)=25-16m$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 25-16m>0 \Leftrightarrow 16m<25 \Leftrightarrow m<\frac{25}{16}$$

Vậy, với $m<\frac{25}{16}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{25-16m}}{8};\quad x_2=\frac{-3+\sqrt{25-16m}}{8}.$$

d. Phương trình $3x^2-2(m-1)x+3=0$ có:

$$\Delta=\left[-2(m-1)\right]^2-4.3.3=4(m-1)^2-36$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2-36>0 \Leftrightarrow (m-1)^2>\frac{36}{4}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2>9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1>3 \\ m-1<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-2 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m>4$ hoặc $m<-2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{2(m-1)-\sqrt{4(m-1)^2-36}}{6}=\frac{m-1-\sqrt{(m-1)^2-9}}{3}$$

$$x_2=\frac{2(m-1)+\sqrt{4(m-1)^2-36}}{6}=\frac{m-1+\sqrt{(m-1)^2-9}}{3}.$$

Bài 7. Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình:

a. Phương trình $x^2-6x+8=0$ có các hệ số $a=1;b'=-3;c=8.$

$$\Delta'=(-3)^2-1.8=1>0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{3-1}{1}=2; x_2=\frac{3+1}{1}=4.$

b. Phương trình $2x^2-9x-5=0$ có các hệ số $a=2; b'=-\frac{9}{2}; c=-5.$

$\Delta'=\left(-\frac{9}{2}\right)^2-2.(-5)=\frac{81}{4}+10=\frac{121}{4}>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{\frac{9}{2}-\frac{11}{2}}{2}=-\frac{1}{2}; x_2=\frac{\frac{9}{2}+\frac{11}{2}}{2}=5.$

c. Phương trình $x^2+5x-14=0$ có các hệ số $a=1; b'=\frac{5}{2}; c=-14.$

$\Delta'=\left(\frac{5}{2}\right)^2-1.(-14)=\frac{25}{4}+14=\frac{81}{4}>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}}{1}=-7; x_2=\frac{-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{1}=2.$

d. Phương trình $-x^2+4x+12=0$ có các hệ số $a=-1; b'=2; c=12.$

$\Delta'=(2)^2-(-1).12=4+12=16>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{-2-4}{-1}=6; x_2=\frac{-2+4}{-1}=-2.$

Bài 8. Học sinh tự xác định các hệ số a, b', c và sử dụng công thức nghiệm thu gọn để tính nghiệm của các phương trình.

a. Phương trình $x^2-4x+2=0$ có hai nghiệm:

$x_1=2-\sqrt{2}\approx 0,59;$ và $x_2=2+\sqrt{2}\approx 3,41.$

b. Phương trình $x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$ có hai nghiệm:

$x_1=\sqrt{3}\approx 1,73;$ và $x_2=1.$

c. Phương trình $x^2+7x-2=0$ có hai nghiệm:

$x_1=\frac{-7+\sqrt{57}}{2}\approx 0,27;$ và $x_2=\frac{-7-\sqrt{57}}{2}\approx -7,27.$

d. Phương trình $-x^2+7x-5=0$ có hai nghiệm:

$x_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{2} \approx 6{,}19;$ và $x_2 = \frac{7-\sqrt{29}}{2} \approx 0{,}81.$

Bài 9.

a. Phương trình $2x^2 + mx - 6 = 0$ có nghiệm $x = -2.$

$\Leftrightarrow 2(-2)^2 + m(-2) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Khi $m = 1,$ ta có phương trình $2x^2 + x - 6 = 0$ có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}; x = -2.$

b. Phương trình $(m-5)x^2 - x + 2 = 0$ có nghiệm $x = 2.$

$\Leftrightarrow (m-5)2^2 - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Khi $m = 5$, ta có phương trình $-x + 2 = 0$ có một nghiệm $x = 2.$

Bài 10.

a. Hai hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ và $y = 2x$ có giá trị bằng nhau khi và chỉ khi x là nghiệm của phương trình: $-\frac{1}{2}x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

Giải phương trình ta được nghiệm $x = -2 - \sqrt{6}; x = -2 + \sqrt{6}$.

Vậy, với $x = -2 - \sqrt{6}; x = -2 + \sqrt{6}$ thì hai hàm số đã cho có giá trị bằng nhau.

b. Hai hàm số $y = x^2 - 2$ và y = 3x + 2 có giá trị bằng nhau khi và chỉ khi x là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

Giải phương trình ta được nghiệm $x = -1; x = 4$.

Vậy, với $x = -1; x = 4$ thì hai hàm số đã cho có giá trị bằng nhau.

Bài 11.

a. Phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Với $\Delta' = (-2)^2 - 1.m = 4 - m$. Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$

Vậy, với $m = 4$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

b. Phương trình $2x^2 + mx + 1 = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

Với $\Delta = m^2 - 4.2.1 = m^2 - 8$.

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq 0 \\ m^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$

Vậy, với $m = \pm 2\sqrt{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

c. Phương trình $2x^2 - 2(m-4)x + m^2 + m + 3 = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Với $\Delta' = [-(m-4)]^2 - 2.(m^2 + m + 3) = m^2 - 8m + 16 - 2m^2 - 2m - 6$

$\Delta' = -m^2 - 10m + 10$

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq 0 \\ -m^2 - 10m + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -5 - \sqrt{35} \\ m = -5 + \sqrt{35} \end{array} \right.$

Vậy, với $m = -5 - \sqrt{35}$ hoặc $m = -5 + \sqrt{35}$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

d. Phương trình $mx^2 - 4x + 4m = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Với $\Delta' = (-2)^2 - m.4m = 4 - 4m^2$

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - 4m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array} \right.$

Vậy, với $m = 1; m = -1$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

Bài 12. Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt?

a. Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Với $\Delta' = (m+1)^2 - 1.(m^2 + 2) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - 2 = 2m - 1$

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

Vậy, với $m > \dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Với $\Delta = (-m)^2 - 4.1.(m+3) = m^2 - 4m - 12 = (m-6)(m+2)$

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m-6)(m+2) > 0 \end{cases}$ *(Điều kiện $A.B > 0$ Tập 1 – Chương 1)*

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-6>0\\m+2>0\end{cases}\\\begin{cases}m-6<0\\m+2<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>6\\m>-2\end{cases}\\\begin{cases}m<6\\m<-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>6\\m<-2\end{array}\right.$$

Vậy, với $m>6$ hoặc $m<-2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

c. Phương trình $-x^2+2mx+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 0\\\Delta'>0\end{cases}$

Với $\Delta'=m^2-(-1).3=m^2+3>0$ với mọi giá trị của m và hệ số $a=-1\neq 0$.

Vậy, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

d. Phương trình $-x^2+9x+12m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 0\\\Delta>0\end{cases}$

Với $\Delta=9^2-4.(-1).12m=81+48m$

Suy ra $\begin{cases}a\neq 0\\\Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\neq 0\\81+48m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{-81}{48}$

Vậy, với $m>\dfrac{-81}{48}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

c. Dạng 3. Ứng dụng hệ thức Viét

Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số

+ **Định lí Viét**: nếu $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ thì tổng và tích của hai nghiệm là:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}\\P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

Giải phương trình bằng phương pháp tính nhẩm nghiệm

Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có các hệ số thỏa mãn:

+ Trường hợp: $a+b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=1;x_2=\dfrac{c}{a}$.

+ Trường hợp: $a-b+c=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=-1;x_2=-\dfrac{c}{a}$.

Tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm $x_1;x_2$ của phương trình

Để làm dạng toán này các em cần nhớ một số biểu thức sau:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$
- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$
- $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$

4. Lập phương trình bậc hai khi biết tổng và tích hai nghiệm của phương trình:

Nếu u và v là hai số cần tìm có $\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$. (Điều kiện để có hai số đó là: $S^2 - 4P \geq 0$).

Ví dụ minh họa 1: Không giải phương trình, dung hệ thức Viét hãy tính tổng và tích các nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $3x^2 - 11x + 4 = 0$ b) $x^2 - 3\sqrt{7}x + 2\sqrt{3} = 0$

c) $2x^2 - 8x + 8 = 0$ d) $7x^2 - 4x + 1 = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 - 11x + 4 = 0$ có: $\Delta = (-11)^2 - 4.3.4 = 121 - 48 = 73 > 0$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{11}{3}; x_1.x_2 = \frac{4}{3}$.

b. Phương trình $x^2 - 3\sqrt{7}x + 2\sqrt{3} = 0$ có: $\Delta = (-3\sqrt{7})^2 - 4.1.2\sqrt{3} = 63 - 8\sqrt{3} > 0$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 3\sqrt{7}; x_1.x_2 = 2\sqrt{3}$.

c. Phương trình $2x^2 - 8x + 8 = 0$ có: $\Delta' = (-4)^2 - 2.8 = 16 - 16 = 0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm kép $x_1 = x_2$.

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 4; x_1.x_2 = 4$.

d. Phương trình $7x^2 - 4x + 1 = 0$ có: $\Delta' = (-2)^2 - 7.1 = 4 - 7 = -3 < 0$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ minh họa 2:

a. Chứng tỏ rằng phương trình $7x^2-3x-54=0$ có một nghiệm là 3. Tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $4x^2+3x+m^2-5=0$. Biết phương trình có nghiệm $x=-1$, hãy dùng hệ thức Viét để tìm nghiệm còn lại của phương trình, từ đó tính giá trị của m.

Hướng dẫn giải:

a. Thay $x_1=3$ vào phương trình $7x^2-3x-54=0$ được:

$7.3^2-3.3-54=63-9-54=0$ nên $x_1=3$ là một nghiệm của phương trình.

Theo định lí Viét, ta có: $x_1+x_2=\frac{3}{7}\Leftrightarrow 3+x_2=\frac{3}{7}\Leftrightarrow x_2=\frac{3}{7}-3\Leftrightarrow x_2=\frac{-18}{7}$.

b. Phương trình $4x^2+3x+m^2-5=0$ có nghiệm $x_1=-1$.

Áp dụng hệ thức Viét ta có: $x_1+x_2=\frac{-3}{4}\Leftrightarrow -1+x_2=\frac{-3}{4}\Leftrightarrow x_2=\frac{-3}{4}+1\Leftrightarrow x_2=\frac{1}{4}$

Cũng theo hệ thức Viét ta có:

$$x_1.x_2=\frac{m^2-5}{4}\Leftrightarrow \frac{1}{4}.(-1)=\frac{m^2-5}{4}\Leftrightarrow -1=m^2-5\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2$$

Vậy, với $m=2$ hoặc $m=-2$ thì phương rình đã cho có nghiệm $x=-1$.

Ví dụ minh họa 3:

Cho phương trình $3x^2+5x-6=0$ có nghiệm $x_1;x_2$. Không tính giá trị của $x_1;x_2$ hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là u và v.

Biết $u=x_1+\frac{1}{x_2}$ và $v=x_2+\frac{1}{x_1}$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình $3x^2+5x-6=0$ có hệ số $a=3>0;c=-6<0$. Do đó tích $ac<0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Viét, ta có: $x_1+x_2=\frac{-5}{3}$; $x_1.x_2=-2$. Khi đó:

$u+v=x_1+\frac{1}{x_2}+x_2+\frac{1}{x_1}$ $u.v=\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right).\left(x_2+\frac{1}{x_1}\right)$

$=(x_1+x_2)+\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}\right)$ $=x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}+2$ và

$=(x_1+x_2)+\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)$ $=-2+\frac{1}{-2}+2$

$=\frac{-5}{3}+\frac{5}{6}=\frac{-5}{6}$ $=\frac{-1}{2}$

Vậy, u và v là nghiệm của phương trình: $X^2+\frac{5}{6}X-\frac{1}{2}=0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không giải phương trình, hãy dùng hệ thức Viét, tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình sau:

a. $2x^2+5x+3=0$

b. $3x^2-11x+4=0$

c. $x^2+2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$

$(\sqrt{7}-\sqrt{3})x^2+2x+\sqrt{7}+\sqrt{3}=0$

Bài 2. Dùng điều kiện $a+b+c=0$, hoặc $a-b+c=0$ để nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $3x^2-4x+1=0$

b) $-4x^2-3x+7=0$

c) $x^2+(1+\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0$

d) $3x^2-(3+\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0$

e) $(\sqrt{3}-2)x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}+2=0$

f) $(5-\sqrt{2})x^2-10x+5+\sqrt{2}=0$

Bài 3. a. Cho phương trình $2x^2+5x+2=0$. Biết phương trình có một nghiệm $x=-2$. Sử dụng định lí Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $-3x^2+5x+12=0$. Chứng tỏ phương trình có một nghiệm x = 3. Sử dụng định lí Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

Bài 4. Hãy sử dụng hệ thức Vi ét để tìm nghiệm còn lại và tham số m trong mỗi phương trình sau:

a. Phương trình $3x^2-10x+3m+1=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=\frac{7}{3}$.

b. Phương trình $4x^2-2x+m-3=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=3$.

c. Phương trình $x^2-8x+2m^2+7=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=5$.

Bài 5. Tìm hai số u, v trong mỗi trường hợp sau:

a. $u+v=29$ và $u.v=198$

b. $u+v=3\sqrt{2}$ và $u.v=4$

c. $u-v=-2$ và $u.v=80$

d. $u^2+v^2=13$và $u.v=6$

Bài 6. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

a. 5 và 2

b. 7 và 9

c. 3 và $\frac{1}{4}$

d. -5 và $\frac{1}{5}$

e. $\sqrt{5}-1$ và $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

f. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Bài 7. Cho phương trình $x^2-5x+6=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}$

b. $B=x_1^{\,3}+x_2^{\,3}$

c. $C=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

d. $D=\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}$

Bài 8. Cho phương trình $2x^2-7x+6=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Không giải phương trình, hãy lập phương trình có hai nghiệm là hai số được cho trong mỗi trường hợp sau:

a. $u=\frac{1}{x_1};\text{v}=\frac{1}{x_2}$

b. $u=1+x_1;\text{v}=1+x_2$

Bài 9. Cho phương trình $x^2-12x+m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện sau:

a. $x_1-x_2=-2$

b. $x_1=\frac{3}{2}x_2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a. Phương trình $2x^2+5x+3=0$ có $\Delta=5^2-4.2.3=25-24=1>0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1+x_2=\frac{-5}{2}; x_1.x_2=\frac{3}{2}$.

b. Phương trình $3x^2-11x+4=0$ có $\Delta=11^2-4.3.4=121-48=73>0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1+x_2=\frac{11}{3}; x_1.x_2=\frac{4}{3}$.

c. Phương trình $x^2+2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ có

$\Delta'=(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}=4+\sqrt{3}>0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1+x_2=-2(1+\sqrt{3}); x_1.x_2=\sqrt{3}$.

d. Phương trình $(\sqrt{7}-\sqrt{3})x^2+2x+\sqrt{7}+\sqrt{3}=0$ có

$\Delta=2^2-4(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})=4-4(7-3)=-12<0$. Phương trình vô nghiệm.

