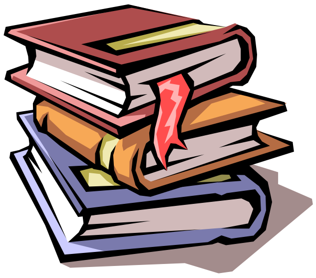
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



TUYỂN TẬP
CÁC CÂU HỎI HÌNH HỌC NĂM 2020

Tài liệu sưu tầm, ngày 21 tháng 9 năm 2021

BỘ ĐỀ CÂU CUỐI HÌNH HỌC TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN THPT CÁC TỈNH TRÊN CẢ NƯỚC

NĂM HỌC 2020-2021

PHẦN 1: CHỨNG MINH 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG, ĐỒNG QUY

CẦN THƠ

Câu 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ đường cao AH, đường tròn đường kính HB cắt AB tại D và đường tròn đường kính HC cắt AC tại E

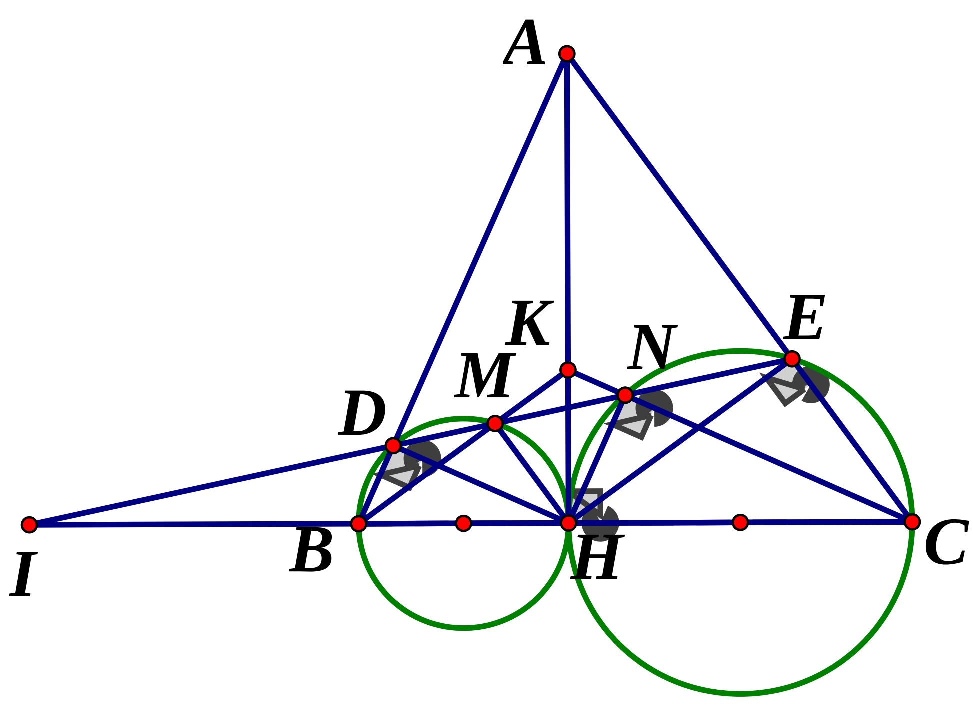
a) Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ nội tiếp

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng DE và BC. Chứng minh $IH^2 = ID.IE$

c) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng DE với đường tròn đường kính HB và đường tròn đường kính HC. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng BM và CN nằm trên đường thẳng AH.

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{BDH}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính $BH \Rightarrow \widehat{BDH} = 90^0$

$\widehat{CEH}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính $CH \Rightarrow \widehat{CEH} = 90^0$

Xét tứ giác $ADHE$ ta có: $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow ADHE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $IH^2 = ID.IE$

Ta có: $ADHE$ là tứ giác nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \angle DAH = \angle DEH$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DH}$)

Hay $\widehat{BAH} = \angle IEH$,lại có $\widehat{BAH} = \widehat{BHD}$ (cùng phụ với $\angle DBH$)

$\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{IEH}\left(= \widehat{BAH}\right)$ hay $\widehat{BHD} = \widehat{IEH}$

Xét ΔIDH và ΔIHE ta có: $\angle I$ chung; $\widehat{IHD} = \widehat{IEH}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta IDH \sim \Delta IHE(g.g) \Rightarrow \dfrac{ID}{IH} = \dfrac{IH}{IE} \Rightarrow ID.IE = IH^2(dfcm)$

c) Chứng minh giao điểm hai đường thẳng BM, CN nằm trên đường thẳng AH

Gọi giao điểm của BM và CN là K

Ta có: $\angle BMH$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BH $\Rightarrow \angle BMH = 90^0$

Hay $MH \perp BK$, chứng minh tương tự $\Rightarrow NH \perp KC$

Vì $ADHE$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{DAH} = \widehat{DEH}$ (cùng chắn cung DH) hay

$\widehat{BAH} = \widehat{MEH}$

Vì $BDMH$ là tư giác nội tiếp đường tròn đường kính BD, MH

$\Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{DBH}$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

Hay $\widehat{EMH} = \widehat{ABH}$ mà $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MBH} + \widehat{HME} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{MHE} = 90^0$ hay $MH \perp HE$

Mà $HE \perp AC \Rightarrow MH // AC$

Lại có: $MH \perp BK(cmt) \Rightarrow BK \perp AC$, chứng minh tương tự: $CK \perp AB$

$\Rightarrow K$ là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow K \in AH(dfcm)$

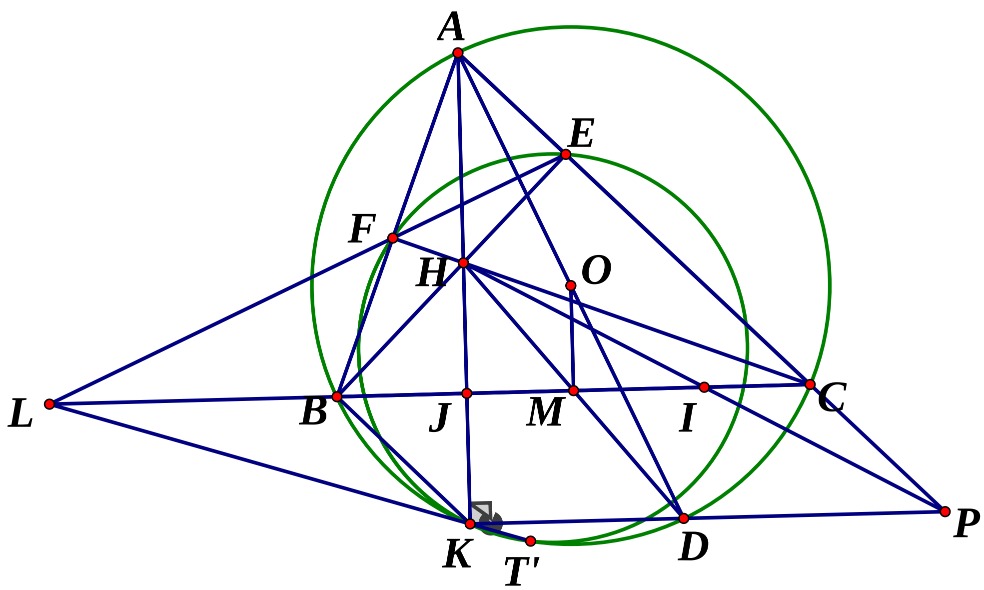
ĐỒNG NAI

Câu 5. (2,75 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm $H, AB < AC$. Vẽ đường kính AD của (O). Gọi K là giao điểm của đường thẳng AH với đường tròn $(O), K$ khác A. Gọi L, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AH với đường tròn $(O), K$ khác A. Gọi L, P lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF, AC và KD

1) Chứng minh tứ giác $EHKP$ nội tiếp đường tròn và tâm I của đường tròn này thuộc đường thẳng BC
2) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh $AH = 2OM$
3) Gọi T là giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác EFK, T khác K. Chứng minh rằng ba điểm L, K, T thẳng hàng.

ĐÁP ÁN

Câu 5.



1) **Chứng minh $EHKP$ là tứ giác nội tiếp**

Ta có: BE là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow BE \perp AC$ hay $\widehat{BEC} = \angle HEC = 90^0$

$\angle AKD$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \angle AKD = 90^0$

Xét tứ giác $EHKP$ có: $\angle HEP + \angle HKP = 90^0 + 90^0 = 180^0$, mà hai góc này đối diện nên $EHKP$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)

Có $\angle HKP = 90^0$ là góc nội tiếp chắn cung $HP \Rightarrow HP$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHKP \Rightarrow$ Tâm I của đường tròn này là trung điểm của HP

Gọi J là giao điểm của AK và BC

Ta có: $\widehat{HBJ} = \widehat{HAC}$ (cùng phụ với $\angle ACB$)

$\angle KBC = \angle KAC$ (hai góc nôi tiếp cùng chắn cung KC) hay $\angle JBK = \angle HAC$

$\Rightarrow \angle HBJ = \angle JBK \left(= \angle HAC\right) \Rightarrow BJ$ là phân giác của $\widehat{HBK}$

Ta có: AH là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC = \{J\} \Rightarrow BJ$ là đường cao ΔBHK

Xét ΔBHK ta có: BJ vừa là đường cao, vừa là đường phân giác từ đỉnh B của tam giác