Bài 2. Dùng điều kiện $a+b+c=0$, hoặc $a-b+c=0$ để nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. Phương trình $3x^2-4x+1=0$ có $a+b+c=3+(-4)+1=0$

Nên có nghiệm $x=1$ và $x=\frac{1}{3}$.

b. Phương trình $-4x^2-3x+7=0$ có $a+b+c=(-4)+(-3)+7=0$

Nên có nghiệm $x=1$ và $x=\frac{-7}{4}$.

c. Phương trình $x^2+(1+\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0$ có $a-b+c=1-(1+\sqrt{5})+\sqrt{5}=0$

Nên có nghiệm $x=-1$ và $x=\sqrt{5}$.

d. Phương trình $3x^2-(3+\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0$ có $a+b+c=3-(3+\sqrt{5})+\sqrt{5}=0$

Nên có nghiệm $x=1$ và $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

e. Phương trình $(\sqrt{3}-2)x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}+2=0$ có

$a-b+c=\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}+2=0$

Nên có nghiệm $x=-1$ và $x=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$.

f. Phương trình $(5-\sqrt{2})x^2-10x+5+\sqrt{2}=0$ có

$a+b+c=5-\sqrt{2}+(-10)+5+\sqrt{2}=0$

Nên có nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$.

Bài 3.

a. Cho phương trình $2x^2+5x+2=0$. Phương trình có nghiệm $x=-2$. Áp dụng định lí Vi ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{-5}{2}\Leftrightarrow -2+x_2=\dfrac{-5}{2}\Leftrightarrow x_2=\dfrac{-1}{2}$.

b. Cho phương trình $-3x^2+5x+12=0$. Phương trình có nghiệm x = 3. Áp dụng định lí Vi ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow 3+x_2=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow x_2=\dfrac{-1}{3}$.

Bài 4.

a. Phương trình $3x^2-10x+3m+1=0$. Phương trình có nghiệm $x_1=\dfrac{7}{3}$.

Áp dụng định lí Vi ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow\dfrac{7}{3}+x_2=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow x_2=1$.

Khi đó, $x_1.x_2=\dfrac{3m+1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{7}{3}=\dfrac{3m+1}{3}\Leftrightarrow 3m+1=7\Leftrightarrow m=2$.

Vậy, với m = 2 thì phương trình có nghiệm $x_1=\dfrac{7}{3}$ và nghiệm còn lại $x_2=1$.

b. Phương trình $4x^2-2x+m-3=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=3$.

Áp dụng định lí Vi ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3+x_2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x_2=\dfrac{-5}{2}$.

Khi đó, $x_1.x_2=\dfrac{m-3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{-15}{2}=\dfrac{m-3}{4}\Leftrightarrow m-3=-30\Leftrightarrow m=-27$.

Vậy, với m = -27 thì phương trình có nghiệm $x_1=3$ và nghiệm còn lại $x_2=\dfrac{-5}{2}$.

c. Phương trình $x^2-8x+2m^2+7=0$, biết phương trình có nghiệm $x_1=5$.

Áp dụng định lí Vi ét ta có: $x_1+x_2=8\Leftrightarrow 5+x_2=8\Leftrightarrow x_2=3$.

Khi đó, $x_1.x_2=\dfrac{2m^2+7}{1}\Leftrightarrow 15=2m^2+7\Leftrightarrow 2m^2-8=0\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy, với $m=\pm 2$ thì phương trình có nghiệm $x_1=5$ và nghiệm còn lại $x_2=3$.

Bài 5. Tìm hai số u, v trong mỗi trường hợp sau:

a. Ta có: $u+v=29$ và $u.v=198$

Nên u, v là hai nghiệm của phương trình: $X^2-29X+198=0$

Giải phương trình ta được nghiệm X = 18; X = 11.

Vậy, hai số cần tìm là $\begin{cases} u=18 \\ v=11 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=11 \\ v=18 \end{cases}$.

b. Ta có: $u+v=3\sqrt{2}$ và $u.v=4$

Nên u, v là hai nghiệm của phương trình: $X^2-3\sqrt{2}X+4=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $X=2\sqrt{2}; X=\sqrt{2}$.

Vậy, hai số cần tìm là $\begin{cases} u=2\sqrt{2} \\ v=\sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=\sqrt{2} \\ v=2\sqrt{2} \end{cases}$.

c. $u-v=-2$ và $u.v=80$

Đặt v' = -v, ta có $u+v'=-2$ và $u.(-v')=80 \Leftrightarrow u.v'=-80$

Nên u, v' là hai nghiệm của phương trình: $X^2+2X-80=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $X=8; X=-10$.

Suy ra $\begin{cases} u=8 \\ v'=-10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-10 \\ v'=8 \end{cases}$.

Do đó, hai số cần tìm là $\begin{cases} u=8 \\ v=10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-10 \\ v=-8 \end{cases}$.

d. $u^2+v^2=13$ và $u.v=6$

Ta có: $u^2+v^2=13 \Leftrightarrow (u+v)^2-2uv=13$

$\Leftrightarrow (u+v)^2-12=13 \Leftrightarrow (u+v)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=5 \\ u+v=-5 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $u+v=5$ và $u.v=6$ thì u, v là hai nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0$. Giải phương trình ta được nghiệm $X=3; X=2$.

Suy ra hai số cần tìm là $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases}$.

Trường hợp 2: $u+v=-5$ và $u.v=6$ thì u, v là hai nghiệm của phương trình $X^2+5X+6=0$. Giải phương trình ta được nghiệm $X=-3; X=-2$.

Suy ra hai số cần tìm là $\begin{cases} u=-3 \\ v=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=-3 \end{cases}$.

Kết luận: Vậy, hai số cần tìm là $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-3 \\ v=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=-3 \end{cases}$.

Bài 6. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

a. Hai số 5 và 2 có tổng là 5 + 2 = 7 và tích là 5.2 = 10 nên nó là nghiệm của phương trình sau $x^2-7x+10=0$.

b. Hai số 7 và 9 có tổng là 7 + 9 = 16 và tích là 7.9 = 63 nên nó là nghiệm của phương trình sau $x^2-16x+63=0$.

c. Hai số 3 và $\frac{1}{4}$ có tổng là $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$ và tích là $3.\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ nên nó là nghiệm của phương trình sau $x^2-\frac{13}{4}x+\frac{3}{4}=0$.

d. Hai số -5 và $\frac{1}{5}$ có tổng là $-5+\frac{1}{5}=\frac{-24}{5}$ và tích là $-5.\frac{1}{5}=-1$ nên nó là nghiệm của phương trình sau $x^2+\frac{24}{5}x-1=0$.

e. Hai số $\sqrt{5}-1$ và $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ có tổng là $\sqrt{5}-1+\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}-1+\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{5\sqrt{5}-3}{4}$ và tích là $\left(\sqrt{5}-1\right).\frac{1}{\sqrt{5}-1}=1$ nên nó là nghiệm của phương trình sau $x^2-\frac{5\sqrt{5}-3}{4}x+1=0$.

f. Hai số $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ có tổng là $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}$ và tích là $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-1$ nên nó là nghiệm của phương trình sau $x^2-2\sqrt{2}x-1=0$.

Bài 7. Phương trình $x^2-5x+6=0$ có $\Delta=(-5)^2-4.1.6=1>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1.x_2=6\end{cases}$

a. Biểu thức $A={x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

b. $A=(-5)^2-2.6=25-12=13$ $B={x_1}^3+{x_2}^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

$B=5^3-3.6.5=125-90=35$

c. $C=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{5}{6}$

d. $D=\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}=\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2}$

$$D=\frac{\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\left[(5)^2-2.6\right]^2-2(6)^2}{(6)^2}$$

$$D=\frac{\left[(5)^2-2.6\right]^2-2(6)^2}{(6)^2}=\frac{(13)^2-72}{36}=\frac{97}{36}$$

Bài 8. Cho phương trình $2x^2-7x+6=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Không giải phương trình, hãy lập phương trình có hai nghiệm là hai số được cho trong mỗi trường hợp sau:

Phương trình $2x^2-7x+6=0$ có $\Delta=7^2-4.2.6=1>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{7}{2}\\x_1x_2=3\end{cases}$

a.Hai số $u=\frac{1}{x_1};v=\frac{1}{x_2}$ có tổng là $u+v=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{7}{6}$ và tích là $uv=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{3}$ nên u,v là nghiệm của phương trình sau: $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$

b. Hai số $u=1+x_1;v=1+x_2$ có

Tổng $u+v=\left(1+x_1\right)+\left(1+x_2\right)=2+\left(x_1+x_2\right)=2+\frac{7}{2}=\frac{11}{2}$

Tích $uv=\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)=1+\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2=1+\frac{7}{2}+3=\frac{15}{2}$

Nên u,v là nghiệm của phương trình: $x^2-\frac{11}{2}x+\frac{15}{2}=0$

Bài 9. Phương trình $x^2-12x+m=0$ có $\Delta'=6^2-m=36-m$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow36-m>0\Leftrightarrow m<36$

Khi đó áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=12\ \ (1)\\x_1x_2=m\quad\ (2)\end{cases}$

a.Kết hợp giả thiết $x_1-x_2=-2$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x_1+x_2=12\\x_1-x_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=7\end{cases}$

Thay các giá trị $x_1=5;x_2=7$ vào (2) ta có $m=5.7=35$

Vậy với $m=35$ thì phương trình có nghiệm thoả mãn bài toán.

b.Kết hợp giả thiết $x_1=\frac{3}{2}x_2$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_1=\frac{3}{2}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{36}{5} \\ x_2=\frac{24}{5} \end{cases}$

Thay các giá trị $x_1=\frac{36}{5}; x_2=\frac{24}{5}$ vào (2) ta có $m=\frac{36}{5}\cdot\frac{24}{5}=\frac{864}{25}$

Vậy với $m=\frac{864}{25}$ thì phương trình thoả mãn điều kiện bài toán.

d. Dạng 4. Giải và biện luận phương trình bậc hai có chứa tham số

Cho phương trình bậc hai có chứa tham số, thường là tham số m có dạng:
$f(x,m)=0$

1. Giải phương trình khi biết giá trị của tham số
   Phương pháp: Thay giá trị m vào phương trình để tìm nghiệm.
2. Tìm tham số khi biết nghiệm x_0 của phương trình
   + Thay x_0 vào phương trình, ta tìm được giá trị m.
   + Kiểm tra xem giá trị m có thỏa mãn điều kiện bài toán không. Nếu thỏa mãn, ta kết luận đó là giá trị m cần tìm.
3. Tìm tham số m để phương trình bậc hai
   + Trong bài toán tìm tham số m để phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện về số nghiệm, mối quan hệ giữa các nghiệm,…
   Ta cần phân tích yêu cầu bài toán để xác định đúng các điều kiện cần thiết.
   Nếu tham số m có mặt ở hệ số a, ta cần phải chú ý điều kiện tương ứng của nó.

Các dạng toán thường gặp khi có tham số là tìm m để phương trình:

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ c\neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta<0 \end{cases}$	Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c<0$
Phương trình (*) có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ P>0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm dương $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$	Phương trình có 1 nghiệm: có 2 TH + Phương trình có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ + Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

4. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số

Phương pháp: Biểu thức liên hệ không phụ thuộc m là biểu thức không có chứa tham số m. Áp dụng hệ thức Vi ét gồm tổng và tích của hai nghiệm. Biểu diễn tham số m theo các nghiệm (rút m).

Ví dụ minh họa 1: Cho phương trình: $x^2-(2m+3)x+m=0$

a. Giải phương trinh với $m=2$

b. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c. Viết hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ mà không phụ thuộc vào m

HDG:

Phương trình: $x^2-(2m+3)x+m=0$ (1)

a. Với, phương trình (1): $x^2-7x+2=0$

$\Delta=(-7)^2-4.1.2=41>0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2};\ x_2=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$

b. Phương trình: $x^2-(2m+3)x+m=0$ (1)có

$\Delta=(2m+3)^2-4.1.m=4m^2+12m+9-4m$

$=4m^2+8m+9=4m^2+8m+4+5=(2m+2)^2+5>0,\forall m$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

c. Theo câu b. Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=2m+3\\x_1.x_2=m\end{cases}$$

Thay $m=x_1.x_2$ vào $x_1+x_2=2m+3\ (*)$

Vậy biểu thức liên hệ giữa x_1+x_2 không phụ thuộc vào là $x_1+x_2=2x_1x_2+3$

Ví dụ minh họa 2: Cho phương trình: $mx^2-2(m+1)x+m-5=0$

a. Xác định m để phương trình có một nghiệm duy nhất.

b. Xác định m để phương trình có một nghiệm.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $(x_1+1)(x_2+1)=3$

HDG:

Phương trình: $mx^2-2(m+1)x+m-5=0$

a. Để phương trình có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\-2(m+1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\m\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow m=0$$

Vậy với $m=0$ thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

b. Để phương trình có một nghiệm:

TH1: $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ -2(m+1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$

TH2:

$\begin{cases} a\neq 0 \\ \triangle'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ (m+1)2-m(m-5)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+2m+1-m^2+5m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 7m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m=\dfrac{-1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{7}$

Vậy $m=0$ hoặc $m=\dfrac{-1}{7}$ thì phương trình có một nghiệm.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $(x_1+1)(x_2+1)=3$

Để phương trình có nghiệm $x_1;x_2$ thì $\begin{cases} a\neq 0 \\ \triangle'\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ (m+1)^2-m(m-5)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+2m+1-m^2+5m\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 7m+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\geq -\dfrac{1}{7} \end{cases}$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$:

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m+1}{m} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-5}{m} \end{cases}$

Theo đề ra: $(x_1+1)(x_2+1)=3 \Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+x_2)+1=3 \Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+x_2)=2$

$\Leftrightarrow \dfrac{m-5}{m}+\dfrac{2m+1}{m}=2 \Leftrightarrow \dfrac{3m-4}{m}=2 \Leftrightarrow 3m-4=2m \Leftrightarrow m=4$ (thỏa điều kiện)

Kết luận: Vậy với $m=4$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa điều kiện bài toán.

Lưu ý:

Ở câu này, học sinh chú ý, do mức độ phong phú của Tiếng Việt nên gặp đề yêu cầu phương trình có MỘT NGHIỆM (hoặc MỘT NGHIỆM DUY NHẤT) thì các em cần phân biệt chính xác. Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm thì sẽ có hai trường hợp thỏa mãn là:

Phương trình có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$ *hoặc phương trình có nghiệm kép* $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm duy nhất thì chỉ có trường hợp $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$ *là đúng.*

Nếu đề yêu cầu phương trinh có nghiệm kép thì $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho phương trình: $x^2-2mx+4m-4=0$

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{x_1+1}{x_2}+\frac{x_2+1}{x_1}=\frac{13}{4}$

b. Viết hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ mà không phụ thuộc vào tham số m

Bài 2. Cho phương trình: $x^2-5x+2m-1=0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m để $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{19}{3}$

Bài 3. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt

b. Tìm GTNN của biểu thức $A=10x_1.x_2+x_1^2+x_2^2$

Bài 4. Cho phương trình: $(m-4)x^2-2mx+m-2=0$

a. Giải phương trình với $m=3$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm $x=2$, tìm nghiệm còn lại

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5. Cho phương trình: $x^2-4x+m-1=0$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn: $x_1=2.x_2$

Bài 6. Cho phương trình: $mx^2-2(m+3)x+m-2=0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Tìm m thỏa mãn hệ thức $3x_1x_2-2(x_1+x_2)+7=0$

c. Viết hệ thức giữa $x_1;x_2$ mà không phụ thuộc vào m.

Bài 7 : Cho phương trình $x^2-(m-3)x-m=0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m để phương trình có nghiệm bằng -2. Tìm nghiệm còn lại.