$\Rightarrow \Delta BHK$ cân tại B và BJ là đường trung tuyến của $\Delta BHK \Rightarrow J$ là trung điểm của HK
Gọi I' là giao điểm của BC và HP
Ta có: $AJ \perp BC = \{J\}$ mà $KP \perp AH = \{K\} \Rightarrow BC//KP$ hay $JI'//KP$
Xét ΔHKP ta có: J là trung điểm của $HK(cmt); IJ//KP(cmt) \Rightarrow I'J$ là đường trung bình của $\Delta HKP \Rightarrow I'$ là trung điểm của $HP \Rightarrow I \equiv I'$ hay $I \in BC(dfcm)$

2) Chứng minh $AH = 2OM$

Ta có: $\angle ABD = \angle ACD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BD \\ AC \perp CD \end{cases}$

Mà $\begin{cases} AB \perp EF(gt) \\ BE \perp AC(gt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CF//BD \\ BE//CD \end{cases}$ hay $\begin{cases} BH//CD \\ CH//BD \end{cases} \Rightarrow BDCH$ là hình bình hành

$\Rightarrow BC$ cắt HD tại trung điểm mỗi đường, lại có M là trung điểm của $BC(gt)$
$\Rightarrow M$ cũng là trung điểm của HD. Xét ΔAHD ta có:
O, M lần lượt là trung điểm của $AD, HD \Rightarrow OM$ là đường trung bình ΔAHD

$$\Rightarrow \begin{cases} OM//AH \\ OM = \dfrac{1}{2}AH \end{cases} \Rightarrow AH = 2OM\,(dfcm)$$

3) Chứng minh L, K, T **thẳng hàng**

Gọi T' là giao điểm của tia LK với đường tròn (O)
Xét tứ giác $BFEC$ ta có: $\widehat{BFC} = \angle BEC = 90^0$. mà đỉnh F, E là các đỉnh kề nhau
Nên $BFEC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{LFB} = \widehat{LCE}$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)
Xét ΔLFB và ΔLCE ta có:
$\hat{L}$ chung;

$$\angle LFB = \angle LCE(cmt) \Rightarrow \Delta LFB \sim \Delta LCE(g.g) \Rightarrow \frac{LF}{LC} = \frac{LB}{LE} \Rightarrow LE.LF = LB.LC$$

Ta có tứ giác $BCT'K$ nội tiếp đường tròn (O)
$\Rightarrow \angle LKB = \angle LCT'$(góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)
Xét ΔLBK và $\Delta LCT'$ ta có: $\hat{L}$ chung; $\widehat{LKB} = \widehat{LCT'}(cmt) \Rightarrow \Delta LBK \sim \Delta LT'C(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{LB}{LT'} = \frac{LK}{LC} \Rightarrow LB.LC = LK.LT' \Rightarrow LE.LF = LK.LT'(= LB.LC) \Rightarrow \frac{LF}{LT'} = \frac{LK}{LE}$$

Xét ΔLFK và $\Delta LT'E$ ta có:

$\widehat{ELT'}$ *chung*; $\dfrac{LF}{LT'}=\dfrac{LK}{LE}\Rightarrow \Delta LFK\sim \Delta LT'E(c-g-c)\Rightarrow \widehat{LFK}=\widehat{LET'}$

$\Rightarrow EFKT'$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

$\Rightarrow T'$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác EFK

$\Rightarrow T\equiv T'\Rightarrow L,K,T$ thẳng hàng.(đpcm)

HÀ NỘI

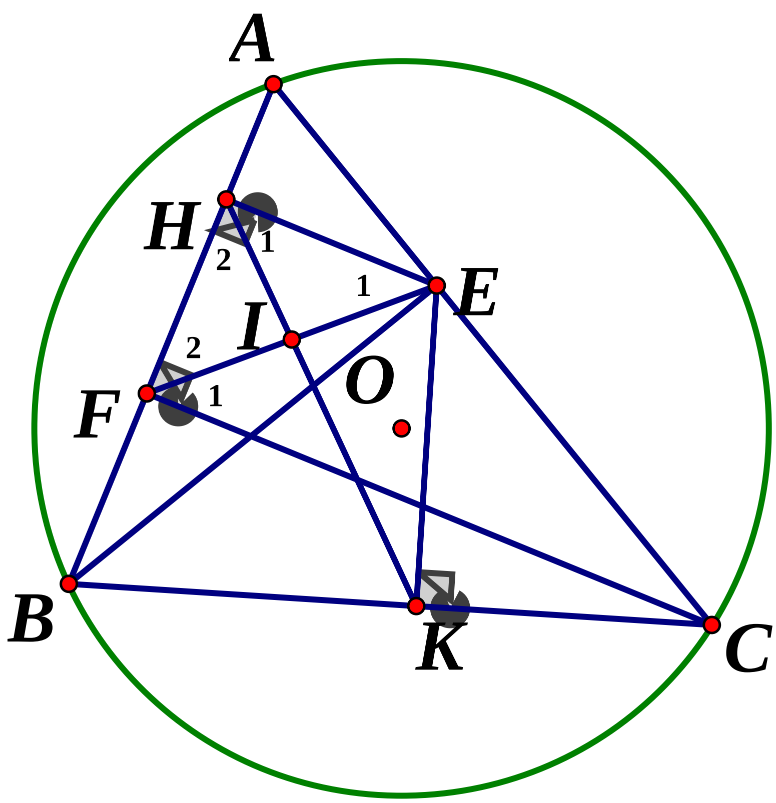
Bài IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và đường cao BE. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm E đến đường thẳng AB, BC

1) Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp
2) Chứng minh $BH.BA=BK.BC$
3) Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB và I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh ba điểm H, I, K là ba điểm thẳng hàng

ĐÁP ÁN

Bài IV.



1) **Chứng minh** $BHEK$ **là tứ giác nội tiếp**

Ta có : $\widehat{BHE}=90^0\quad (do\, EH\perp AB),\qquad \widehat{BKE}=90^0\,(do\, EK\perp BC)$

Tứ giác $BHEK$ có $\widehat{BHE}+\widehat{BKE}=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)$(dfcm)$

2) **Chứng minh** $BH.BA=BK.BC$

Theo câu a) tứ giác $BHEK$ nội tiếp nên $\widehat{BKH}=\widehat{BEH}$ (cùng chắn cung BH)

Ta có:

$\widehat{BEH}+\widehat{EBH}=90^0$ ($do\,\Delta BHE$ vuông tại H)

$\widehat{BAE}+\widehat{EBH}=90^0$ ($do\,\Delta ABE$ vuông tại E) nên $\widehat{BEH}=\widehat{BAE}$ (cùng phụ với $\widehat{EBH}$)

Mà $\widehat{BKH}=\widehat{BEH}(cmt)$ nên $\widehat{BKH}=\widehat{BAE}\left(=\widehat{BEH}\right)$

Xét ΔBHK và ΔBCA có:

$\widehat{ABC}$ chung; $\widehat{BKH}=\widehat{BAE}=\widehat{BAC}(cmt)\Rightarrow \Delta BHK\sim\Delta BCA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BC}=\dfrac{BK}{BA}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow BH.BA=BC.BK$

a) **Chứng minh** H,I,K **thẳng hàng**

Gọi I' là giao điểm của HK và EF

Xét tứ giác $BFEC$ có : $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^0(gt)$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{B_1}=\widehat{F_1}$ (cùng chắn $\widehat{EC}$)

Ta có: $EH//CF$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{F_1}=\widehat{E_1}$ (so le trong) do đó $\widehat{B_1}=\widehat{E_1}\,(1)$

Theo câu a, tứ giác $BHEK$ nội tiếp nên $\widehat{B_1}=\widehat{H_1}$ (cùng chắn $\widehat{EK}$)(2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{H_1}=\widehat{E_1}$

$\Delta I'HE$ có $\widehat{H_1}=\widehat{E_1}$ nên là tam giác cân $\Rightarrow I'H=I'E\,(3)$

Lại có: $\widehat{H_1}+\widehat{H_2}=\widehat{BHE}=90^0;\widehat{F_2}+\widehat{E_1}=90^0$ ($do\,\Delta HFE$ vuông tại H)

Nên $\widehat{H_2}=\widehat{F_2}$ hay tam giác $I'HF$ cân tại $I'\Rightarrow I'H=I'F\,(4)$

Từ (3) và $(4)\Rightarrow I'E=I'F$ hay I là trung điểm EF

Do đó $I'\equiv I$ nên ba điểm H,I,K thẳng hàng (đpcm)

CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN (HÀ NỘI)