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thảo mãn hệ thức :

$$3(x_1+x_2)-x_1x_2 \geq 5$$

Bài 8 : Cho phương trình $x^2-2x+m-3=0$

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm

b. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức :

$x_1^3+x_2^3=-20$

Bài 9 : Cho phương trình $x^2-2(m-3)x+m^2+8m+6=0$

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=34$

b. Với giá trị m của câu a. Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$$

Bài 10 : Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-m-4=0$

a. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b.Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2+x_2^2=40$

c. Viết hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Phương trình $x^2-2mx+4m-4=0$

Có $\Delta'=(-m)^2-1(4m-4)=m^2-4m+4=(m-2)^2\geq 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=4m-4 \end{cases}$

a. Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{x_1+1}{x_2}+\frac{x_2+1}{x_1}=\frac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2+x_1+x_2^2+x_2}{x_1x_2}=\frac{13}{4} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m)^2-2(4m-4)+2m}{4m-4}=\frac{13}{4} \Leftrightarrow \frac{4m^2-6m+8}{m-1}=13$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2-6m+8}{m-1}-13=0 \Leftrightarrow \frac{4m^2-6m+8-13(m-1)}{m-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2-19m+21}{m-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-19m+21=0 \\ m-1\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-7}{4} \end{array}\right. \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-7}{4} \end{array}\right.$$

Vậy với $m=3$ hoặc $m=\dfrac{-7}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn $\dfrac{x_1+1}{x_2}+\dfrac{x_2+1}{x_1}=\dfrac{13}{4}$

b. phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m, ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=4m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ m=\dfrac{x_1x_2+4}{4} \end{cases}$$ Suy ra: $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_1x_2+4}{4} \Leftrightarrow 2\left(x_1+x_2\right)=x_1x_2+4(*)$

Vậy biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m là: $2\left(x_1+x_2\right)=x_1x_2+4(*)$

Bài 2: Phương trình: $x^2-5+2m-1=0$

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \\ (-5)^2-4.1(2m-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -8m+29>0 \Leftrightarrow m<\frac{29}{8}$$

Vậy, với $m<\dfrac{29}{8}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Phương trình có hai nghiệm $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{19}{3}$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq\dfrac{29}{8}$, khi đó

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=2m-1 \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{19}{3}\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{19}{3}\Leftrightarrow\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2-x_1x_2}{x_1x_2}-\frac{19}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(5\right)^2-2\left(2m-1\right)}{2m-1}-\frac{19}{3}=0\Leftrightarrow\frac{75-12m+6-38m+19}{3\left(2m-1\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{75-12m+6-38m+19}{3\left(2m-1\right)}=0\Leftrightarrow\frac{-50m+100}{3\left(2m-1\right)}=0\Leftrightarrow m=2\left(TMDK\right)$$

Vậy, với $m=2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện

Bài 3: Cho phương trình: $x^2-2\left(m+1\right)x+2m+10=0$

a. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\\Delta^{'}>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\\Delta^{'}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\neq0\\\left(m+1\right)^2-\left(2m+10\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+2m+1-2m-10>0$$

$$\Leftrightarrow m^2-9>0\Leftrightarrow m^2>9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-3\end{array}\right.$$

Vậy, với $m<-3$ hoặc $m>3$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm GTNN của biểu thức $A=10x_1x_2+x_1^2+x_2^2$

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\\Delta^{'}\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq3\\m\leq-3\end{array}\right.$

Khi đó, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2\left(m+1\right)\\x_1x_2=2m+10\end{cases}$ thay vào biểu thức A

$$A=10x_1x_2+x_1^2+x_2^2+\left(x_1+x_2\right)^2+8x_1x_2$$

$$A=4\left(m+1\right)^2+8\left(2m+10\right)=4m^2+8m+4+16m+80$$

$$A=4m^2+24m+84$$

$$A=4\left(m+3\right)^2+48\geq48$$

Với mọi giá trị thuộc $\left[\begin{array}{l}m\geq3\\m\leq-3\end{array}\right.$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $A_{\min}=48\Leftrightarrow m=-3$

Bài 4: Cho phương trình: $\left(m-4\right)x^2-2mx+m=0$

a. Khi $m=3$ ta có $-x^2-6x+1=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $x=-3-\sqrt{10}; x=-3+\sqrt{10}$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm $x=2$, tìm nghiệm còn lại

Ta có: $\Delta^{'}=m^2-(m-4)(m-2)=6m-8$

Để phương trình có hai nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4\neq 0 \\ 6m-8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 4 \\ m\geq \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Phương trình có nghiệm $x=2$, suy ra: $4(m-4)-4m+m-2=0$

$\Leftrightarrow m-18=0 \Leftrightarrow m=18$ (thỏa mãn điều kiện)

Khi đó, $x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-4} \Leftrightarrow 2+x_2=\dfrac{36}{14} \Leftrightarrow x_2=\dfrac{4}{7}$

c. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4\neq 0 \\ 6m-8> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 4 \\ m> \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Vậy, với $\begin{cases} m\neq 4 \\ m> \dfrac{4}{3} \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5: Cho phương trình: $x^2-4x+m-1=0$

Để phương trình có hai nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \\ 4-(1-m)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq 5$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=4(1) \\ x_1x_2=m-1(2) \end{cases}$

Phương trình có nghiệm $x_1=2.x_2$, suy ra (1)

$x_1+x_2=4 \Leftrightarrow 3.x_2=4 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{4}{3} \Rightarrow x_1=\dfrac{8}{3}$

Thay vào (2): $x_1.x_2=m-1 \Leftrightarrow m=x_1.x_2+1=\dfrac{4}{3}.\dfrac{8}{3}+1=\dfrac{41}{9}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy, $m=\dfrac{41}{9}$.

Bài 6. Cho phương trình: $mx^2-2(m+3)x+m-2=0$

a. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+3)^2 - m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 6m + 9 - m^2 + 2m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 8m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \dfrac{-9}{8} \end{cases}$$

Vậy, với $m > \dfrac{-9}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq \dfrac{-9}{8} \end{cases}$

Khi đó, áp dụng hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+3)}{m} (1) \\ x_1 x_2 = \dfrac{m-2}{m} (2) \end{cases}$

Theo đề: $3x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 7 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{m-2}{m}\right) - 2\left(\dfrac{2(m+3)}{m}\right) + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3m - 6 - 4m - 12 + 7m}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{6m - 18}{m} = 0 \Leftrightarrow m = 3 \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy, với $m = 3$ phương trình có hai nghiệm thỏa điều kiện bài toán.

c. Viết hệ thức liên hệ $x_1; x_2$ không phụ thuộc vào m.

Ta có với $m \geq \dfrac{-9}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Với $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+3)}{m} (1) \\ x_1 x_2 = \dfrac{m-2}{m} (2) \end{cases}$

Từ $(2): x_1 x_2 = \dfrac{m-2}{m} \Rightarrow m.x_1 x_2 = m - 2$

$\Leftrightarrow m.(x_1 x_2 - 1) = -2 \Leftrightarrow m = \dfrac{-2}{x_1 x_2 - 1}$ thay vào (1)

$$(1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{2.\left(\frac{-2}{x_1.x_2} + 3\right)}{\frac{-2}{x_1.x_2} - 1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{\frac{-4}{x_1.x_2} + 6}{\frac{-2}{x_1.x_2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-4 + 6x_1x_2 - 6}{-2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 5 - 3x_1x_2$$

Vậy, khi $m \geq \frac{-9}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ với biểu thức liên hệ $x_1 + x_2 = 5 - 3x_1x_2$ không phụ thuộc m.

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - (m-3)x - m = 0$

a. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m-3)^2 - 4(-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 + 4m > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 9 > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 8 > 0$$ với mọi m.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m.

Thay nghiệm $x = -2$ vào phương trình, ta có:

$$4 + 2(m-3) - m = 0 \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Theo hệ thức Viet: $x_1 + x_2 = m - 3 \Leftrightarrow -2 + x_2 = 2 - 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$

Vậy, với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$

c. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m.

Áp dụng hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1.x_2 = -m \end{cases}$

Thay vào hệ thức: $3.(x_1 + x_2) - x_1.x_2 \geq 5 \Leftrightarrow 3(m-3) - (-m) \geq 5$

$$\Leftrightarrow 3m - 9 + m \geq 5 \Leftrightarrow 4m \geq 14 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{2}$$

Vậy, với $m \geq \frac{7}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 8. Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 3 = 0$

a. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1^2 - 1(m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 4$

Vậy, với $m < 4$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$

Áp dụng hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = m - 3 \end{cases}$

Theo đề: $x_1^3 + x_2^3 = -20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -20$

$\Leftrightarrow (2)^3 - 3(m-3)(2) = -20 \Leftrightarrow 8 - 6m + 18 = -20$

$\Leftrightarrow -6m = -46 \Leftrightarrow m = \dfrac{23}{3}$

Vậy, với $m = \dfrac{23}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức

$x_1^{\,3} + x_2^{\,3} = -20$

Bài 9. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 8m + 6 = 0$

Có $\Delta' = (m+3)^2 - 1(m^2 + 8m + 6) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 8m - 6$

$\Delta' = -2m + 3$

a. Phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3}{2}$

Khi đó, áp dụng hệ thức Vi ét : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) \\ x_1x_2 = m^2 + 8m + 6 \end{cases}$

Theo đề ta có : $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 34 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 34$

$\Leftrightarrow 4(m+3)^2 - 2(m^2 + 8m + 6) = 34$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 24m + 36 - 2m^2 - 16m - 12 = 34$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -5 \end{array}\right. (t/m)$

Vậy, với $m = 1$ và $m = -5$ phương trình có nghiệm $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 34$

b. Với giá trị m của câu a. Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức :

$A=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$

TH1: Với $m=1$, ta có phương trình $x^2-8x+15=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Với $\begin{cases}x_1+x_2=8\\x_1x_2=15\end{cases}$

Suy ra $A=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{(8)^2-2.15}{15}=\dfrac{34}{15}$

TH2: Với $m=-5$, ta có phương trình $x^2+4x-9=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Với $\begin{cases}x_1+x_2=-4\\x_1x_2=-9\end{cases}$

Suy ra $A=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{(-4)^2-2.(-9)}{-9}=\dfrac{34}{-9}$

Bài 10.

a. Phương trình $x^2-2(m+1)x+m-4=0$

Có $\Delta'=(m+1)^2-1(m-4)=m^2+2m+1-m+4=m^2+m+5$

$\Delta'=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4}>0$ với mọi m

Vậy, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m

Áp dụng hệ thức Vi ét, ta có : $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\x_1x_2=m-4\end{cases}$

Theo đề: ${x_1}^2+{x_2}^2=40\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=40$

$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-2(m-4)=40\Leftrightarrow 4m^2+6m-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$

Vậy, với $m=-\dfrac{7}{2}$ hoặc $m=2$ thì phương trình sẽ có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán.

c. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m

Áp dụng hệ thức Vi ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1) & (1)\\x_1x_2=m-4 & (2)\end{cases}$

Từ (2) : $x_1x_2 = m - 4 \Rightarrow m = x_1x_2 + 4$

Thay vào (1), ta có : $x_1 + x_2 = 2(x_1x_2 + 4 + 1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 10$

Vậy, biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m là:

$x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 10$

e. Dạng 5. Một số dạng toán khác liên quan phương trình bậc hai

1. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức hàm số bậc hai :

$M = ax^2 + bx + c$ với $(a \neq 0)$

+ Ta tính được : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ và $f(x_0) = ax_0^{\,2} + bx_0 + c$

+ Biến đổi : $M = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$

+ Nếu $a > 0 \Rightarrow M_{\min} = f(x_0)$, xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

+ Nếu $a < 0 \Rightarrow M_{\max} = f(x_0)$, xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

2. Bài toán đồ thị hàm số bậc hai (Parabol)

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $(a \neq 0)$ là parabol (P).

Đồ thị hàm số $y = mx + n$ là đường thẳng (d).

+ Biện luận sự tương giao của hai đồ thị là biện luận số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$ax^2 + bx + c = mx + n$ (1)

+ Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

+ Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (d) tiếp xúc với (P). Khi đó, ta gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị (P), và hoành độ tiếp điểm chính là nghiệm kép của phương trình.

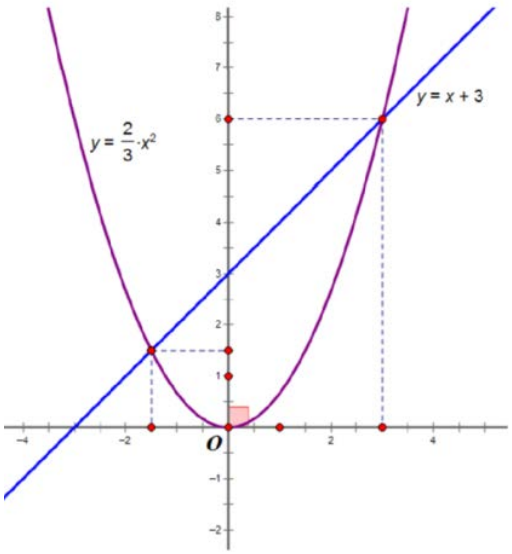
+ Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P).

Ví dụ minh họa 1: Xác định tọa độ giao điểm của (P): $y = \dfrac{2}{3}x^2$ và (d): $y = x + 3$ bằng phương pháp đại số và đồ thị.

Hướng dẫn giải

a. Đồ thị của parabol (P) và đường thẳng (d) được biểu diễn như hình vẽ. Dựa vào đồ thị ta thấy, đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm có tọa độ $(3;6)$ và $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

b.Tìm giao điểm bằng phương pháp đại số : Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là : $\frac{2}{3}x^2 = x+3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 - x - 3 = 0$, giải phương trình ta được nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$



Với $x=3$, thay vào (d) suy ra $y=6$. Ta có giao điểm $(3;6)$.

Với $x=-\frac{3}{2}$, thay vào (d) suy ra $y=\frac{3}{2}$. Ta có giao điểm $(-\frac{3}{2};\frac{3}{2})$.

Ví dụ minh họa 2 : Cho (P) : $y=-x^2$ và đường thẳng (d) : $y=-x+3$

a. Xác định giao điểm của (P) và (d)

b. Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P).

Hướng dẫn giải:

a.Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$-x^2 = -x+3 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ có $\Delta = 1 - 4.1.3 = -11 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, đường thẳng (d) không cắt parabol (P).

b. Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P).

Đường thẳng (d') có dạng : $y = ax + b$.

+ (d') vuông góc với (d) suy ra: $a.(-1) = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (d') : y = x + b$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P) :

$-x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 + x + b = 0$ (1)

(d') tiếp xúc với (P) nên (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$

Vậy, phương trình đường thẳng (d') : $y = x + \frac{1}{4}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho (P): $y = ax^2 \ (a \neq 0)$ và (d): $y = mx + n$

a. Tìm m, n để (d) đi qua hai điểm A$(0;-1)$ và B$(3;2)$.

b. Tính a biết (d) tiếp xúc với (P).

Bài 2. Cho (P) : $y = \frac{1}{3}x^2$ và (d): $y = -x + 6$.

a. Hãy vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b. Xác định tọa độ giao điểm của chúng bằng đồ thị.

Bài 3. Chứng minh (d) : $y = x + \frac{1}{2}$ và (P) : $y = -\frac{1}{2}x^2$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm của chúng.

Bài 4. Cho (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d): $y = ax + b$ Tìm a,b biết (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là $-2 \ và \ 4$.

Bài 5. Cho (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d): $y = x - m$

a. Với giá trị nào của m thì (d) không cắt (P)

b. Viết phương trình đường thẳng $(d') // (d)$ và tiếp xúc với (P) và tính tọa độ tiếp điểm.