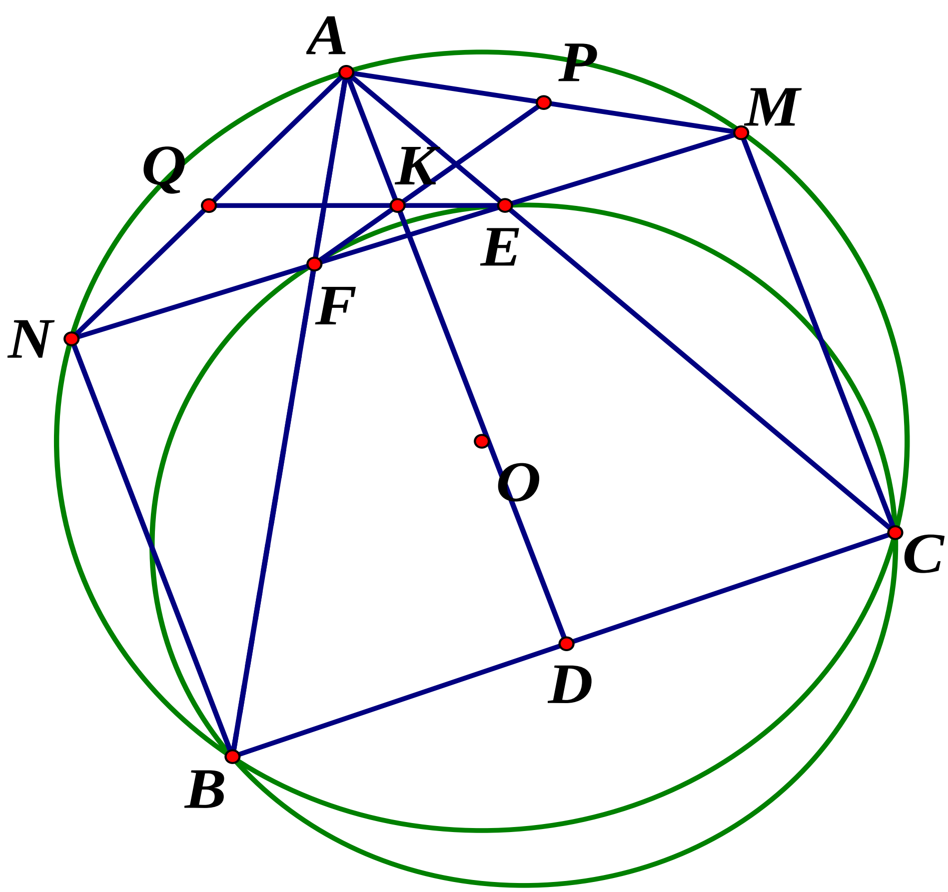
Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O). Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M,N thuộc (O) sao cho đường thẳng CM,BN cùng song song với đường thẳng AD

1) Chứng minh rằng $AM = AN$
2) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là E, F. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn
3) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM, AN. Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP, AD đồng quy.

ĐÁP ÁN

Câu III.



1) Chứng minh rằng $AM = AN$

Ta có: $\widehat{NBA} = \widehat{DAB}$ (so le trong do $BN // AD$)

$\widehat{DAB} = \widehat{DAC}(gt)$; $\widehat{DAC} = \widehat{ACM}$ (so le trong do $CM // AD$)

$\Rightarrow \widehat{NBA} = \widehat{MCA} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AN} = sd\,\overset{\frown}{AM}$ (trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau).

Vậy $AM = AN$ (trong một đường tròn, hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau)

2) Chứng minh rằng 4 điểm B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{AEF}=\frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AN}+sd\,\overset{\frown}{CM}\right)$(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$=\frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AM}+sd\,\overset{\frown}{CM}\right)=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn)

Vậy tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau) hay B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh các đường thẳng EQ,FP,AD đồng quy

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHN, cát tuyến EKQ, ta có:

$\frac{EN}{EH}.\frac{KH}{KA}.\frac{QA}{QN}=1\Rightarrow\frac{EN}{EH}.\frac{KH}{KA}=1$(do Q là trung điểm của $AN(gt)$ nên $QA=QN$)

$\Rightarrow\frac{EN}{EH}=\frac{KA}{KH}(I)$

Gọi $AD\cap PE=\{K'\}$. Ta đi chứng minh $K'\equiv K$

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHM, cát tuyến PKF ta có:

$\frac{FM}{FH}.\frac{K'H}{K'A}.\frac{PA}{PM}=1\Rightarrow\frac{FM}{FH}.\frac{K'H}{K'A}=1$(Do P là trung điểm của $AM\,(gt)$ nên $PA=PM$)

$\Rightarrow\frac{FM}{FH}=\frac{K'A}{K'H}(II)$

Ta sẽ chứng minh $\frac{EN}{EH}=\frac{FM}{FH}\Leftrightarrow\frac{FM}{EN}=\frac{FH}{EH}=\frac{FM-FH}{EN-EH}=\frac{HM}{HN}(*)$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Vì $BN//AD//CM$ nên áp dụng định lý Ta – let ta có: $\frac{HM}{HN}=\frac{DC}{DB}$

Lại có : $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$(định lý đường phân giác), do đó: $\frac{HM}{HN}=\frac{AC}{AB}(1)$

Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}(cmt),\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow\Delta AEF\sim\Delta ABC\,(g.g)\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AE}(2)$

Từ (1) và (2)$\Rightarrow\frac{HM}{HN}=\frac{AF}{AE}\qquad(3)$

Tiếp tục áp dụng định lý đường phân giác trong tam giác AEF ta có: $\frac{AF}{AE}=\frac{HF}{HE}(4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra $\frac{HM}{HN}=\frac{HF}{HE}$, do đó $(*)$ được chứng minh, tức là $\frac{EN}{EH}=\frac{FM}{FH}(III)$

Từ $(I),(II),(III)$ suy ra $\frac{KA}{KH}=\frac{K'A}{K'H}$, do đó $K\equiv K'$

Vậy EQ,FP,AD đồng quy tại K

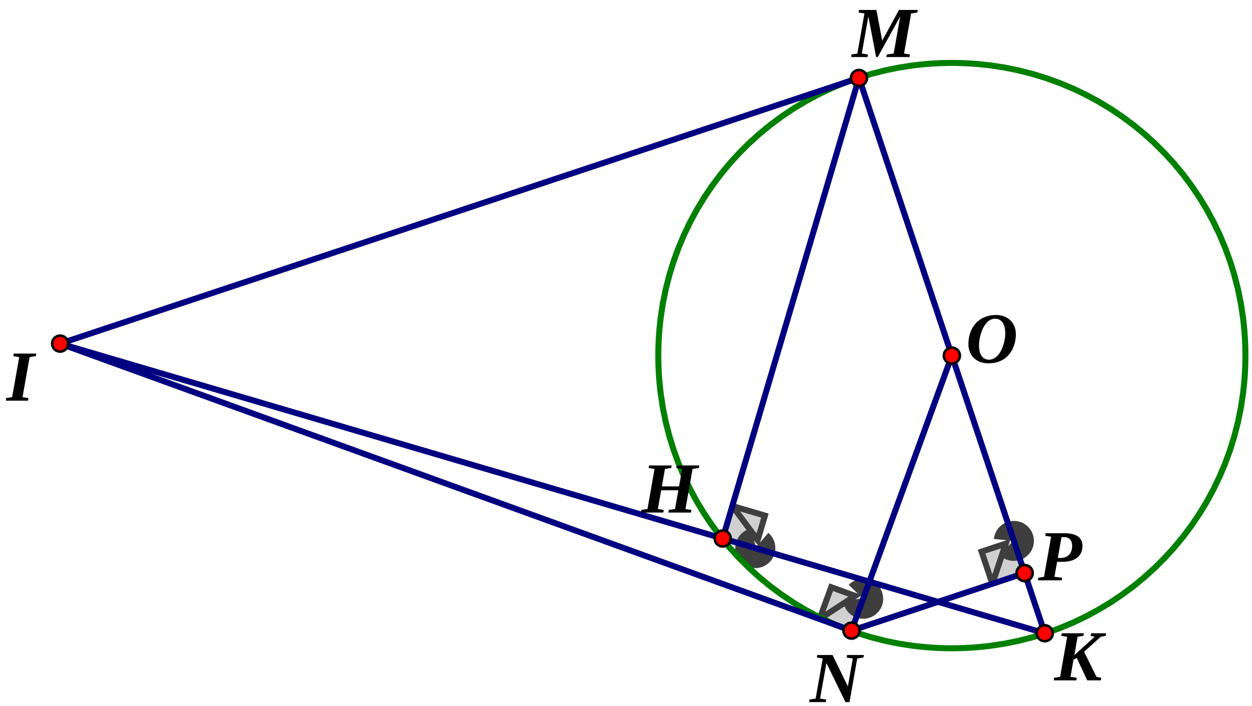
KHÁNH HÒA

Câu 4. (3,00 điểm) Cho đường tròn (O) và một điểm I nằm ngoài đường tròn. Qua I kẻ hai tiếp tuyến IM và IN với đường tròn (O). Gọi K là điểm đối xứng với M qua O. Đường thẳng IK cắt đường tròn (O) tại H

a) Chứng minh tứ giác $IMON$ nội tiếp đường tròn
b) Chứng minh $IM.IN=IH.IK$
c) Kẻ NP vuông góc với MK. Chứng minh đường thẳng IK đi qua trung điểm của NP.