Bài 6. Trên cùng một hệ trụ tọa độ cho (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d): $y = -\frac{1}{2}x + 2$

a. Vẽ (P) và (d)

b. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

c. Viết phương trình đường thẳng $(d') // (d)$ và tiếp xúc với (P). Tính tọa độ tiếp điểm.

Bài 7. Cho hàm số : $y = -3x^2$ (P)

a. Vẽ đồ thị (P)

b. Viết phương trình đường thẳng (d) biết (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ $x = -1$ và $x = 2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho (P) : $y = ax^2 \ (a \neq 0)$ và (d): $y = mx + n$

a. Đường thẳng (d): $y = mx + n$ đi qua $A(0;-1) \Rightarrow -1 = m.0 + n \Leftrightarrow m = -1$

Đường thẳng (d) : $y = mx + n$ đi qua $B(3;2)$

$\Rightarrow 2 = 3m + n \Leftrightarrow 2 = 3.(-1) + n \Leftrightarrow n = 5$

Vậy, đường thẳng (d) : $y = -x + 5$

b. Phương trình hoành động giao điểm của (d) và (P) : $ax^2 = -x + 5$

$\Leftrightarrow ax^2 + x - 5 = 0$ (*) với $(a \neq 0)$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow ax^2 + x - 5 = 0$ (*) có nghiệp kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 1 - 4.a.(-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 1 + 20a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{20}$$

Vậy, với $a = -\frac{1}{20}$ thì (d) $y = -x + 5$ tiếp xúc với (P) $y = -\frac{1}{20}x^2$

Bài 2. Cho (P) : $y = \frac{1}{3}x^2$ và (d) : $y = -x + 6$.

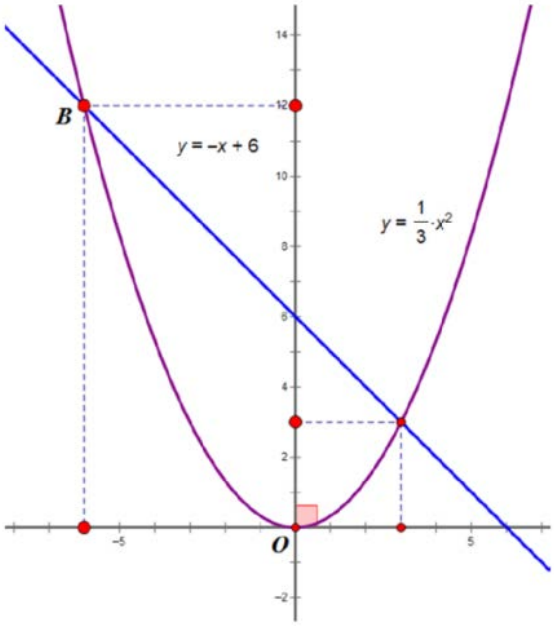
a. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ có đồ thị là parabol (P).

Có đỉnh $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy và đi qua các điểm sau :

x	-3	0	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	3	0	3

Hàm số $y = -x + 6$ có đồ thị là đường thẳng (d)
đi qua các điểm (0;6) và (0;6).

b. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại các điểm $(3;3)$ và $(-6;12)$.



Bài 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$-\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$ có

$\Delta = 1^2 - 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 0$

Do đó, phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép, hay đường thẳng (d) tiếp cúc với parabol (P).

Khi đó, phương trình có nghiệm là: $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{2.\dfrac{1}{2}} = -1$ suy ra $y = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy, tọa độ tiếp điểm là $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 4. Cho (P): $y = \dfrac{1}{2}x^2$ và (d): $y = ax + b$ Tìm a,b biết (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là $-2 và 4$.

Tọa độ giao điểm thuộc (P) nên:

Với $x = -2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}(-2)^2 = 2$ ta có điểm $A(-2;2)$

Với $x = 4 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}(4)^2 = 8$ ta có điểm $B(4;8)$

Đường thẳng (d) : $y = ax + b$ đi qua A và B nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2 = -2a + b \\ 8 = 4a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy, a=1 và b=4, nên phương trình đường thẳng (d): $y = x + 4$.

Bài 5. Cho (P) : $y = \dfrac{1}{2}x^2$ và (d): $y = x - m$

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$\dfrac{1}{2}x^2 = x - m \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - x + m = 0$ (*) có $\Delta = 1^2 - 4.\dfrac{1}{2}m = 1 - 2m$.

Để (d) không cắt (P) thì phương trình (*) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

Vậy, với $m > \dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) nên suy ra phương trình đường thẳng (d') có dạng : $y = x + n \ \ (n \neq m)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P) là :

$\dfrac{1}{2}x^2 = x + n \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - x - n = 0$ (**) có $\Delta = 1^2 - 4.\dfrac{1}{2}.(-n) = 1 + 2n$.

Để (d') tiếp xúc (P) thì phương trình (**) có nghiệp kép

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 2n = 0 \Leftrightarrow n = -\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn vì $m > \dfrac{1}{2}$).

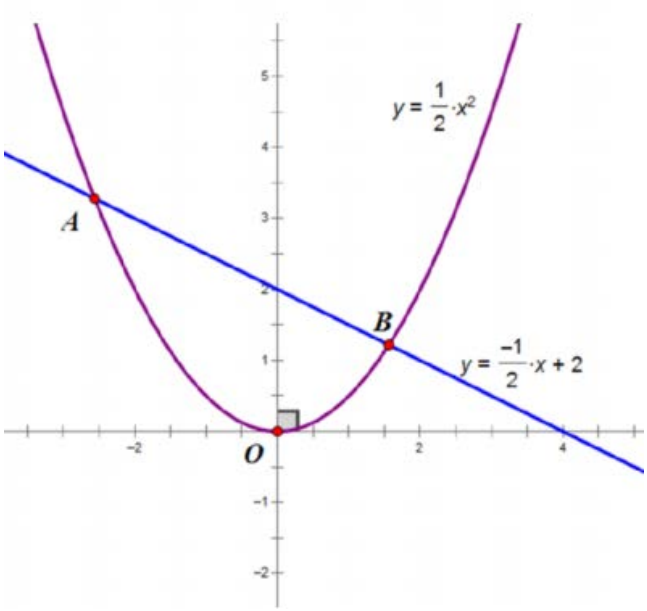
Suy ra phương trình có nghiệm $x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$. Tọa độ tiếp điểm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d') : $y=x-\frac{1}{2}$ tiếp xúc với (P) tại điểm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 6. a. Vẽ (P) và (d)

Parabol (P) : $y=\frac{1}{2}x^2$ có đỉnh là $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy, và đi qua các điểm sau :

x	-2	0	2
$y=\frac{1}{2}x^2$	2	0	2



Đường thẳng (d) : $y=-\frac{1}{2}x+2$ đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(4;0)$

b.Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x+2\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2=0$ có nghiệm $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2};x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

Với $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=\frac{9-\sqrt{17}}{4}$ ta có điểm $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{9-\sqrt{17}}{4}\right)$.

Với $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow y=\frac{9+\sqrt{17}}{4}$ ta có điểm $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{9+\sqrt{17}}{4}\right)$.

c.Viết phương trình đường thẳng (d')//(d) và tiếp xúc với (P). Tính tọa độ tiếp điểm.

Gọi (d') : $y=ax+b$ là đường thẳng cần tìm.

Đường thẳng (d') song song với (d) suy ra : $a=-\frac{1}{2}\Rightarrow(d'):y=-\frac{1}{2}x+b$

Đường thẳng (d') tiếp xúc (P) nên $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - b = 0$ (*) có nghiệm kép

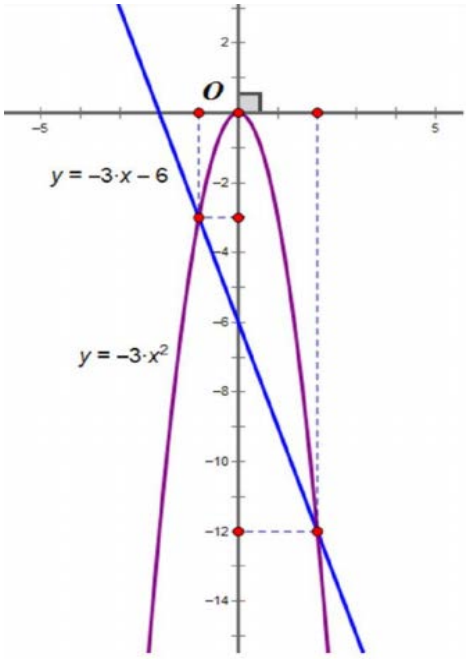
$\Leftrightarrow \Delta_{pt(*)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4.\frac{1}{2}.(-b) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{8}$

Vậy, phương trình đường thẳng (d') : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$

Bài 7. Cho hàm số: $y = -3x^2$ (P)

a. Hàm số $y = -3x^2$ có đồ thị là parabol (P), có đỉnh là $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy và đi qua các điểm :

x	-1	0	1
$y = -3x^2$	-3	0	-3



b. Điểm A thuộc đồ thị (P) có hoành độ $x = -1 \Rightarrow y = -3$ có tọa độ $(-1;-3)$.

Điểm B thuộc đồ thị (P) có hoành độ $x = 2 \Rightarrow y = -12$ có tọa độ $(2;-12)$.

Gọi đường thẳng (d) $y = ax + b$ là đường thẳng cần tìm.

(d) đi qua hai điểm A;B nên ta có

$$\begin{cases} -3 = -a + b \\ -12 = 2a + b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) : $y = -3x - 6$.

III. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Kiến thức trọng tâm

Dạng 1. Phương trình trùng phương : $ax^4+bx^2+c=0$ **(1) với** $(a\neq 0)$.

Phương pháp giải:

+ Đặt $t=x^2(t\geq 0)$.

+ Đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai ẩn (t) là :

$at^2+bt+c=0\ (a\neq 0),\ (t\geq 0)$ (2)

+ Giải phương trình (2) tìm (t), loại các giá trị $t<0$, chỉ lấy các giá trị $t\geq 0$

+ Với $t\geq 0$, $t=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{t}$ là nghiệm của phương trình (1).

Ví dụ 1: Giải phương trình : $4x^4-x^2-18=0$

Giải:

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4t^2-t-18=0\ (t\geq 0)$ (*)

$\Delta=1+4.4.18=289\Rightarrow\sqrt{\Delta}=17$

$t_1=\dfrac{1-17}{8}=-2<0$ (loại) ; $t_2=\dfrac{1+17}{8}=\dfrac{9}{4}>0$ (nhận)

Với $t_2=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\pm\dfrac{3}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=\pm\dfrac{3}{2}$.

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Thực hiện các bước sau :

+ Tìm điều kiện xác định của phương trình

+ Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu

+ Giải phương trình vừa nhận được

+ Loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện. Các giá trị thỏa mãn điều kiện là nghiệm của phương trình.

+ Kết luận.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-4\neq 0\\ x+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq -2\end{cases}$

Quy đồng mẫu ta được: $PT\Leftrightarrow\dfrac{x^2-3x+1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

Khử mẫu ta được: $x^2-3x+1=x-2\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nghiện của phương trình là $x\in\{1;3\}$

c. Dạng 3. Phương trình tích

Phương trình tích là phường trinh có dạng $A.B=0$.

Cách giải: $A.B=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\B=0\end{array}\right.$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\left(3x^2-5x-2\right)\left(x^2-8\right)=0$

Giải

Ta có: $\left(3x^2-5x-2\right)\left(x^2-8\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}3x^2-5x-2=0 & (1)\\x^2-8=0 & (2)\end{array}\right.$

Giải phương trình (1): $3x^2-5x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{-1}{3}\end{array}\right.$

Giải phương trình (2): $x^2-8=0\Leftrightarrow x^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{2}\\x=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x_1=2;x_2=\dfrac{-1}{3};x_3=2\sqrt{2};x_4=-2\sqrt{2}.$

d. Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ để quy về giải phương trinh bậc hai

Ví dụ 4: Giải phương trình: $3\left(x^2-3x\right)-4\left(x^2-3x+1\right)+5=0$

Giải

Phương trình: $3\left(x^2-3x\right)-4\left(x^2-3x+1\right)+5=0$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-3x\right)-4\left(x^2-3x\right)+1=0$$

Đặt $t=x^2-3x$, ta có phương trình: $3t^2-4t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=1\\t_2=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Với $t_1=1\Leftrightarrow x^2-3x=1\Leftrightarrow x^2-3x-1=0$

Có nghiệm là: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};x_2=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

Với $t_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x - \frac{1}{3} = 0$

Có nghiệm là: $x_2 = \frac{9+\sqrt{93}}{6}; x_4 = \frac{9-\sqrt{93}}{6}$

e. Dạng 5: Phương trình chứa căn thức

Dạng: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

Dạng: $a.f(x) + b.\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = f(x); t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2 + 4x - 7 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 0$

Giải:

Phương trình $x^2 + 4x - 7 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} - 6 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4x - 1} (t \geq 0)$, ta có phương trình:

$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -3 \end{array}\right.$ loại nghiệm $t_2 = -3$ vì không thỏa mãn điều kiện

Với $t_1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 4$

$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã có hai nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = -5.$

f. Dạng 6. Phương trình dạng $A^2 + B^2 = 0$

Phương pháp: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $(x^2 - x)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$

Giải:

Phương trình: $(x^2 - x)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho là: $x=1.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $x(x-1)(x-2)-x^3+1=0$

b. $(x+6)^2-4x+7=2(x+3)^2$

c. $\dfrac{x+3}{4}-3=\dfrac{(x+5)(x-2)}{3}$

d. $\dfrac{(x+5)^2}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{(x-3)^2}{3}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $x^4-6x^2-7=0$

b. $x^4-5x^2+4=0$

c. $\dfrac{9}{2}x^4+4x^2-\dfrac{1}{2}=0$

d. $4x^2-29+\dfrac{25}{x^2}=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. $x^3-5x^2-2x+10=0$

b. $x^3-3x^2-3x+1=0$

c. $x^3-6x^2+6x-1=0$

d. $(2x^2-5x+1)^2-(x^2-5x+6)=0$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{11}{6}=0$

b. $\dfrac{x+5}{2x-1}-\dfrac{1-2x}{x+5}-2=0$

c. $\dfrac{1}{3x^2-27}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{x-3}=1$

d. $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$

Bài 5. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a. $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$

b. $(x^2-x+1)(x^2-x+3)=15$

c. $x-2\sqrt{x-2}=10$

d. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{9}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình

$$x(x-1)(x-2)-x^3+1=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-3x+2)-x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2x-x^3+1=0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-\frac{1}{3}$.

b. Phương trình

$$(x-6)^2-4x+7=2(x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+12x+36-4x+7=2\left(x^2+6x+9\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x+43=2x^2+12x+18$$

$$\Leftrightarrow -x^2-4x+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{29}\\x=-2-\sqrt{29}\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-2+\sqrt{29}$ và $x=-2-\sqrt{29}$.

c. Phương trình

$$\frac{x+3}{4}-3=\frac{(x+5)(x-2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-12}{4}=\frac{x^2-2x+5x-10}{3}\Leftrightarrow \frac{x-9}{4}=\frac{x^2+3x-10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-27}{12}=\frac{4x^2+12x-40}{12}\Leftrightarrow 3x-27=4x^2+12x-40$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+9x-13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{13}{4}\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-\frac{13}{4}$.

d. Phương trình

$$\frac{(x+5)^2}{2}-\frac{x}{3}=\frac{(x-3)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x^2-6x+9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+30x+75-2x}{6}=\frac{2x^2-12x+18}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+30x+75-2x=2x^2-12x+18$$

$$\Leftrightarrow x^2+40x+57=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-20+7\sqrt{7}\\x=-20-7\sqrt{7}\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-20+7\sqrt{7}$ $x=1$ và $x=-20-7\sqrt{7}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình

$x^4-6x^2-7=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\ge 0$.

Phương trình $t^2-6t-7=0$.

Ta thấy $a-b+c=1-(-6)+(-7)=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$(loại); $t=7$ (thỏa)

Với $t=7\Rightarrow x^2=7\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\sqrt{7}$.

b. Phương trình

$x^4-5x^2+4=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\ge 0$.

Ta có phương trình $t^2-5t+4=0$.

Ta thấy $a+b+c=1+(-5)+4=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=1$ (thỏa) ; $t=4$ (thỏa)

Với $t=1\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Với $t=4\Rightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm 1$ và $x=\pm 2$.

c. Phương trình

$\frac{9}{2}x^4+4x^2-\frac{1}{2}=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\ge 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{9}{2}t^2+4t-\frac{1}{2}=0$.

Ta thấy $a-b+c=\frac{9}{2}-4+(-\frac{1}{2})=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$(loại); $t=\frac{1}{9}$(thỏa)

Với $t=\frac{1}{9}\Rightarrow x^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{3}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{1}{3}$.

d. Phương trình $4x^2-29+\frac{25}{x^2}=0$ có điều kiện: $x\ne 0$, ta có:

$4x^2-29+\frac{25}{x^2}=0\Leftrightarrow\frac{4x^4-29x^2+25}{x^2}=0\Leftrightarrow 4x^4-29x^2+25=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t>0$.

Ta có phương trình $4t^2-29t+25=0$.

Ta thấy $a+b+c=4+(-29)+25=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=1$(thỏa); $t=\frac{25}{4}$(thỏa)

Với $t=1\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Với $t=\frac{25}{4}\Rightarrow x^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{5}{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm 1$ và $x=\pm\frac{5}{2}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. Phương trình

$x^4-6x^2-7=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $t^2-6t-7=0$.

Ta thấy $a-b+c=1-(-6)+(-7)=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$(loại); $t=7$ (thỏa)

Với $t=7\Rightarrow x^2=7\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\sqrt{7}$.

b. Phương trình

$$x^3-3x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\left(x^3+1\right)-\left(3x^2+3x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-x+1\right)-3x(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-4x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\x^2-4x+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2+\sqrt{3}\\x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là: $x=-1; x=2+\sqrt{3}; x=2-\sqrt{3}$.

c. Phương trình

$$x^3-6x^2+6x-1=0\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)-\left(6x^2-6x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+1\right)-6x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-5x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^2-5x+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là: $x=1; x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}; x=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$.

d. Phương trình

$$\left(2x^2-5x+1\right)^2-\left(x^2-5x+6\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-5x+1-x^2+5x-6\right)\left(2x^2-5x+1+x^2-5x+6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5\right)\left(3x^2-10x+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5=0 \\ 3x^2-10x+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ x=1 \\ x=\dfrac{7}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm là: $x=\pm\sqrt{5}; x=1; x=\dfrac{7}{3}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{array}\right.$, khi đó

Phương trình $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{11}{6}=0 \Leftrightarrow \dfrac{6(x-2)(x-1)+x.6x-11x(x-1)}{6x(x-1)}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2-18x+12+6x^2-11x^2+11x}{6x(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-7x+12}{6x(x-1)}=0 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right. \text{(thỏa điều kiện)}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=3; x=4$.

b. Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x\neq \dfrac{1}{2} \\ x\neq -5 \end{array}\right.$, khi đó

Phương trình

$$\frac{x+5}{2x-1}-\frac{1-2x}{x+5}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+5)^2-(1-2x)(2x-1)-2(2x-1)(x+5)}{(2x-1)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25+(4x^2-4x+1)-2(2x^2+9x-5)}{(2x-1)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25+4x^2-4x+1-4x^2-18x+10}{(2x-1)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-12x+36}{(2x-1)(x+5)}=0 \Leftrightarrow x^2-12x+36=0 \Leftrightarrow x=6$$ (thỏa điều kiện)

Vậy, phương trình có nghiệm kép là: $x=6$.

c. Điều kiện: $\begin{cases} x\neq \frac{1}{2} \\ x\neq -5 \end{cases}$, khi đó

Phương trình

$$\frac{1}{3x^2-27}+\frac{3}{4}-\frac{1}{x-3}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(x-3)(x+3)}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-12(x+3)-3(x-3)(x+3)}{12(x-3)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-12x-36-3x^2+27}{12(x-3)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2-12x-5}{12(x-3)(x+3)}=0 \Leftrightarrow -3x^2-12x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-6+\sqrt{21}}{3} \\ x=\frac{-6-\sqrt{21}}{3} \end{array}\right.$$ (thỏa điều kiện)

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là: $x=\frac{-6+\sqrt{21}}{3}; x=\frac{-6-\sqrt{21}}{3}$.

d. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$, khi đó:

Phương trình

$$\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30\left(x^2+x+1\right)-13(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{18x+7}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30x^2+30x+30-13x^2+13}{(x+1)\left(x^3-1\right)}=\frac{18x+7}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{17x^2+30x+43}{(x+1)\left(x^3-1\right)}=\frac{(18x+7)(x+1)}{(x+1)\left(x^3-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 17x^2+30x+43=18x^2+25x+7$$

$$\Leftrightarrow -x^2+5x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=9 \end{array}\right. \quad \text{(thỏa điều kiện)}$$

Vậy, phương trình có nghiệm kép là: $x=-4; x=9.$

Bài 5. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a. Phương trình $\left(6x^2-7x\right)^2-2\left(6x^2-7x\right)-3=0$

Đặt $t=6x^2-7x$. Phương trình $\Leftrightarrow t^2-2t-3=0$.

Ta thấy $a-b+c=-1-(-2)-3=0$

Nên phương trình có nghiệm $t=-1$ và $t=3$

Với $t=-1 \Rightarrow 6x^2-7x=-1 \Leftrightarrow 6x^2-7x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{6} \end{array}\right.$

Với $t=3 \Rightarrow 6x^2-7x=3 \Leftrightarrow 6x^2-7x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là: $x=-\frac{1}{3}; x=\frac{1}{6}; x=\frac{3}{2}.$

b. Phương trình $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+3\right)=15$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+1+2\right)=15$. Đặt $t=x^2-x+1.$

Phương trình $\Leftrightarrow t(t+2)=15\Leftrightarrow t^2+2t-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=3 \end{array}\right.$

Nên phương trình có nghiệm $t=-5$ và $t=3.$

Với $t=-5\Rightarrow x^2-x+1=-5\Leftrightarrow x^2-x+3=0$ phương trình vô nghiệm.

Với $t=3\Rightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x=-1; x=2$.

c. Điều kiện: $x\geq 2.$

Phương trình $x-2\sqrt{x-2}=10\Leftrightarrow (x-2)-2\sqrt{x-3}-8=0$

Đặt $t=\sqrt{x-2}$ với $t\geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2-2t-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2 \end{array}\right.$ (loại $t=-2$ vì không thỏa mãn điều kiện).

Với $t=4\Rightarrow \sqrt{x-2}=4\Leftrightarrow x-2=16\Leftrightarrow =18$ (thỏa điều kiện).

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=18$.

d. Điều kiện $x\neq 0$. Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$ với $t\geq 0$.

Phương trình $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{9}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0\Leftrightarrow t^2-\dfrac{9}{2}t+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2} \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{5}{2}\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=2\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}; x=1; x=2$.

IV. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

1. Kiến thức trọng tâm

Việc giải bài toán theo dạng này nhìn chung có phương pháp giống với phương pháp giải bài toán bằng cách giải hệ phương trình. Điểm khác nhau ở đây là dựa vào giả thiết bài toán các em sẽ lập được mối liên hệ giữa các đại lượng bằng cách lập phương trình bậc hai phù hợp.

1. Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Lập phương trình

a) Chọn ẩn số và nêu điều kiện thích hợp của ẩn số.

b) Biểu thị các dữ kiện chưa biết qua ẩn số.

c) Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Đối chiếu nghiệm của phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số để trả lời.

2. Các dạng toán

a) Dạng 1: Toán về quan hệ giữa các số

b) Dạng 2: Làm chung công việc

c) Dạng 3: Toán chuyển động

d) Dạng 4: Có nội dung hình học

e) Dạng 5: Các dạng khác

Ví dụ minh họa 1: Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B dài 36 km. Lúc về người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đó lúc đi?

Hướng dẫn giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc của người đi xe đạp lúc đi từ A đến B.

Gọi $x+3$ (km/h) là vận tốc của người đi xe đạp lúc về từ B đến A.

Thời gian người đi xe đạp từ A đến B là: $\frac{36}{x}$ giờ.

Thời gian người đi xe đạp từ B đến A là: $\frac{36}{x+3}$ giờ.

Theo đề bài, thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút $=\frac{3}{5}$ giờ.

Ta có phương trình: $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{36(x+3)-36x}{x(x+3)}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow \frac{108}{x^2+3x}=\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 540=3(x^2+3x)\Leftrightarrow 3x^2+9x-540=0$$

Giải phương trình ta được nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-15 \end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-15$)

Vậy, vận tốc lúc đi của người đó là 12 km/h.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm hai số, biết rằng số lớn hơn số bé 3 đơn vị và tổng các bình phương của chúng bằng 369.

Bài 2: Một đoàn xe tải cần chở 30 tấn hàng từ địa điểm A đến địa điểm B. Khi sắp bắt đầu khởi hành thì có thêm 2 xe nữa, nên mỗi xe chở ít hơn $0,5$ tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc?

Bài 3: Một ca nô xuôi dòng một khúc sông dài 50 km, rồi ngược dòng khúc sông ấy 32 km thì hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc của dòng nước, biết vận tốc của ca nô là 18 km/h.

Bài 4: Một ca nô xuôi dòng sông từ A đến B dài 48 km rồi ngược dòng sông từ B về A hết 5 giờ. Tính vận tốc của ca nô, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 5: Hai cạnh của một mảnh đất hình chữ nhật hơn kém nhau 10 m. Tính chu vi của mảnh đất ấy, biết diện tích của nó là $1200\ \text{m}^2$.

Bài 6: Trong một phòng họp có 70 người dự họp được sắp xếp ngồi vào các dãy ghế với số lượng người trên mỗi ghế là như nhau. Nếu trong phòng bớt đi 2 dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm 4 người mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế, và mỗi ghế ngồi bao nhiêu người?

Bài 7: Một hình tam giác có diện tích $180\ \text{cm}^2$. Tính cạnh đáy của tam giác, biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm 4 cm và giảm chiều cao tương ứng đi 1 cm thì diện tích của nó không đổi.

Bài 8: Một tam giác vuông có chu vi bằng 30 cm, cạnh huyền là 13 cm. Tính các cạnh góc vuông của tam giác đó?

Bài 9: Người ta trộn 4 kg chất lỏng loại 1 với 3 kg chất lỏng loại 2 thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là $700\ \text{kg/m}^3$. Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng loại 1 lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại 2 là $200\ \text{kg/m}^3$. Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng?

Bài 10: Lúc $6h30$ một người đi xe máy từ A đến B có độ dài 75 km với vận tốc định trước. Đến B người đó nghỉ lại 20 phút rồi quay về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Người đó về đến A lúc 12 giờ 20 phút. Tính vận tốc dự định của người đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Gọi số bé là $x\left(x\in\mathbb{R}\right)$ thì số lớn là $x+3.$

Theo đề bài, tổng các bình phương của hai số là 369, ta có phương trình:

$$x^2+\left(x+3\right)^2=369\Leftrightarrow 2x^2+6x-360=0$$

Giải phương trình ta được nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}x=12\\x=-15\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Với $x=12$, suy ra số lớn là $x+3=15$

Với $x=-15$, suy ra số lớn là $x+3=-12$.

Vậy, hai số cần tìm là $\left\{12;15\right\}$ hoặc $\left\{-15;-12\right\}$.

Bài 2: Gọi $x(x\in\mathbb{N}^*)$ là số xe tải lúc đầu, suy ra số xe tải lúc sau là $x+2$.

Lúc đầu mỗi xe phải chở: $\frac{30}{x}$ tấn

Lúc sau mỗi xe phải chở: $\frac{30}{x+2}$ tấn

Theo đề, lúc sau mỗi xe phải chở ít hơn lúc đầu $0,5$ tấn nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+2}=0,5 \Leftrightarrow 30(x+2)-30x=0,5x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 0,5x^2+x-60=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-12 \end{array}\right.$$ (loại nghiệm $x=-12$ vì không thỏa điều kiện).

Vậy, lúc đầu có 10 chiếc xe tải.

Bài 3: Gọi vận tốc của dòng nước là x (km/h). Điều kiện $0<x<18$.

Vận tốc của canô khi xuôi dòng là: $18+x$ (km/h).

Vận tốc của canô khi ngược dòng là: $18-x$ (km/h).

Thời gian canô xuôi dòng 50 km là: $\frac{50}{18+x}$ (giờ)

Thời gian ca nô ngược dòng 32 km là: $\frac{32}{18-x}$ (giờ)

Theo đề, tổng thời gian canô xuôi dòng 50 km và ngược dòng 32 km hết 4 giờ 30 phút $=4,5$ giờ nên ta có phương trình: $\frac{50}{18+x}+\frac{32}{18-x}=4,5$

$$\Leftrightarrow 50(18-x)+32(18+x)=4,5(18+x)(18-x)$$

$$\Leftrightarrow 900-50x+576+32x=1458-4,5x^2$$

$$\Leftrightarrow 4,5x^2-18x+18=0$$

Phương trình có nghiệm kép $x=2$.

Vậy, vận tốc dòng nước là 2 (km/h).

Bài 4: Gọi vận tốc của canô là x (km/h). Điều kiện là $x>4$.

Vận tốc của canô khi xuôi dòng là $x+4$ (km/h).

Vận tốc của canô khi ngược dòng là $x-4$ (km/h).

Thời gian canô xuôi dòng 48 km là: $\frac{48}{x+4}$ (giờ)

Thời gian canô ngược dòng 48 km là: $\frac{48}{x-4}$ (giờ)

Theo đề, tổng thời gian canô xuôi dòng và ngược dòng hết 5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{48}{x+4}+\frac{48}{x-4}=5$$

$\Leftrightarrow 48(x-4)+48(x+4)=5(x-4)(x+4)$

$\Leftrightarrow 48x-192+48x+192=5x^2-80$

$\Leftrightarrow 5x^2-96x-80=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=20 \\ x=-4 \end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-4$ vì không thỏa điều kiện)

Vậy, vận tốc canô là 20 (km/h).

Bài 5:

Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật $(x>0)$.

Gọi $x+10$ (m) là chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật.

Diện tích mảnh đất là: $x(x+10)$ m^2.

Theo đề, diện tích mảnh đất bằng 1200 m^2 nên ta có phương trình:

$x(x+10)=1200 \Leftrightarrow x^2+x-1200=0$

Giải phương trình ta được $x=30; x=-40$ (loại nghiệm $x=-40$ vì không thỏa mãn điều kiện).

Vậy, chiều rộng của mảnh đất là 30 m và chiều dài của mảnh đất là 40 m.