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh $IMON$ **là tứ giác nội tiếp**

Ta có: IM, IN là các tiếp tuyến của (O) tại $M, N \Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{INO} = 90^0$

Xét tứ giác $IMON$ ta có: $\widehat{IMO} + \widehat{INO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà hai góc này là hai góc đối diện nên $IMON$ là tứ giác nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh $IM.IN = IH.IK$

Ta có: K là điểm đối xứng của M qua $O \Rightarrow O$ là trung điểm của MK và MK là đường kính của (O)

Ta có: $\widehat{MHK}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)$\Rightarrow \widehat{MHK} = 90^0$ $hay\ MH \perp HK$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔIMK vuông tại M có đường cao MH

Ta có: $IM^2 = IH.IK$

Mà $IM = IN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)$\Rightarrow IM^2 = IN.IM = IH.IK (dfcm)$

c) Chứng minh đường thẳng IK **đi qua trung điểm của** NP

Gọi $IK \cap NP = \{J\}$ $\qquad IK \cap M = \{E\}$

Ta có: $IM = IN(cmt)$ nên tam giác IMN cân tại I $\Rightarrow \widehat{INM} = \widehat{IMN}$ (hai góc đáy tam giác cân)

Lại có: $\widehat{MNP} = \widehat{IMN}$ (so le trong do $NP // MI$ – cùng vuông góc với MK)

$\Rightarrow \widehat{INM} = \widehat{MNP}$ (cùng bằng $\widehat{IMN}$) $\Rightarrow NE$ là phân giác trong $\widehat{INJ}$

Lại có : $\widehat{MNK}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên $\widehat{MNK} = 90^0$, do đó

$NK \perp NE$ nên NK là phân giác ngoài của $\widehat{INJ}$

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{NI}{NJ} = \dfrac{EI}{EJ} = \dfrac{KI}{KJ}$

Áp dụng định lý Ta let do $NP // MI$ ta có: $\dfrac{EI}{EJ} = \dfrac{MI}{NJ}; \dfrac{KI}{KJ} = \dfrac{MI}{JP}$

Từ đó suy ra $\dfrac{MI}{NJ} = \dfrac{MI}{JP} \Rightarrow NJ = JP \Rightarrow J$ là trung điểm của NP

Vậy đường thẳng IK đi qua trung điểm của $NP(dfcm)$

THÁI NGUYÊN

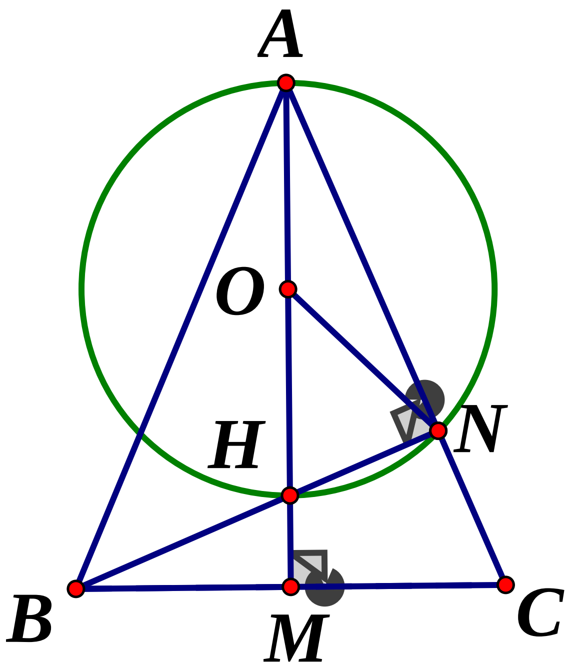
Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao AM, BN cắt nhau tại H. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH

Câu 10. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại M khác A

a) Chứng minh tam giác BHM cân
b) Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng với M qua AB và AC. Chứng minh ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

ĐÁP ÁN

Câu 9.



Gọi O là trung điểm của $AH \Rightarrow O$ là tâm của đường tròn đường kính AH

Ta có: BN là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow BN \perp AC \Rightarrow \widehat{HNA} = 90^0 \Rightarrow \Delta ANH$ vuông tại $N \Rightarrow N \in (O)(*)$

Xét ΔANH vuông tại N có đường trung tuyến $ON \Rightarrow ON = OH = \dfrac{1}{2}AH$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông).

$\Rightarrow \Delta ONH$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ONH} = \widehat{OHN}$ (1)

Vì ΔABC cân tại A, có đường cao $AM \Rightarrow M$ là trung điểm BC

Xét ΔBCN vuông tại N có đường trung tuyến NM

$\Rightarrow MN = BM = \dfrac{1}{2}BC$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

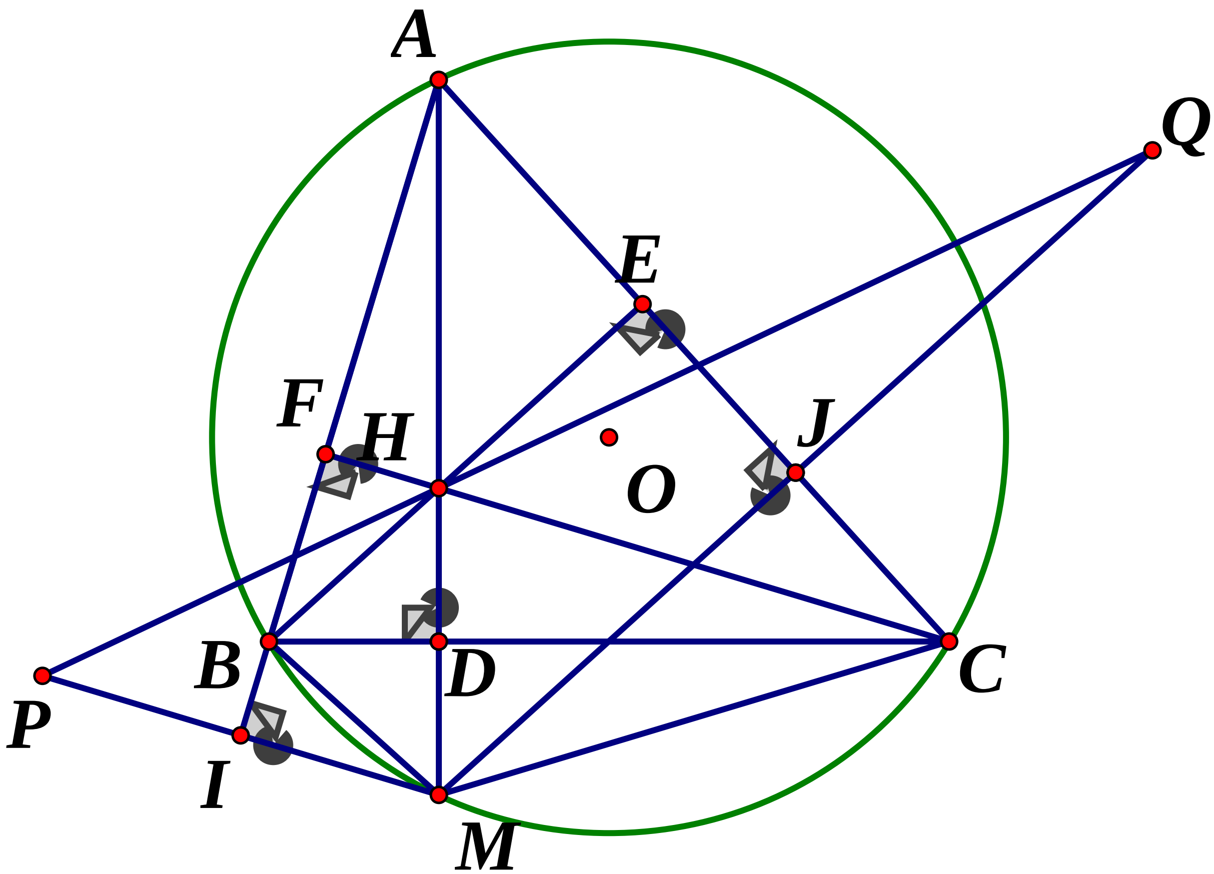
$\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{MNB}$ $\quad (2)$

Mặt khác $\widehat{BHM} = \widehat{OHN}$ (hai góc đối đỉnh)$\Rightarrow \widehat{OHN} + \widehat{HBM} = 90^0\,(3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MBN} + \widehat{HNO} = 90^0$ *hay* $MN \perp ON\,(**)$

Từ $(*),(**) \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Câu 10.



a) Chứng minh ΔBHM cân

Ta có: AD, CF là hai đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} CF \perp AB \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{AFC} = \angle ADC = 90^0$

Xét tứ giác $ACDF$ có : $\angle AFC = \angle EDC = 90^0$, Mà đỉnh F, D là hai đỉnh kề nhau nên

$ACDF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DFC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

hay $\angle MAC = \angle DFC \quad (1)$

Xét đường tròn (O) ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{MAC}\,(2)$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$)

Xét tứ giác $BFHD$ có: $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow BFHD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HFD} = \widehat{HBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HD}$) hay $\angle CFD = \angle HBD \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle HBD = \angle CBM$ hay $\angle HBD = \angle DBM \Rightarrow BD$ là đường phân giác của ΔBHM

Xét ΔHBM ta có: BD vừa là đường cao, vừa là đường phân giác

$\Rightarrow \Delta BHM$ cân tại B $(dfcm)$

b) Chứng minh P,H,Q thẳng hàng

Gọi I là giao điểm của AB và PM, J là giao điểm của AC và

$MQ \Rightarrow \begin{cases} AB \perp PM = \{I\} \\ AC \perp MQ = \{J\} \end{cases}$

Xét tứ giác $IBDM$ có: $\widehat{BIM} + \widehat{BDM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà hai góc này là hai góc đối diện nên $IBDM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{IDB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IB}$)

Xét tứ giác $MDJC$ ta có: $\widehat{MDC} = \widehat{MJC} = 90^0$ mà hai góc này kề nhau nên $MDJC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{JDC} = \widehat{JMC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{JC}$)

Tứ giác $ABMC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{ACM}$ (góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện) (1)

Ta có: ΔBIM vuông tại $I \Rightarrow \widehat{IBM} + \widehat{IMB} = 90^0\,(2)$

ΔJMC vuông tại $J \Rightarrow \widehat{JMC} + \widehat{JCM} = 90^0 \quad (3)$

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow \widehat{BMI} = \widehat{BDI} = \angle JDC = \angle JMC \Rightarrow \widehat{BDI}, \widehat{JDC}$ là hai góc đối đỉnh nên I, D, J thẳng hàng.

Ta có: ΔBHD là tam giác cân tại $B(cmt)$ có đường cao BD đồng thời là đường trung tuyến$\Rightarrow D$ là trung điểm của HM . Xét ΔPHM có:

D, I lần lượt là trung điểm của $MH, MP \Rightarrow DI$ là đường trung bình của ΔPHM

$\Rightarrow DI // PH \Rightarrow PH // IJ\,(4)$

Xét ΔMHQ ta có: D, J lần lượt là trung điểm của MH, MQ

$\Rightarrow DJ$ là đường trung bình $\Delta MHQ \Rightarrow DJ // HQ \Rightarrow HQ // JI\,(5)$

Từ (4) và $(5) \Rightarrow P, H, Q$ thẳng hàng.

PHẦN 2: CỰC TRỊ HÌNH HỌC

BẮC GIANG

Câu 4. (2,0 điểm) Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 3cm$.Gọi A, B là hai điểm phân biệt cố định trên đường tròn $(O;R)$(AB không là đường kính). Trên tia đối của tia BA lấy một điểm M (M khác B). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn đã cho $(C, D$ là hai tiếp điểm)

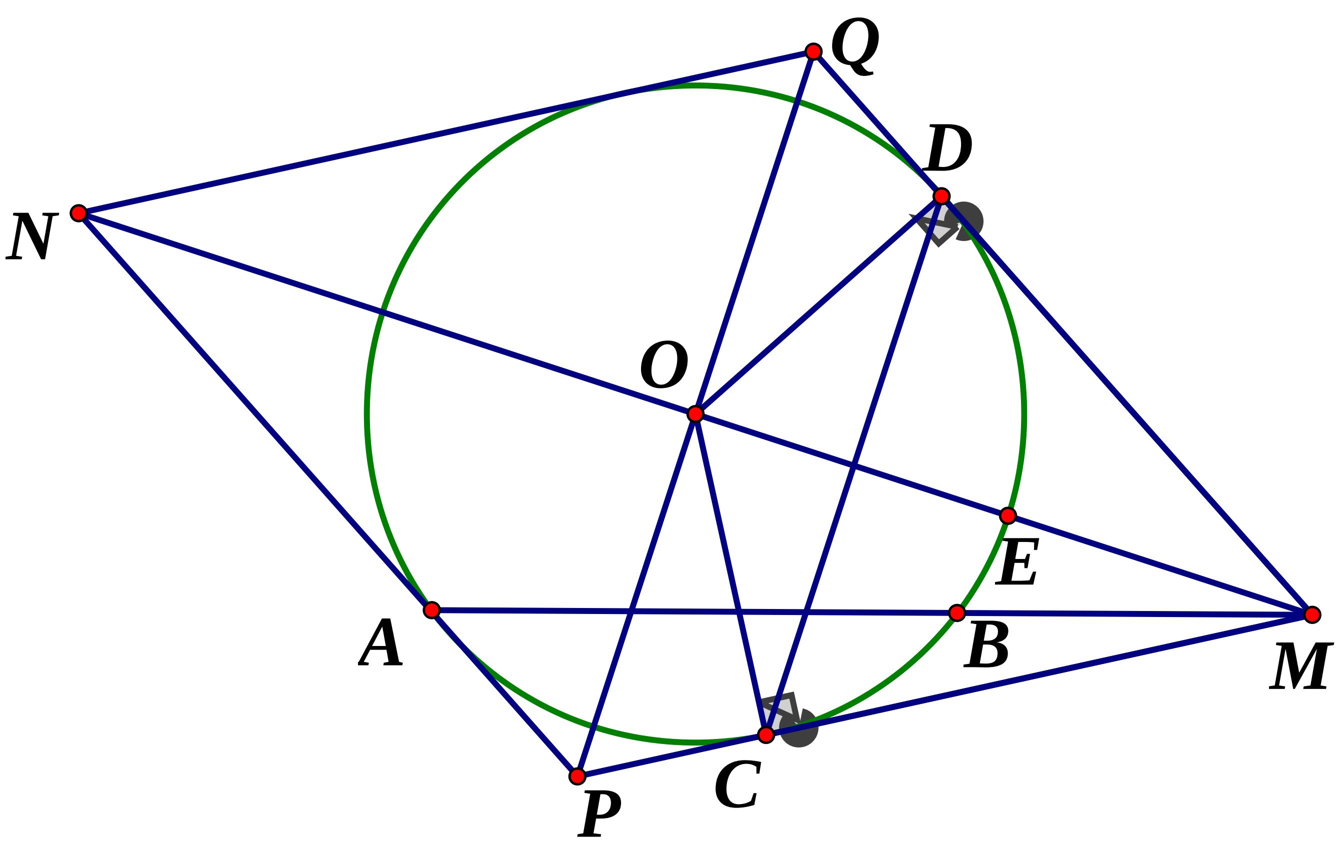
a) Chứng minh tứ giác $OCMD$ nội tiếp trong một đường tròn

b) Đoạn thẳng OM cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm E. Chứng minh rằng khi $\widehat{CMD}=60^0$ thì E là trọng tâm của tam giác MCD

c) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O. Đường thẳng đi qua O vuông góc với MN cắt các tia MC, MD lần lượt tại các điểm P và Q. Khi M di động trên tia đối của tia BA, tìm vị trí của điểm M để tứ giác $MPNQ$ có diện tích nhỏ nhất

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh tứ giác $OCMD$ nội tiếp

Xét đường tròn tâm O có MC, MD là các tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{OCM}=\widehat{ODM}=90^0$

Tứ giác $OCMD$ có: $\widehat{OCM}+\widehat{ODM}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow OCMD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh E là trọng tâm ΔMCD

Xét đường tròn (O) có MC, MD là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên $MC=MD$ và MO là tia phân giác của $\widehat{CMD}$

Mà $\widehat{CMD}=60^0 \Rightarrow \widehat{OMD}=\frac{1}{2}\widehat{CMD}=\frac{1}{2}.60^0=30^0$

Xét ΔODM vuông có $OD=R=3cm, \widehat{OMD}=30^0$

Ta có:

$$\sin\widehat{DMO}=\frac{OD}{OM}\Rightarrow OM=\frac{OD}{\sin 30^0}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6(cm)\Rightarrow EM=OM-OE=6-3=3(cm)$$

Lại có: $\begin{cases} MD=MC \\ OD=OC=R \end{cases}$ nên OM là đường trung trực của đoạn DC. Gọi I là giao điểm của OM và $DC \Rightarrow OM \perp DC$ tại I

Theo hệ thức lượng trong tam giác ODM vuông ta có:

$$OD^2=OI.OM \Leftrightarrow OI=\frac{OD^2}{OM}=\frac{3^2}{6}=\frac{3}{2}\Rightarrow IM=OM-OI=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

Từ đó ta có: $\frac{ME}{MI}=\frac{3}{\frac{9}{2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow ME=\frac{2}{3}MI$

Xét tam giác MCD có $MC=MD$ và $\widehat{CMD}=60^0$ nên ΔMCD là tam giác đều có MI là đường phân giác nên MI cũng là trung tuyến. Lại có $ME=\frac{2}{3}MI\,(cmt)$ nên E là trọng tâm tam giác $MCD(dfcm)$

c) Tìm vị trí của M để S_{MNPQ} min

Vì N đối xứng với M qua O nên $OM=ON$

Xét hai tam giác vuông $\Delta OQM, \Delta OPM$ có cạnh OM chung, $\widehat{OMQ}=\widehat{OMP}$

Suy ra $\Delta OQM=\Delta OPM\,(g.c.g)\Rightarrow OP=OQ$

Diện tích tứ giác $MPNQ$ là :

$$S_{MPNQ}=\frac{1}{2}MN.PQ=\frac{1}{2}.2OM.2OQ=4.\frac{1}{2}OM.OQ=4S_{OQM}=4.OD.MQ=4R.MQ$$

Xét ΔOQM vuông tại O có OD là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $OD^2=DQ.DM \Leftrightarrow R^2=DQ.DM$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $QM=DQ+DM\ge 2\sqrt{DQ.DM}=2\sqrt{R^2}=2R$

Hay $QM_{\min}=2R \Leftrightarrow QD=DM=R$

Từ đó S_{MPNQ} nhỏ nhất là $8R^2 \Leftrightarrow MQ = 2R$

Khi đó: Xét ΔMDB & ΔMAD có: $\widehat{DMB}$ chung; $\widehat{MDB} = \widehat{MAD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$\Rightarrow \Delta MDB \sim \Delta MAD(g-g) \Rightarrow \dfrac{MD}{MA} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow MD^2 = MA.MB \Rightarrow MA.MB = R^2$

Đặt $AB = a, MB = x$ (a không đổi, $a, x > 0$)

Ta có:

$$MA.MB = R^2 \Leftrightarrow x\left(x+a\right) = R^2 \Leftrightarrow x^2 + ax - R^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-a+\sqrt{a^2+4R^2}}{2}\left(do\ x>0\right)$$

Vậy điểm M thuộc tia đối của tia AB và cách B một khoảng bằng

$MB = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4R^2}}{2}$ không đổi thì tứ giác $MPNQ$ có diện tích nhỏ nhất là $8R^2$