Bài 6: Gọi x là số dãy ghế lúc đầu $\left(x\in\mathbb{N}^*, x>2\right)$

Số dãy ghế lúc sau là $x-2.$

Số người ngồi trên mỗi dãy ghế lúc đầu là: $\dfrac{70}{x}$ (người)

Số người ngồi trên mỗi dãy ghế lúc sau là: $\dfrac{70}{x-2}$ (người)

Theo đề, số người trên mỗi dãy ghế lúc sau nhiều hơn lúc trước 4 người nên ta có phương trình:

$\dfrac{70}{x-2}-\dfrac{70}{x}=4 \Leftrightarrow 70x-70x+140=4x(x-2)$

$\Leftrightarrow 4x^2-8x-140=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-5 \end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-5$ vì không thỏa điều kiện).

Vậy, lúc đầu phòng họp có 7 ghế dài.

Bài 7:

Gọi x (cm) là chiều dài cạnh đấy của hình tam giác.($x>0$)

Diện tích tam giác được tính bởi công thức sau: $S=\dfrac{1}{2}x.h \Rightarrow h=\dfrac{2S}{x}$

Lúc đầu: diện tích tam giác bằng 180 cm^2 nên suy ra chiều cao là: $\dfrac{2.180}{x}=\dfrac{360}{x}$ (cm)

Khi có sự thay đổi: chiều dài cạnh đáy là: $x+4$. Do diện tích không đổi bằng 180 cm^2 nên suy ra chiều cao mới là: $\dfrac{2.180}{x+4}=\dfrac{360}{x+4}$ (cm)

Theo đề, chiều cao mới giảm đi 1 cm so với lúc đầu nên ta có phương trình: $\frac{360}{x}-\frac{360}{x+4}=1\Leftrightarrow x^2+4x-1440=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=36\\x=-40\end{array}\right.$ (loại nghiệm $x=-40$)

Vậy, chiều dài cạnh đáy của hình tam giác là 36 cm.

Bài 8:

Gọi x (cm) là chiều dài cạnh góc vuông thứ nhất.($x>0$)

Chu vi của tam giác bằng 30 cm, cạnh huyền là 13 cm, nên suy ra chiều dài cạnh góc vuông còn lại là $30-13-x=17-x$ (cm)

Áp dụng định lý Pytago bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông nên ta có phương trình: $x^2+(17-x)^2=13^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+34x+120=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12\\x=5\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Với $x=12$, suy ra độ dài cạnh kia là $17-x=5$ cm

Với $x=5$, suy ra độ dài cạnh kia là $17-x=12$ cm

Vậy, độ dài hai cạnh của tam giác vuông là 5 cm, 12 cm.

Bài 9:

Gọi x (kg/m^3) là khối lượng riêng của chất lỏng loại 1.($x>200$)

Khối lượng riêng của chất lỏng loại 2 là $x-200$ (kg/m^3)

Thể tích của chất lỏng loại 1 là $\frac{4}{x}$ (m^3)

Thể tích của chất lỏng loại 2 là $\frac{3}{x-200}$ (m^3)

Thể tích của hỗn hợp là: $\frac{7}{700}$ (m^3)

Ta có phương trình: $\frac{4}{x}+\frac{3}{x-200}=\frac{7}{700}$ hay $x^2-900x+8000=0$

Giải phương trình ta được $x=800;x=100$ loại giá trị $x=100$ vì không thỏa điều kiện.

Vậy, khối lượng riêng của chất lỏng loại 1 là 800 kg/m^3. Khối lượng riêng của chất lỏng loại 2 là 600 kg/m^3.

Bài 10.

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định của người đó ($x>0$).

Thời gian người đi xe máy từ A đến B là $\frac{75}{x}$ giờ

Thời gian người đi xe máy từ B đến A là $\frac{75}{x+5}$ giờ

Thời gian người đi xe máy từ A đến B rồi trở về A (kể cả thời gian nghỉ là) $12\,\text{h}\,20$ phút - 6 h 30 phút = 5 h 50 phút $=\dfrac{35}{6}$ giờ, ta có phương trình:

$$\frac{75}{x}+\frac{75}{x+5}+\frac{1}{3}=\frac{35}{6} \text{ hay } 11x^2-245x-750=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=25 \\ x=-\dfrac{30}{11} \end{array}\right.$$ (loại $x=\dfrac{-30}{11}$ vì không thỏa điều kiện)

Vậy, vận tốc dự định của người đó là 25 km/h.

V. ÔN TẬP CHƯƠNG 4

SƠ ĐỒ TƯ DUY CHƯƠNG 4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Công thức nghiệm

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Hệ thức Viet

(Áp dụng cho phương Trình có 2 nghiệm $\Delta \ge 0$)

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}(S) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}(P) \end{cases}$

Ứng dụng Viet

1. Cho 2 số u, v biết: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}(S) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}(P) \end{cases}$ thì u, v là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$
2. Nếu PT (*) $có\ a+b+c=0$ thì nó có nghiệm $x=1$ và nghiệm còn lại $x = \dfrac{c}{a}$
3. Nếu PT (*) có $a-b+c=0$ thì nó có nghiệm $x=-1$ và nghiệm còn lại $x = -\dfrac{c}{a}$

Mối quan hệ Giữa các nghiệm của phương trình bậc 2

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta \ge 0 \end{cases}$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$

Phương trình (*) có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta \ge 0 \\ P > 0 \end{cases}$

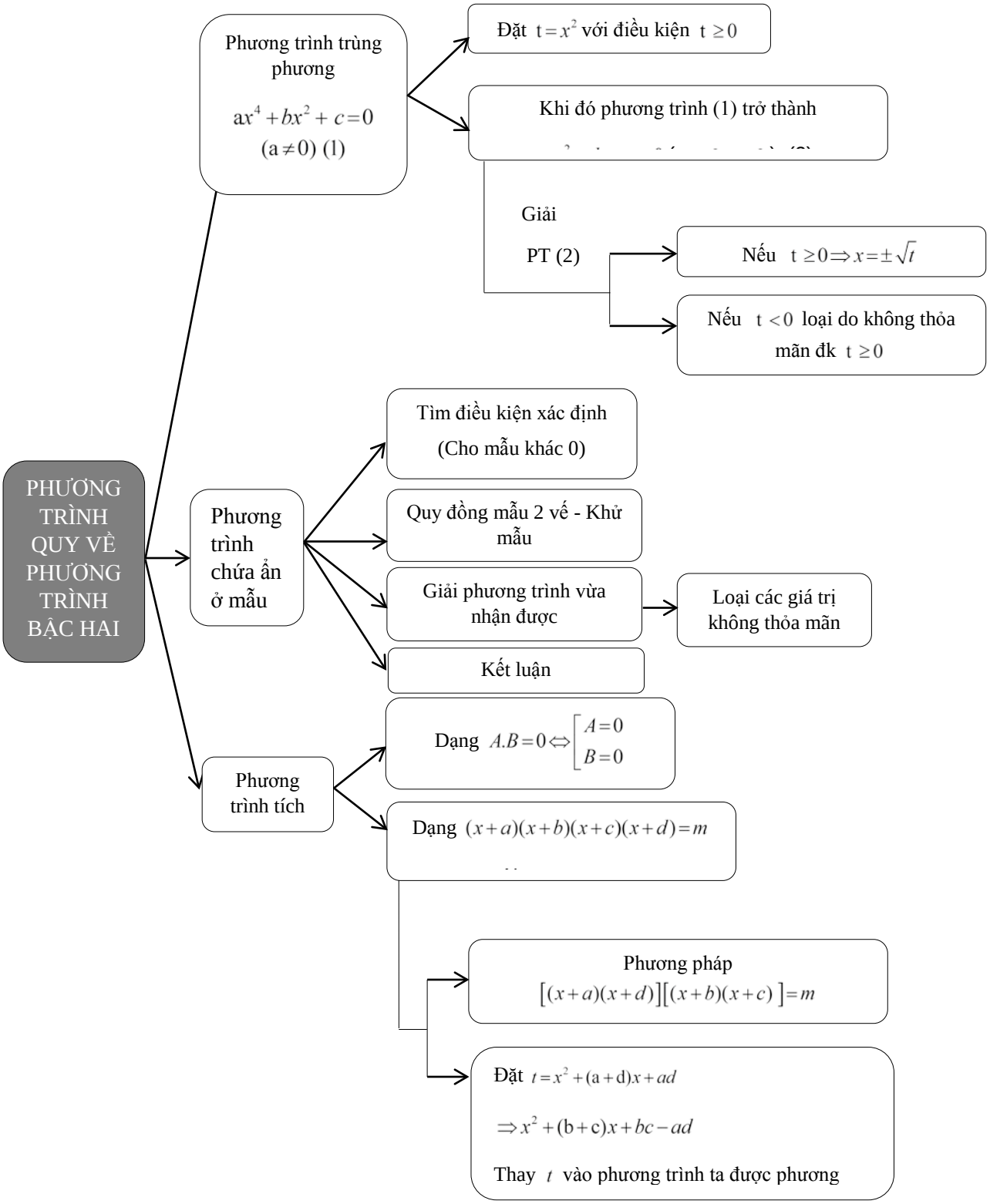
Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Ph. trình (*) có 2 nghiệm âmphân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$; P.trình (*) có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$

Những hệ thức liên quan

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$
2. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=S^2-4P$
3. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-2SP$
4. $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$
5. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}$
6. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}$


PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI
Phương trình trùng phương
$ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ (1)
Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$
Khi đó phương trình (1) trở thành
Giải PT (2)
Nếu $t\geq 0\Rightarrow x=\pm\sqrt{t}$
Nếu $t<0$ loại do không thỏa mãn đk $t\geq 0$
Phương trình chứa ẩn ở mẫu
Tìm điều kiện xác định (Cho mẫu khác 0)
Quy đồng mẫu 2 vế - Khử mẫu
Giải phương trình vừa nhận được
Loại các giá trị không thỏa mãn
Kết luận
Phương trình tích
Dạng $A.B=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\B=0\end{array}\right.$
Dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$
Phương pháp $[(x+a)(x+d)][(x+b)(x+c)]=m$
Đặt $t=x^2+(a+d)x+ad$
$\Rightarrow x^2+(b+c)x+bc-ad$
Thay t vào phương trình ta được phương

Phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0$

Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\ge 0$

Khi đó PT (1) trở thành PT (2): $at^2+bt+c=0$ với ($a\ne 0, t\ge 0$)

Với $\Delta=b^2-4ac$

Số nghiệm của phương trình

PT(2) vô nghiệm: $\Delta<0$

PT (2) có nghiệm: $\begin{cases}\Delta=0\\ \left[\begin{array}{l}S=0\\ P=0\end{array}\right.\end{cases}$

PT (2) có 2 nghiệm: $\begin{cases}\Delta>0\\ S<0\\ P>0\end{cases}$

PT (1) có 2 nghiệm phân biệt

- PT(2) có nghiệm kép dương ($t_1=t_2>0$): $\begin{cases}\Delta=0\\ S>0\end{cases}$
- hoặc PT(2) ... dấu $t_1<0<t_2$: ac<0

PT(1) có 3 nghiệm phân

PT (2) có 2 nghiệm phân biệt gồm ($t_1=0; t_2>0$): $\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P=0\end{cases}$

PT (1) có 1 nghiệm

- PT (2) có nghiệm kép âm ($t_1=t_2=0$): $\begin{cases}\Delta=0\\ S<0\\ P>0\end{cases}$
- hoặc PT (2) có nghiệm phân biệt gồm 1 nghiệm âm,1 nghiệm bằng 0 ($t_1<0; t_2=0$): $\begin{cases}\Delta=0\\ S<0\\ \left[\begin{array}{l}P=0\\ f(0)=0\end{array}\right.\end{cases}$

PT (1) có 4 nghiệm phân biệt

PT (2) có 2 nghiệm phân biệt: $\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}$

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Cho hàm số :

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$(a \neq 0)$.Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số, ta biến đổi về dạng

$$y = f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Nếu a>0 thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$$

khi $x = \frac{-b}{2a}$

Nếu a<0 thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Khi $x = \frac{-b}{\ldots}$

Dùng bất đẳng thức Cauchy(Cô si) :với hai số không âm x, y bất kỳ ta luôn có :

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ .Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x=y

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA PARABOL (P) $y = ax^2$ **VÀ ĐƯỜNG THẲNG (d)** y=kx+b

Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ (P)

Đồ thị là Parabol (P).

Có đỉnh là O(0,0), có trục đối xứng là Oy

Đi qua các điểm :kẻ bảng giá trị

x	$-x_0$	$-x_1$	0	x_1	x_0
y	y_0	y_1	0	y_1	y_0

Vẽ đồ thị hàm số y=kx+b(d)

Đồ thị là đường thẳng (d)

Đi qua 2 điểm (có thể cho 2 điểm tùy ý khác Nhau là được chứ không nhất thiết phải cắt Ox; Oy) ;A(0;b) và B $(\frac{-b}{\ }; 0)$

Phương trình hoành độ giao điểm :

$ax^2 = kx + b$

$\Leftrightarrow ax^2 - kx - b = 0$ (1)

Tính Δ của PT hoành độ giao điểm.

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ PT(1) có hai nghiệm

Nghiệm x_1 — Thay x_1 — $y_1 = kx_1 + b$ — Giao điểm

Nghiệm x_2 — Thay x_2 — $y_2 = kx_2 + b$ — Giao điểm

Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ PT(1) vô nghiệm — (P) và (d) không có điểm chung

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ PT(1) có nghiệm — Nghiệm — Thay x_0 — $y_0 = kx_0 + b$ — Tiếp điểm

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1: Cho hàm số $y=x^2$ (P) và hàm số $y=5x-6$ (d).

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d).

Bài 2: Giải phương trình:

a. $5(x-2)^2+4=(x+8)^2$

b) $\frac{(x+3)^2}{5}+1-\frac{(3x-1)^2}{5}=\frac{x(2x-3)}{2}$

c) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+3}=1$

d) $4-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x+7)}{x-1}-\frac{x+11}{x^2-1}$

Bài 3: Giải phương trình:

a) $x^3-x^2-4x+4=0$

b) $2x^3-5x^2+5x-2=0$

c) $x^3+8-4x^2-2x=0$

d) $x^3-4x^2+x+6=0$

Bài 4: Giải phương trình:

a. $x^4+2x^2-3=0$

b) $x^4-25x^2+144=0$

c) $9x^4+5x^2-4=0$

d) $x^4-48x^2-49=0$

Bài 5: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

a) $(x+11)^2+(x+11)-42=0$

b) $(x^2-3x+5)^2-(x^2-3x+5)=2$

c) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x-\frac{1}{x}\right)+6=0$

d) $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$

Bài 6: Tìm hai số u, v trong các trường hợp sau:

a. $u+v=13$ và $u.v=42$

b. $u-v=15$ và $u.v=-56$

c. $u^2+v^2=130$ và $u.v=-63$

Bài 7: Cho các hàm số $y=-\frac{3}{2}x^2\ (P)$ và hàm số $y=-2x+\frac{1}{2}\ (d)$.

a. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d).

b. Tìm tọa độ những điểm thuộc đồ thị (P) thỏa tính chất tổng hoành độ và tung độ của điểm đó bằng 4.

Bài 8: Cho phương trình: $x^2-(2k-1)x+2k-2=0\ (1)$

a. Giải phương trình (1) khi $k=-2$.

b. Tìm giá trị của k để phương trình (1) có một nghiệm $x_1=-2$. Tìm nghiệm x_2.

c. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

d. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào k.