BẠC LIÊU

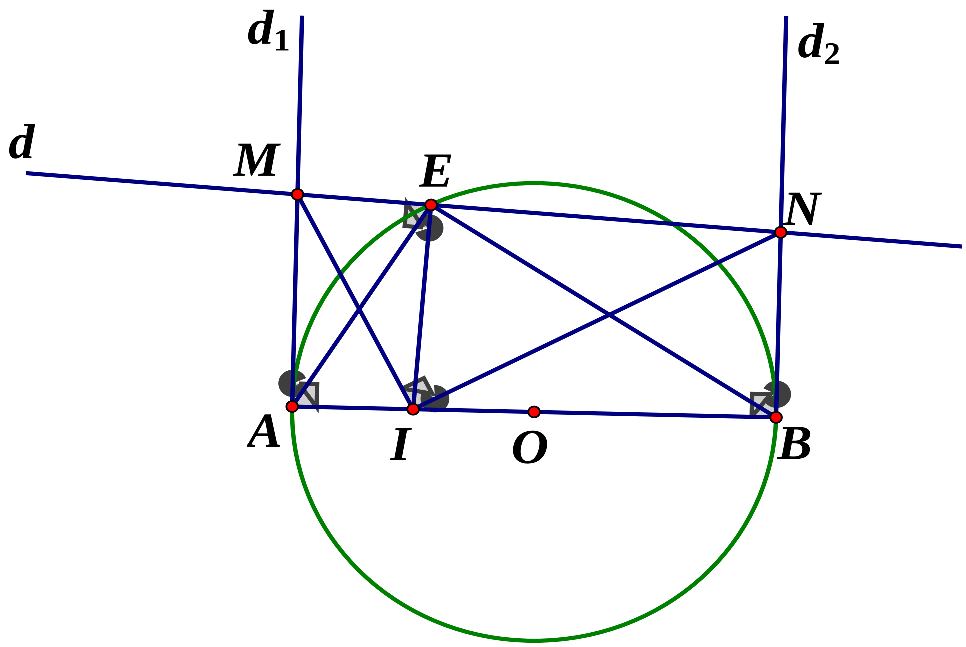
Câu 4. (6,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R.$ Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA, E là điểm thay đổi trên đường tròn $\left(O\right)$ sao cho E không trùng với A và $B.$ Dựng đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$ tại A và B. Gọi d đường thẳng qua E và vuông góc với EI. Đường thẳng d cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N

a) Chứng minh tứ giác $AMEI$ nội tiếp
b) Chứng minh ΔIAE đồng dạng với $\Delta NBE.$ Từ đó chứng minh $IB.NE = 3IE.NB$
c) Khi điểm E thay đổi, chứng minh tam giác MNI vuông tại I và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNI theo R

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh tứ giác $AMEI$ nội tiếp

Vì d_1 là tiếp tuyến của (O) tại A nên $\widehat{IAM}=90^0$

Vì $d\perp EI$ tại E nên $\widehat{IEM}=90^0$

Xét tứ giác $AMEI$ có $\widehat{IAM}+\widehat{IEM}=90^0+90^0=180^0$

Vậy tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

b) Chứng minh ΔIAE đồng dạng với ΔNBE. Từ đó chứng minh $IB.NE=3IE.NB$

Vì $\widehat{AEB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AEB}=90^0$

Ta có: $\widehat{AEI}+\widehat{IEB}=\widehat{AEB}=90^0;\widehat{BEN}+\widehat{IEB}=\widehat{IEN}=90^0\left(do\, d\perp IE\right)$

$\Rightarrow \widehat{AEI}=\widehat{BEN}$ (cùng phụ với $\widehat{IEB}$)

Xét ΔIAE và ΔNBE có: $\widehat{AEI}=\widehat{BEN}\left(cmt\right);\widehat{IAE}=\widehat{NBE}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

$\Rightarrow \Delta IAE\sim\Delta NBE(g.g)\Rightarrow \dfrac{IE}{NE}=\dfrac{IA}{NB}$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow IA.NE=IE.NB$ (1)

Mà I là trung điểm của $OA(gt)\Rightarrow OA=2IA$

Lại có O là trung điểm của $AB\Rightarrow AB=2OA=4IA$

$\Rightarrow IB=AB-IA=4IA-IA=3IA$. Khi đó ta có:

$(1) \Leftrightarrow 3IA.NE = 3IE.NB$ (nhân cả 2 vế với 3) $\Rightarrow IB.NE = 3IE.NB (dfcm)$

c) Chứng minh ΔMNI vuông tại I và tìm GTNN của S_{MNI} theo R

Xét tứ giác $BNEI$ có: $\widehat{IEN} = 90^0 (do\ d \perp IE$ tại E)

$\widehat{IBN} = 90^0 (do\ d_2$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B)

$\Rightarrow \widehat{IEN} + \widehat{IBN} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BNEI$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{INE} = \widehat{IEB} = \widehat{ABE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IE)

Lại có : Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp (ý a)

$\Rightarrow \widehat{IME} = \widehat{IAE} = \widehat{BAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IE)

Xét tam giác MNI có:

$\widehat{INE} + \widehat{IME} = \widehat{ABE} + \widehat{BAE} = 90^0$ (do $\widehat{AEB} = 90^0 (cmt)$ nên ΔAEB vuông tại E)

$\Rightarrow \Delta MNI$ vuông tại I (tam giác có tổng hai góc nhọn bằng 90^0)

Ta có: $S_{\Delta MNI} = \dfrac{1}{2} IM.IN$

Đặt $\widehat{AIM} = \alpha \left(0 < \alpha < 90^0\right) \Rightarrow \widehat{BIN} = 90^0 - \alpha$

Xét ΔAIM vuông ta có: $\cos\alpha = \dfrac{AI}{IM} \Rightarrow IM = \dfrac{AI}{\cos\alpha}$

Xét ΔBIN vuông ta có: $\cos\left(90^0 - \alpha\right) = \dfrac{BI}{IN} \Rightarrow IN = \dfrac{BI}{\cos\left(90^0 - \alpha\right)} = \dfrac{BI}{\sin\alpha}$

$$\Rightarrow S_{\Delta MNI} = \frac{1}{2} IM.IN = \frac{1}{2}.\frac{AI}{\cos\alpha}.\frac{BI}{\sin\alpha} = \frac{AI.BI}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

Ta có: $AB = 4AI (cmt) \Rightarrow AI = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{R}{2}, BI = \dfrac{3}{4}AB = \dfrac{3R}{2}$

$$\Rightarrow S_{\Delta MNI} = \frac{\frac{3R^2}{4}}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

Do $\dfrac{3R^2}{4}$ không đổi nên diện tích tam giác MNI đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Vì $0^0 < \alpha < 90^0$ nên $\sin\alpha, \cos\alpha > 0$. Áp dụng BĐT Cô – si ta có:

$$\sin\alpha.\cos\alpha \le \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\forall\alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMI}\le\frac{3R^2}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3R^2}{2}.\text{Dấu "=" xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\cos\alpha\\ \sin^2\alpha=\cos^2\alpha\end{cases}\Rightarrow\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=45^0$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNI là $\frac{3R^2}{2}$, đạt được khi $\widehat{AIM}=45^0$.

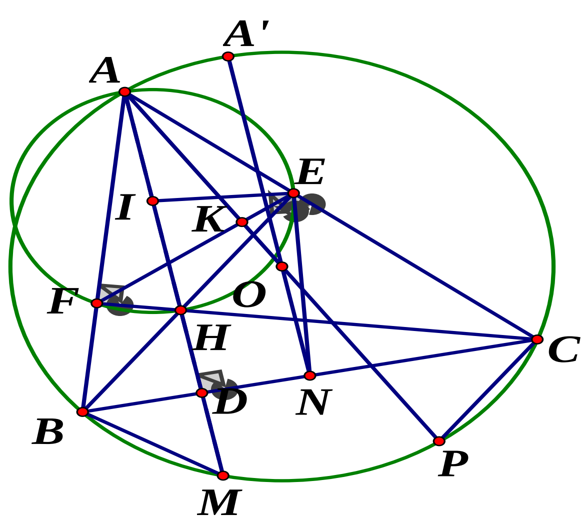
HÀ NAM

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Hai đường cao BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm thứ hai là M

1) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp
2) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{EBM}$
3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBCE
4) Khi hai điểm B,C cố định và điểm A di động trên đường tròn $(O;R)$ nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh $OA\perp EF$. Xác định vị trí của điểm A để tổng $DE+EF+FD$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐÁP ÁN

Câu 4.



1) Chứng minh $AEHF$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: BE, CF là các đường cao của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} BE \perp AC = \{E\} \\ CF \perp AB = \{F\} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AFC} = \angle AEB = 90^0$$

Xét tứ giác $AEHF$ ta có : $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{BEM}$

Ta có: $\begin{cases} \angle DAC + \angle ACD = 90^0 \\ \angle EBC + \angle ECB = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{EBC}$ (cùng phụ góc DAC)

Hay $\angle MAC = \angle EBC$

Lại có: $\angle MAC = \angle MBC$ (cùng chắn cung MC)

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{EBC}\left(= \widehat{MAC}\right) \Rightarrow BC$ là phân giác của $\angle EBM\,(dfcm)$

3) Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBCE

Ta có : $\angle AEH = 90^0$ là góc nội tiếp chắn cung AH

$\Rightarrow AH$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AH

Ta có: ΔBEC là tam giác vuông tại E

$\Rightarrow$Đường tròn ngoại tiếp ΔBEC có tâm là trung điểm của BC

Gọi N là trung điểm của $BC \Rightarrow N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBEC

$\Rightarrow NB = NE = \frac{1}{2}BC$ (tính chất tiếp tuyến của tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta BNE$ cân tại $N \Rightarrow \angle NBE = \angle NEB$ hay $\angle DBE = \angle NEB$

Ta có IE là đường trung tuyến của ΔAEH vuông tại E$\Rightarrow EI = IH = \frac{1}{2}AH \Rightarrow \Delta IEH$ cân tại I$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ mà $\widehat{IHE} = \widehat{BHD}$ (hai góc đối đỉnh)$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{BHD}$

Lại có : $\angle HBD + \angle BHD = 90^0 \Rightarrow \angle IEH + \angle BEN = 90^0$

Hay $IE \perp EN \Rightarrow IE$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BEC(dfcm)$

4) Xác định vị trí điểm A………

Gọi $EF \cap OA = \{K\}$

Kẻ đường kính AP

Khi đó ta có $\angle ACP$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn$\Rightarrow \angle ACP = 90^0$

$\Rightarrow \angle APC + \angle PAC = 90^0$ *hay* $\angle OAC + \angle APC = 90^0$

Xét tứ giác $BCEF$ có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$, mà hai đỉnh E, F kề nhau $\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{AEF}$ (góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

Hay $\angle ABC = \angle AEB$ mà $\angle APC = \angle ABC$ (cùng chắn ccung AC)

$\Rightarrow \angle AEF = \angle APC \Rightarrow \angle APC + \angle OAE = \angle AEF + \angle EAO = 90^0$

Hay $AO \perp EF = \{K\} (dfcm)$

Chứng minh tương tự ta có: $OB \perp FD, OC \perp ED$

Ta có: $S_{OEAF} = \dfrac{1}{2}OA.EF$ (tứ giác có hai đường chéo vuông góc)

Tương tự: $S_{OFBD} = \dfrac{1}{2}OB.FD$; $S_{ODCE} = \dfrac{1}{2}OC.DE$

$$\Rightarrow S_{OEAF} + S_{OFBD} + S_{ODCE} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.FD + \frac{1}{2}OC.DE$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}R(EF + FE + DE) \Rightarrow EF + FE + DE = \frac{2S_{ABC}}{R}$$

Kéo dài ON cắt (O) tại $A' \Rightarrow A'N \perp BC\left(do\ ON \perp BC\right)$

Khi đó ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AD.BC \le \dfrac{1}{2}A'N.BC$

Đặt $BC = a$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ONC ta có:

$$ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow A'N = OA' + ON = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow S_{ABC} \le \frac{a}{2}\left(R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)$$

$$\Rightarrow EF + FD + DE \le \frac{a\left(R + \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}\right)}{R}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv A'$, khi đó điểm A là điểm chính giữa của cung lớn BC

HÀ NAM (CHUYÊN)

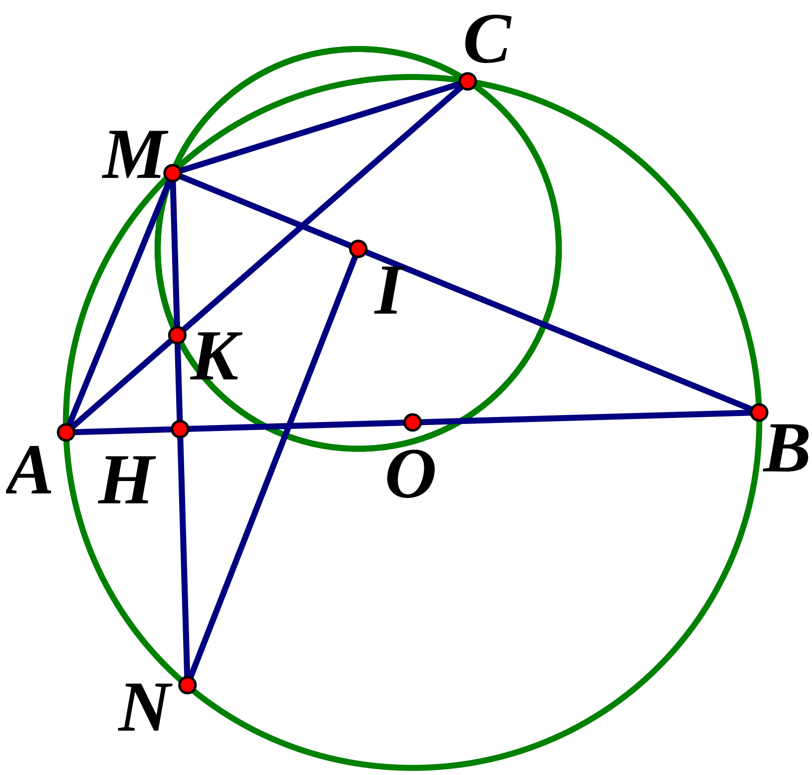
Câu 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định. Điểm H cố định nằm giữa hai điểm A và O sao cho $AH < OH$. Kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Gọi K là giao điểm của AC và MN.

1) Chứng minh tứ giác $BCKH$ nội tiếp
2) Chứng minh tam giác AMK đồng dạng với tam giác ACM
3) Cho độ dài đoạn thẳng $AH = a$. Tính $AK.AC - HA.HB$ theo a
4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MKC. Xác định vị trí của điểm C để độ dài đoạn thẳng IN nhỏ nhất

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Có $AH \perp MN \Rightarrow \widehat{KHB} = 90^0$ mà $\widehat{KCB} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCKH$ có $\widehat{KHB} + \widehat{KCB} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow BCKH$ là tứ giác nội tiếp

b) Xét ΔAMK và ΔACM có:

$\widehat{A}$ *chung*; $\widehat{AMK} = \widehat{ACM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$) $\Rightarrow \Delta AMK \sim \Delta ACM\,(g.g)$

c) $\Delta AMK \sim \Delta ACM \Rightarrow \dfrac{AK}{AM} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow AK.AC = AM^2\,(1)$

Xét ΔAMH và ΔMBH có: $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}\left(= 90^0\right)$; $\widehat{MAH} = \angle HMB$ (cùng phụ $\widehat{HMA}$)

$\Rightarrow \Delta AMH \sim \Delta MBH\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{HA}{HM} = \dfrac{HM}{BH} \Rightarrow HA.HB = HM^2\,(2)$

Từ (1) và (2) ta có:

$AK.AC - HA.HB = AM^2 - HM^2 = AH^2 = a^2$

d) Vì AM là tiếp tuyến của (I)(do $\widehat{AMK} = \widehat{MCA}(cmt)$ mà 1 góc là góc nội tiếp , 1 góc là góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung)$\Rightarrow I \in MB$

Ta có: $NI_{\min} \Leftrightarrow$ khoảng cách từ N xuống BM nhỏ nhất.

$\Rightarrow NI \perp BM$, do đó khoảng cách từ N đến tâm I nhỏ nhất thì C là giao điểm của $(I;IM)$ và (O)

Vậy C là hình chiếu của N trên BM

HẢI DƯƠNG

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi D, E, F là chân các đường cao lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB và H là trực tâm của ΔABC. Vẽ đường kính AK

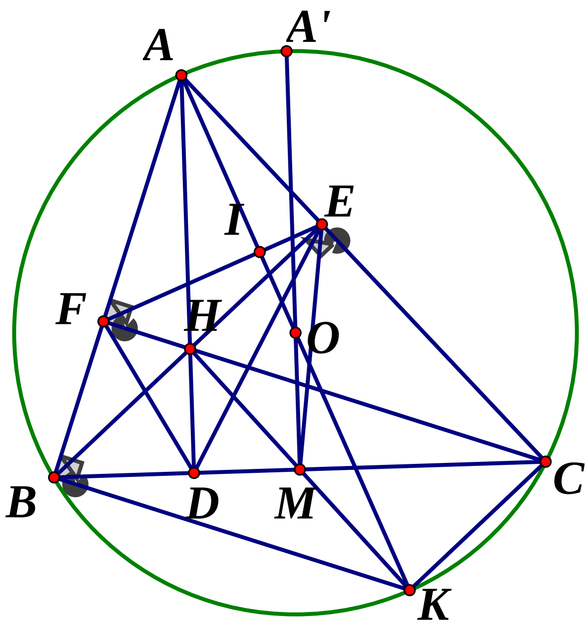
a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Trong trường hợp ΔABC không cân, gọi M là trung điểm của BC. Hãy chứng minh FC là phân giác của $\widehat{DFE}$ và 4 điểm M, D, F, E cùng nằm trên một đường tròn.

c) Khi BC và đường tròn $(O;R)$ cố định, điểm A thay đổi trên đường tròn sao cho ΔABC luôn nhọn, đặt $BC = a$. Tìm vị trí của điểm A để tổng $P = DE + EF + DF$ lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó theo a và R

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

Ta có: $\widehat{ABK}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{ABK} = 90^0$ hay $AB \perp BK$

Mà $CF \perp AB(gt) \Rightarrow CF\,//\,BK$ hay $CH\,//\,BK\,(1)$

Ta có: $\widehat{ACK}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{ACK} = 90^0$ hay $AC \perp CK$

Mà $BE \perp AC(gt) \Rightarrow BE\,//\,CK$ hay $BH\,//\,CK\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Chứng minh FC là phân giác $\widehat{DFE}$

Xét tứ giác $BFHD$ ta có: $\widehat{BFD} + \widehat{BHD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên $BFHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HFD} = \widehat{HBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HD}$)(3)

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên $AEHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$)(4)

Xét tứ giác $AEDB$ ta có: $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^0 \Rightarrow AEDB$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{DBE} \quad (5)$

Từ $(3),(4),(5) \Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{EFH} = \widehat{HFD} = \widehat{HBD}$

Hay $\widehat{EFC} = \widehat{CFD} \Rightarrow FC$ là phân giác của $\widehat{DFE}$ $(dfcm)$

Xét ΔEBC vuông tại E có đường trung tuyến $EM \Rightarrow EM = BM = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \Delta EBM$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{EBM} \Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{MEB} + \widehat{EBM} = 2\widehat{EBM}$ (góc ngoài của tam giác). Lại có $\widehat{EFD} = 2\widehat{HFD} = 2\widehat{HBD} = 2\widehat{EBM}\,(cmt)$

$\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{EFD}\left(= 2\widehat{EBM}\right) \Rightarrow EFDM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow E, F, D, M$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Tìm vị trí điểm A…….