Bài 9: Một phân xưởng theo kế hoạch phải dệt 3000 tấm thảm trong thời gian nhất định. Trong 8 ngày đầu họ đã thực hiện đúng kế hoạch đề ra, những ngày còn lại họ đã dệt vượt mức mỗi ngày 10 tấm thảm, nên đã hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải dệt bao nhiêu tấm thảm?

Bài 10: Lúc 7 giờ 30 phút một ô tôt khởi hành từ A đến B, tại B người đó nghỉ lại 30 phút rồi tiếp tục lên đường để đến C lúc 10 giờ 15 phút. Biết quãng đường AB dài 30km, quãng đường BC dài 50km, vận tốc của ô tô trên quãng đường AB lớn hơn vận tốc cảu nó trên quãng đường BC là 10km/h. Tính vận tốc của ô tô trên quãng đường AB, BC.

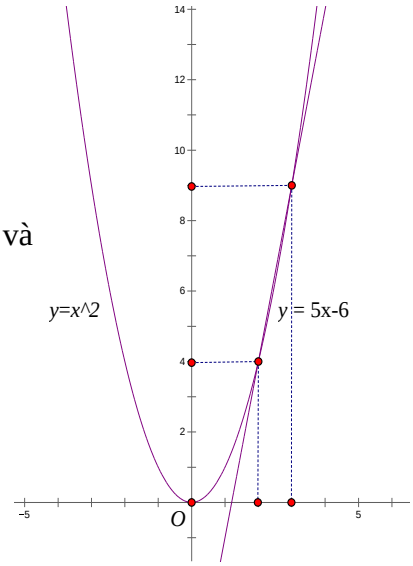
HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1: Cho các hàm số $y=x^2\ (P)$ và hàm số $y=5x-6\ (d)$.

a. Đồ thị hàm số $y=x^2$ là parabol (P) có đỉnh là $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy và đi qua các điểm sau :

x	-1	0	1
$y=x^2$	1	0	1

Đồ thị hàm số $y=5x-6$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;-6)$ và $(1;-1)$



b. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2=5x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

Giải phương trình ta được nghiệm: $x=2;\ x=3$.

Với $x=2\Rightarrow y=4$. Ta có giao điểm $(2;4)$.

Với $x=3\Rightarrow y=9$. Ta có giao điểm $(3;9)$.

Vậy, đường thẳng (d) và đồ thị (P) cắt nhau tạo hai điểm có tọa độ $(2;4)$ và $(3;9)$.

Bài 2: Giải phương trình:

a. Phương trình $5(x-2)^2+4=(x+8)^2$

$\Leftrightarrow 5(x^2-4x+4)+4=x^2+16x+64$

$\Leftrightarrow x^2-9x-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=10\end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-1;\ x=10$.

b. Phương trình $\frac{(x+3)^2}{5}+1-\frac{(3x-1)^2}{5}=\frac{x(2x-3)}{2}$

$\Leftrightarrow 2(x+3)^2+10-2(3x-1)^2=5x(2x-3)$

$\Leftrightarrow 26x^2-39x-26=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=2;\ x=-\frac{1}{2}$.

c. Điều kiện: $x\neq\pm3$

Phương trình $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+3}=1$

$\Leftrightarrow\frac{1+2(x+3)+3(x-3)}{x^2-9}=1\Leftrightarrow 1+2(x+3)+3(x-3)=x^2-9$

$\Leftrightarrow x^2-5x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5+\sqrt{53}}{2}\\x=\frac{5-\sqrt{53}}{2}\end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{5+\sqrt{53}}{2};\ x=\frac{5-\sqrt{53}}{2}$.

d. Điều kiện: $x\neq\pm1$

Phương trình $4-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x+7)}{x-1}-\frac{x+11}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow\frac{4(x^2-1)}{x^2-1}-\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{2(x+7)(x+1)}{x^2-1}-\frac{x+11}{x^2-1}$

$\Rightarrow 4(x^2-1)-(x-1)^2=2(x+7)(x+1)-x-11$

$\Leftrightarrow 4x^2-4-x^2+2x-1=2x^2+15x+3$

$\Leftrightarrow x^2-13x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{13+\sqrt{201}}{2}\\x=\frac{13-\sqrt{201}}{2}\end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{13+\sqrt{201}}{2}; x=\frac{13-\sqrt{201}}{2}$.

Bài 3: Giải phương trình:

a. Phương trình $x^3-x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-1)-4(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-2; x=2; x=1$

b. Phương trình $2x^3-5x^2+5x-2=0\Leftrightarrow 2(x^3-1)-5x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(x^2+x+1)-5x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[2(x^2+x+1)-5x\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-3x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x^2-3x+2=0 \end{array}\right.$

Giải: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Giải: $2x^2-3x+2=0$, có $\Delta=3^2-4.2.2=9-16=-7<0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$.

c. Phương trình $x^3+8-4x^2-2x=0\Leftrightarrow (x^3-2x)-(4x^2-8)=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-2)-4(x^2-2)=0\Leftrightarrow (x-4)(x^2-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-\sqrt{2}; x=\sqrt{2}; x=4$.

d. Phương trình $x^3-4x^2+x+6=0\Leftrightarrow x^3-2x^2-2x^2+4x-3x+6=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-2)-2x(x-2)-3(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=2; x=-1; x=3$.

Bài 4: Giải phương trình:

a. Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $x^4+2x^2-3=0\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$ nhận nghiệm $t=1$ loại nghiệm $t=-3$ vì không thỏa điều kiện.

Với $t=1\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=-1; x=1$.

b. Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\geq 0$.

Phương trình $x^4-25x^2+144=0\Leftrightarrow t^2-25t+144=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=16\\t=9\end{array}\right.$ thỏa điều kiện.

Với $t=16\Rightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm4$

Với $t=9\Rightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm3$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S=\{-4;-3;3;4\}$

c. Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\geq0$.

Phương trình $9x^4+5x^2-4=0\Leftrightarrow9t^2+5t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\dfrac{4}{9}\end{array}\right.$ loại nghiệm $t=-1$ vì không thỏa điều kiện.

Với $t=\dfrac{4}{9}\Rightarrow x^2=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2}{3}$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right\}$

d. Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\geq0$.

Phương trình $x^4-48x^2-49=0\Leftrightarrow t^2-48t-49=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=49\end{array}\right.$ loại nghiệm $t=-1$ vì không thỏa điều kiện.

Với $t=49\Rightarrow x^2=49\Leftrightarrow x=\pm7$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S=\{7;-7\}$

Bài 5: Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a. Đặt $t=x+11$.

Phương trình $(x+11)^2+(x+11)-42=0\Leftrightarrow t^2+t-42=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6\\t=-7\end{array}\right.$

Với $t=6\Rightarrow x+11=6\Leftrightarrow x=-5$

Với $t=-7\Rightarrow x+11=-7\Leftrightarrow x=-18$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S=\{-18;-5\}$.

b. Đặt $t=x^2-3x+5$.

Phương trình $\left(x^2-3x+5\right)^2-\left(x^2-3x+5\right)=2\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow x^2-3x+5=-1\Leftrightarrow x^2-3x+6=0$ có $\Delta=3^2-4.1.6=-15<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $t=2\Rightarrow x^2-3x+6=2\Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ có $\Delta=3^2-4.1.3=-3<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

c. Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$.

Phương trình $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$. Giải phương trình ta có hai nghiệm là

$x = 1 + \sqrt{2};\ x = 1 - \sqrt{2}$.

Với $t = 3 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$. Giải phương trình ta có hai nghiệm là

$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2};\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right\}$

d. Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$.

Phương trình $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t + 3 = 0$ có $\Delta = 1^2 - 4.2.3 = -23 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6: Tìm hai số u, v trong các trường hợp sau:

a. $u + v = 13$ và $u.v = 42$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - 13X + 42 = 0$

Phương trình có nghiệm: $X = 7;\ X = 6$

Vậy, hai số cần tìm là $\left\{\begin{array}{l} u = 7 \\ v = 6 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} u = 6 \\ v = 7 \end{array}\right.$

b. $u - v = 15$ và $u.v = -56$

Ta có: $u - v = 15 \Leftrightarrow u + (-v) = 15$ và $u.v = -56 \Rightarrow u.(-v) = 56$

Suy ra $u, -v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 15X + 56 = 0$

Phương trình có nghiệm: $X = 8;\ X = 7$

Suy ra $\left\{\begin{array}{l} u = 8 \\ -v = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 8 \\ v = -7 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} u = 7 \\ -v = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 7 \\ v = -8 \end{array}\right.$

Vậy, hai số cần tìm là: $\left\{\begin{array}{l} u = 8 \\ v = -7 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} u = 7 \\ v = -8 \end{array}\right.$

c. $u^2 + v^2 = 130$ và $u.v = -63$

Ta có: $u^2 + v^2 = 130 \Leftrightarrow (u + v)^2 - 2uv = 130$

$\Leftrightarrow (u+v)^2-2(-63)=130 \Leftrightarrow (u+v)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=2 \\ u+v=-2 \end{array}\right.$

TH1: Với $u+v=2$ và $u.v=-63$

Suy ra u, v là hai nghiệm của phương trình: $X^2-2X-63=0$

Phương trình có nghiệm: $X=9; X=-7 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u=9 \\ v=-7 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} u=-7 \\ v=9 \end{array}\right.$

TH2: Với $u+v=-2$ và $u.v=-63$

Suy ra u, v là hai nghiệm của phương trình: $X^2+2X-63=0$

Phương trình có nghiệm: $X=7; X=-9 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u=7 \\ v=-9 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} u=-9 \\ v=7 \end{array}\right.$

Vậy, hai số cần tìm là: $\left\{\begin{array}{l} u=9 \\ v=-7 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} u=-7 \\ v=9 \end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l} u=7 \\ v=-9 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} u=-9 \\ v=7 \end{array}\right.$

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{-3x^2}{2}(P)$ và hàm số $y=-2x+\dfrac{1}{2}(d)$

a) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{-3x^2}{2}=-2x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Với $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{-3}{2}$ ta có tọa độ của giao điểm là $\left(1;\dfrac{-3}{2}\right)$

Với $x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y=\dfrac{-1}{6}$ ta có tọa độ của giao điểm là $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-1}{6}\right)$

Vậy (P) cắt (d) tại hai điểm có tọa độ là $\left(1;\dfrac{-3}{2}\right);\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-1}{6}\right)$

b) Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị hàm số (P) có tổng bình phương hoành độ và tung độ bằng $\dfrac{13}{4}$

$M \in (P) \Rightarrow y_0=\dfrac{-3}{2}x_0^2$

Theo bài ra ta có $x_0^2+y_0^2=\dfrac{13}{4} \Leftrightarrow x_0^2+\left(\dfrac{-3}{2}x_0^2\right)^2=\dfrac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}x_0^4+x_0^2-\frac{13}{4}=0$$

Đặt $t=x_0^2, t\ge 0$ Phương trình trở thành: $\frac{9}{4}t^2+t-\frac{13}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ \ (tm)\\ t=\frac{-13}{9}(l)\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow y_0=\frac{-3}{2}\\ x_0=-1\Rightarrow y_0=\frac{-3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy ta có hai điểm thỏa mãn đề bài là $\left(1;\frac{-3}{2}\right);\left(-1;\frac{-3}{2}\right)$

Bài 8. Cho phương trình $x^2-(2k-1)x+2k-2=0\ (1)$

a) Khi $k=-2$ ta có phương trình $x^2+5x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-6\end{array}\right.$

b) Tìm giá trị của k để phương trình (1) có một nghiệm $x_1=-2$. Tìm nghiệm x_2

Phương trình (1) có một nghiệm $x_1=-2\Rightarrow(-2)^2-(2k-1)(-2)+2k-2=0$

$\Leftrightarrow 4+4k-2+2k-2=0\Leftrightarrow k=0$

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có $x_1+x_2=-1\Rightarrow x_2=-1-x_1=-1+2=1$

Vậy với $k=0$ thì phương trình có nghiệm $x_1=-2$ và nghiệm còn lại là $x_2=1$

c) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm này không phụ thuộc vào k

Bài 9. Gọi $x,\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$ là số tấm thảm phân xưởng làm được theo kế hoạch.

Thời gian hoàn thành công việc theo kế hoach là $\frac{3000}{x}$ (ngày)

Trong 8 ngày đầu phân xưởng dệt được $8x$ (tấm thảm), trong những ngày còn lại, mỗi ngày phân xưởng dệt được: $x+10$ tấm thảm và cần hoàn thành $3000-8x$ số tấm thảm còn lại. Nên số ngày cần thiết để phân xưởng dệt hết số tấm thảm còn lại là: $\frac{3000-8x}{x+10}$ (ngày)

Theo để bài ta có phương trình sau: $\frac{3000}{x}=8+\frac{3000-8x}{x+10}+2$

Hay $x^2+50x-15000=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=100\ \ (tm)\\ x=-150(l)\end{array}\right.$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng cần dệt 100 tấm thảm.

Bài 10.

Gọi $x\left(km/h\right)$ là vận tốc của ô tô trên quãng đường AB và vận tốc của ô tô trên quãng đường BC là $x+10\left(km/h\right)$

Thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là $\frac{30}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là: $\frac{50}{x+10}$ (giờ)

Tổng thời gian ô tô đi từ A đến B, nghỉ tại B và từ B đến C là: 10 giờ 15 phút $-$ 7 giờ 30 phút là 2 giờ 45 phút $=\frac{11}{4}$ giờ, nên ta có phương trình

$$\frac{30}{x}+\frac{1}{2}+\frac{50}{x+10}=\frac{11}{4}\Rightarrow 9x^2-230x-1200=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=30\ \ \left(tm\right)\\x=\frac{-40}{9}\left(l\right)\end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của ô tô đi trên đoạn đường AB là $30km/h$, vận tốc của ô tô đi trên đoạn đường BC là $50km/h$

VI. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 4

Họ và tên: Lớp:	KIỂM TRA 1 TIẾT CHƯƠNG IV MÔN :TOÁN Ngày kiểm tra:	Điểm

ĐỀ SỐ 01

I. TRẮC NGHIỆM (4 điểm) ***Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:***

Câu 1. Tổng và tích các nghiệm của phương trình $4x^2+2x-5$ là

A. $x_1+x_2=\frac{1}{2};x_1x_2=\frac{5}{4}$ B. $x_1+x_2=\frac{-1}{2};x_1x_2=\frac{-5}{4}$

C. $x_1+x_2=\frac{-1}{2};x_1x_2=\frac{5}{4}$ D. $x_1+x_2=\frac{1}{2};x_1x_2=\frac{-5}{4}$

Câu 2. Phương trình $x^2-2x+m=0$ có nghiệm khi

A. $m\ge -1$ B. $m\ge 1$ C. $m\le 1$ D. $m\le -1$

Câu 3. Phương trình $2x^2-5x+3=0$ có nghiệm là:

A. $x_1=1;x=\frac{3}{2}$ B. $x_1=-1;x=\frac{3}{2}$ C. $x_1=-1;x=\frac{-3}{2}$ D. $x=1$

Câu 4. Hàm số $y=\frac{-3}{4}x^2$. Khi đó $f(-2)$ bằng

A. 3 B. -3 C. $\frac{3}{4}$ D. 6

Câu 5. Tổng hai số bằng 7, tích hai số bằng 12. Khi đó hai số đó là nghiệm của phương trình

A. $x^2-12x+7=0$ B. $x^2+12x-7=0$

C. $x^2-7x-12=0$ D. $x^2-7x+12=0$

Câu 6. Phương trình $3x^2+5x-1=0$ có Δ bằng

A. $\sqrt{37}$ B. -37 C. 37 D. 13

Câu 7. Phương trình $5x^2+8x-3=0$

A. Có nghiệm kép. B. Có hai nghiệm trái dấu

C. Có hai nghiệm cùng dấu. D. Vô nghiệm

Câu 8. Hàm số $y=-2x^2$

A. Hàm số luôn đồng biến

B. Hàm số luôn nghịch biến

C. Hàm số đồng biến khi $x>0$, nghịch biến khi $x<0$

D. Hàm số đồng biến khi $x<0$, nghịch biến khi $x>0$

II. TỰ LUẬN (6 điểm)

Bài 1. (2 điểm) Cho hàm số $y=x^2\left(P\right)$ và $y=-2x+3\left(d\right)$

a) Vẽ hai đồ thị $\left(P\right),\left(d\right)$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của $\left(P\right),\left(d\right)$ bằng phương pháp đại số

Bài 2. (2 điểm) Giải phương trình

a) $3x^2-8x+5=0$ b) $\left(2x-1\right)\left(x-3\right)=-2x+2$

Bài 3. (2 điểm) Cho phương trình $2x^2-7x-1=0$. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình

a) Không giải phương trình, hãy tính $x_1+x_2;x_1x_2$

b) Tính giá trị của biểu thức $A=12-10x_1x_2+x_1^2+x_2^2$

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ SỐ 01

I. TRẮC NGHIỆM (2 điểm) Mỗi câu chọn đúng, nối thích hợp được $0,25$ điểm.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	C	A	B	D	C	B	D

II. Tự luận (8 điểm)

Bài 1 (2 điểm) Mỗi phần 1 điểm

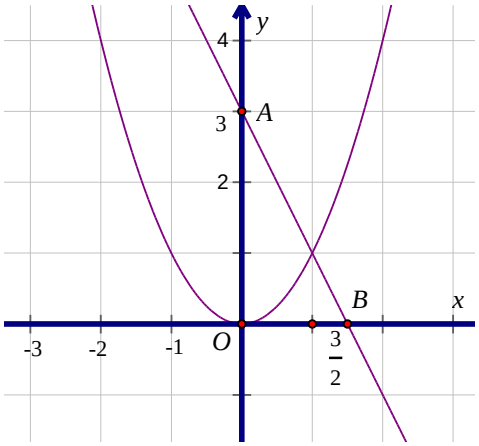
***)** Hàm số $y=x^2$: Bảng giá trị tương ứng $\left(x,y\right)$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

*) Hàm số $y=-2x+3$

- Giao với trục Oy tại $A\left(0;3\right)$. Giao với trục $Ox:B\left(\frac{3}{2};0\right)$

- Đường thẳng AB là đồ thị của hàm số $y=-2x+3$



b) Tìm đúng hai giao điểm bằng phương pháp đại số $\left(1;1\right);\left(-3;9\right)$

Bài 2. (2 điểm) Mỗi câu 1 điểm

a) $3x^2-8x+5=0$ có $\Delta'=1>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x_1=\frac{4+1}{3}=\frac{5}{3};x_2=\frac{4-1}{3}=1$

b) $(2x-1)(x-3)=-2x+2\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0$

Có $\Delta=17>0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4};x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$

Bài 3. (2 điểm) Mỗi câu 1 điểm

a) Ta có $a.c=-2<0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi ét ta có $x_1+x_2=\frac{7}{2};x_1x_2=\frac{-1}{2}$

$A=12-10x_1x_2+x_1^2+x_2^2$

b) $=12-12x_1x_2+(x_1+x_2)^2$

$=12-12.\frac{-1}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2=30,25$

Họ và tên: Lớp:	KIỂM TRA 1 TIẾT CHƯƠNG IV MÔN :TOÁN Ngày kiểm tra:	Điểm

ĐỀ SỐ 02

I. TRẮC NGHIỆM (3 điểm) ***Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:***

Câu 1. Đồ thị hàm số $y=x^2$ đi qua điểm

A. $(0;1)$ B. $(-;1)$ C. $(1;-1)$ D. $(1;0)$

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=ax^2$ đi qua điểm $A(2;3)$. Khi đó a bằng

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 4 D. $\frac{1}{4}$

Câu 3. Phương trình $(m+1)x^2-2mx+1=0$ là phương trình bậc hai khi

A. $m=1$ B. $m\neq -1$

C. $m=0$ D. Mọi giá trị của m

Câu 4. Phương trình $x^2-3x+7=0$ có Δ bằng

A. 2 B. -19 C. -37 D. 16

Câu 5. Cho phương trình $0,1x^2-0,6x-0,8=0$. Khi đó

A. $x_1+x_2=0,6;x_1x_2=8$ B. $x_1+x_2=6;x_1x_2=0,8$

C. $x_1+x_2=6;x_1x_2=8$ D. $x_1+x_2=6;x_1x_2=-8$

Câu 6. Phương trình $x^2+5x-6=0$ có hai nghiệm là

A. $x_1=1;x_2=-6$ B. $x_1=1;x_2=6$

C. $x_1=-1;x_2=6$ D. $x_1=-1;x_2=-6$

II. TỰ LUẬN (7 điểm)

Bài 1. (3 điểm) Giải phương trình

a) $x^2+6x+8=0$ b) $3x^4-15x^2+12=0$

Bài 2. (2 điểm) Cho hàm số $y=x^2\left(P\right)$ và $y=x+2\left(d\right)$

a) Vẽ hai đồ thị $\left(P\right),\left(d\right)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của $\left(P\right),\left(d\right)$

Bài 3. (2 điểm) Cho phương trình $x^2+2x+m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1-x_2=4$

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ SỐ 02

I. TRẮC NGHIỆM (3 điểm) Mỗi câu chọn đúng, nối thích hợp được $0,5$ điểm.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	A	B	B	D	A

II. Tự luận (8 điểm)

Bài 1 (2 điểm) Mỗi phần 1,5 điểm

a) $x^2+6x+8=0$

có $\Delta=1\Rightarrow x_1=-2;x_2=-4$

b) $3x^4-15x^2+12=0$

Đặt $t=x^2,t\ge0$, ta có phương trình $3t^2-15t+12=0$

Vì $a+b+c=3-15+12$ nên phương trình có hai nghiệm $t_1=1;t_2=4$

+) $t_1=1\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$

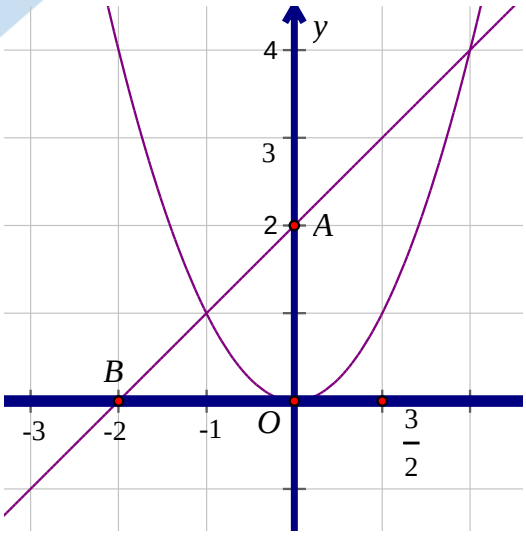
+) $t_2=4\Rightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$

Bài 2. (2 điểm) Mỗi ý một điểm

a) Vẽ đồ thị hai hàm số $y=x^2;y=x+2$

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4

x	0	-2
$y=x+2$	2	0



b) Tọa độ giao điểm của hai đồ thị là $M\left(-1;1\right)$ và $N\left(2;4\right)$

Bài 3. (2 điểm)

Ta có $\Delta = 2 - m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

Theo định lý Vi ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \ \left(1\right) \\ x_1 x_2 = m - 1 \ \left(2\right) \end{cases}$

Từ $\left(1\right)$ và $x_1 - x_2 = 4$ ta có $x_1 = 1; x_2 = -3$ thay vào $\left(2\right)$ ta có $m = -2$ (thỏa mãn điều kiện)

V. ĐỀ THI HỌC KÌ II- MÔN TOÁN LỚP 9

Họ và tên: Lớp:	KIỂM TRA HỌC KÌ II TOÁN 9 MÔN :TOÁN Ngày kiểm tra:	Điểm

ĐỀ SỐ 01

Bài 1. (1,5 điểm)

a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ: $\left(P\right): y = x^2, \left(d\right): y = 2x + 3$

b) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đồ thị trên.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$

Bài 3. (2,5 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 + 7x - 4 = 0$. Không giải phương trình hãy tính $x_1 + x_2; x_1 x_2$

b) Một người dự định đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau $90 km$. Vì có việc gấp phải điến B trước dự định 45 phút nên người ấy phải tăng tốc lên mỗi giờ $10 km$. Hãy tính vận tốc mà người đí dự định đi.

Bài 4. (4, 0 điểm)

Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn $(O;6cm)$, kẻ hai tiếp tuyến MN, MP với đường tròn $(N, P \in (O))$ và cát tuyến MAB của (O) sao cho $AB = 6cm$

a) Chứng minh rằng: $OPMN$ là tứ giác nội tiếp,

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN biết $MO = 10cm$

c) Gọi H là trung điểm của AB. So sánh $\widehat{MON}$ và $\widehat{MHN}$

d) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB với dây AB của hình tròn tâm O đã cho.

ĐÁP ÁN- HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ SỐ 01

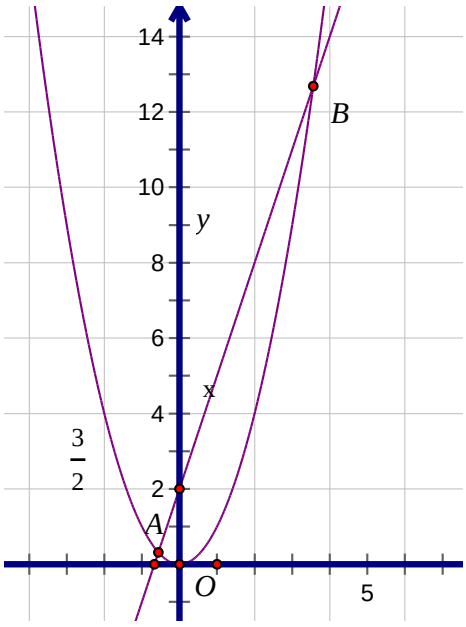
Đáp án	Điểm
Bài 1 **a)** Vẽ đồ thị	**1,5 điểm**

X	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

0,25

x	0	$\frac{-3}{2}$
$y = 2x + 3$	3	0

0,25



0,5

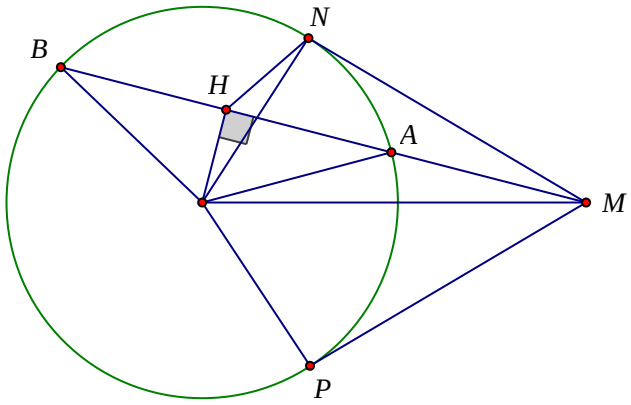
b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Có $a - b + c = 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \end{array}\right.$

0,25

Vậy tọa độ giao điểm là $A(-1;1), B(1;9)$.	
Bài 2. **a)** $x^2-5x+3=0$ Có $\Delta=13>0\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}; x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ b) $\begin{cases}x+3y=0\\2x+5y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6y=8\\2x+5y=7\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\2x+5y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$	**2,0 điểm** 0,5 0,5 1,0
Bài 3. **a)** Phương trình có $a.c=-4<0\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 Theo định lý Vi ét ta có: $x_1+x_2=-7; x_1x_2=-4$ b) Gọi $x(km/h)$ là vận tốc dự định đi $(x>0)$ $x+10$ là vận tốc thực tế đi Thời gian thực tế đi là $\dfrac{90}{x+10}(h)$ Vì thời gian thực tế đến trước thời gian dự định là 45 phút nên ta có phương trình $\dfrac{90}{x}-\dfrac{90}{x+10}=\dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow x^2+10x-1200=0$ Có $\Delta'=1225>0\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=35\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-5+35}{1}=30(tm)\\x_2=\dfrac{-5-35}{1}=-40(l)\end{array}\right.$ Vậy vận tốc dự định đi là $30km/h$	**2,5 điểm** 0,5 0,5 0,25 0,5 0,25 0,5
Bài 4. Vẽ hình đúng	**4,0 điểm** 0,5



1,0

0,5

a) Tứ giác $PMNO$ có $\widehat{P}=90°,\widehat{N}=90°$ (Tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{P}+\widehat{N}=180° \Rightarrow$ tứ giác $PMNO$ nội tiếp 1,0

b) Tính độ dài MN

Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông MNO ta có

$MN=\sqrt{MO^2-NO^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8cm$

c) Vì H là trung điểm của AB nên $OH\perp AB$ 1,0

$\Rightarrow \widehat{OHM}=\widehat{ONM}=90°$

$\widehat{OHM},\widehat{ONM}$ cùng nhìn đoạn OM dưới một góc vuông nên tứ giác $MNHO$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MHN}=\widehat{MON}$ (Cùng chắn cung MN)

d) Gọi diện tích cần tính là S_{tp}

Ta có $S_{tp}=S_{qAOB}-S_{\Delta AOB}$

Có $OA=OB=AB=6cm \Rightarrow \Delta AOB$ là tam giác đều

$\Rightarrow S_{\Delta AOB}=9\sqrt{3}\approx 15,59$

Có $S_{qAOB}=\dfrac{\pi R^2 n}{360}=\dfrac{\pi.6^2.60}{360}=6\pi\approx 18,84\left(cm^2\right)$

$\Rightarrow S_{VP}=S_q-S_\Delta=6\pi-9\sqrt{3}=3\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)\approx 3,25\left(cm^2\right)$

Họ và tên: Lớp:	KIỂM TRA HỌC KÌ II TOÁN 9 MÔN :TOÁN Ngày kiểm tra:	Điểm

ĐỀ SỐ 02

Bài 1. (1,5 điểm)

a) Vẽ đồ thị của hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:

$(P):y=x^2;(d):y=2x+3$

b) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (d) và (P).

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2-5x+3=0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$

Bài 3. (2,5 điểm) Cho phương trình $x^2-mx-4=0$ (m là tham số) (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi giá trị của m

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2=5$

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1,x_2 không phụ thuộc giá trị của tham số m

Bài 4. (4,0 điểm) Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn $(O;6cm)$, kẻ hai tiếp tuyến MN,MP với đường tròn $(N,P\in(O))$ và cát tuyến MAB của (O) sao cho $AB=6cm$

a) Chứng minh rằng: $OPMN$ là tứ giác nội tiếp,

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN biết $MO=10cm$

c) Gọi H là trung điểm của AB. So sánh $\widehat{MON}$ và $\widehat{MHN}$

d) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB với dây AB của hình tròn tâm O đã cho.

----------**HẾT**----------