Gọi $EF \cap OA = \{I\}$

Ta có: $\widehat{FAI} = \widehat{BCK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK)

Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0\,(gt)$, do đó tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{AFI} = \widehat{ACB}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{FAI} + \widehat{AFI} = \widehat{BCK} + \widehat{ACB} = \widehat{ACK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow OA \perp EF$

Chứng minh tương tự ta có : $OB \perp FD, OC \perp ED$

Ta có: $S_{OEAF} = \frac{1}{2}OA.EF$ (tứ giác có hai đường chéo vuông góc)

$S_{OFBD} = \frac{1}{2}OB.FD$; $S_{ODCE} = \frac{1}{2}OC.DE$

$$\Rightarrow S_{OEAF} + S_{OFBD} + S_{ODCE} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.FD + \frac{1}{2}OC.DE$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.R.EF + \frac{1}{2}.R.FD + \frac{1}{2}.R.DE$$

$$\Rightarrow EF + FD + DE = \frac{2S_{ABC}}{R}$$

Kéo dài OM cắt (O) tại $A' \Rightarrow A'M \perp BC$ (do $OM \perp BC$)

Khi đó ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC \le \frac{1}{2}A'M.BC$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông OMC ta có:

$$OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow A'M=OA'+OM=R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\Rightarrow S_{ABC}\le\frac{a}{2}\left(R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)$$

$$\Rightarrow EF+FD+DE\le\frac{a\left(R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)}{R}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow A\equiv A'$, khi đó điểm A là điểm chính giữa của cung lớn BC

Vậy $P=DE+EF+DF$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm A là điểm chính giữa của cung lớn BC

LAI CHÂU

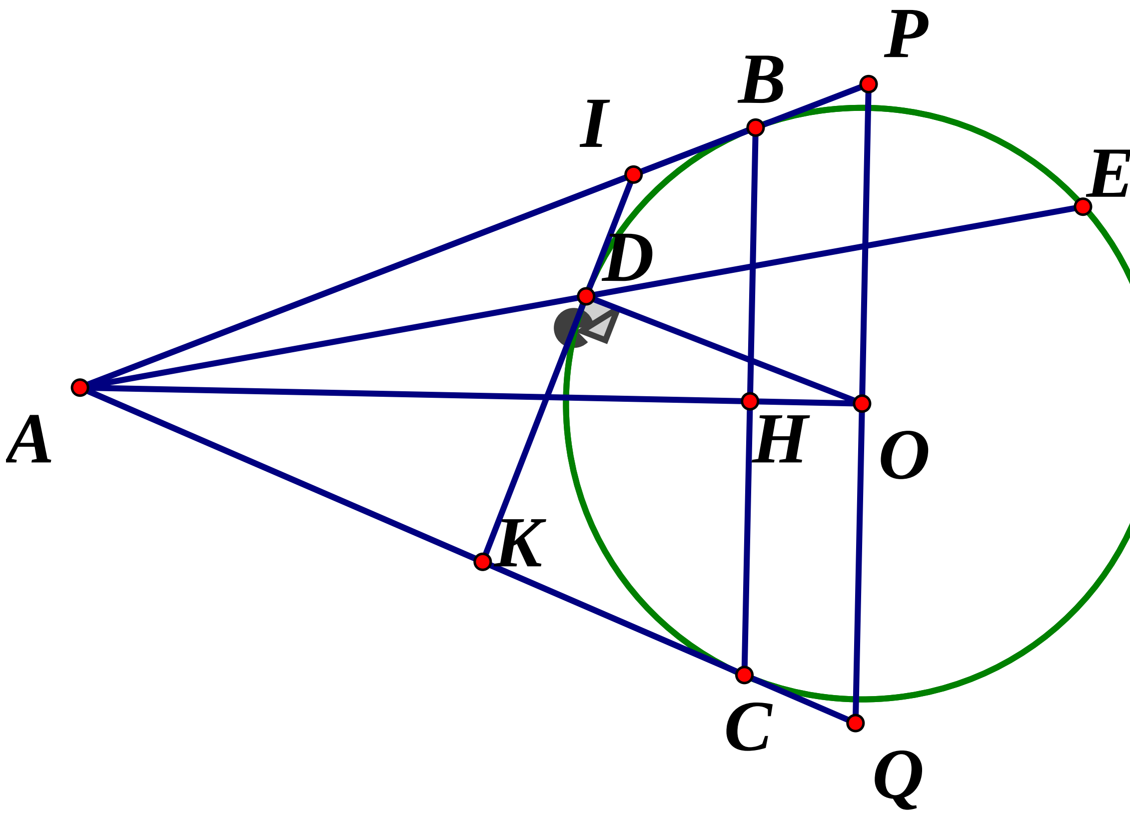
Câu 5. (3,0 điểm)

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE không đi qua tâm tới đường tròn đó (B,C là hai tiếp điểm, D nằm giữa A và E). Gọi H là giao điểm của AO và BC

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp
b) Chứng minh $AH.AO=AD.AE$
c) Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt AB, AC theo thứ tự tại I,K. Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB tại P và cắt AC tại Q. Chứng minh rằng : $IP+KQ\ge PQ$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Chứng minh $ABOC$ **là tứ giác nội tiếp**

Ta có: $\widehat{B}+\widehat{C}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $AH.AO = AD.AE$

Xét ΔACD và ΔAEC có: $\widehat{A}\ chung; \widehat{ACD}=\widehat{AEC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

$\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta AEC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AE.AD = AC^2$ (1)

Áp dụng hệ thức lượng ta có: $AH.AO = AC^2$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH.AO = AD.AE$

c) Chứng minh rằng : $IP + KQ \geq PQ$

$\widehat{PIK}+\widehat{IKQ}+\widehat{P}+\widehat{Q}=360^0 \Rightarrow 2\widehat{PIQ}+2\widehat{OKQ}+2\widehat{P}=360^0$

$\Rightarrow \widehat{PIQ}+\widehat{OKQ}+\widehat{P}=180^0$

Lại có: $\widehat{PIO}+\widehat{IOP}+\widehat{P}=180^0 \Rightarrow \widehat{OKQ}=\widehat{IOP}$

Xét ΔPIO và ΔQOK có:

$\widehat{IPO}=\widehat{OKQ}$ (ΔPAQ cân); $\widehat{IOP}=\widehat{OKQ}(cmt) \Rightarrow \Delta PIO \sim \Delta QOK(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{PI}{QO} = \dfrac{PO}{QK} \Rightarrow PI.QK = PO.QO = OP^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$IP + QK \geq 2\sqrt{IP.QK} = 2\sqrt{OP^2} = PQ$

Vậy $IP + KQ \geq PQ$

THÁI BÌNH

Câu 4. (3,5 điểm) Qua điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D)

a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và $MO \perp AB$

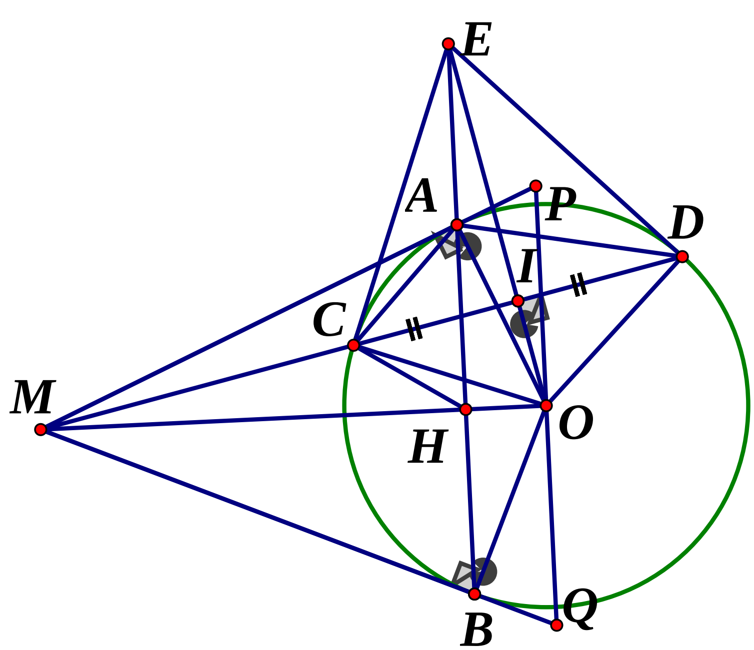
b) Chứng minh $MA.AD = MD.AC$

c) Gọi I là trung điểm của dây cung CD và E là giao điểm của hai đường thẳng AB và OI. Tính độ dài đoạn thẳng OE theo R khi $OI = \dfrac{R}{3}$

d) Qua tâm O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt các đường thẳng MA, MB lần lượt tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và $MO \perp AB$

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^0$

Xét tứ giác $MAOB$ có: $\angle OAM + \angle OBM = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow MAOB$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

Vì $OA = OB(= R) \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB

$MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB.

$\Rightarrow MO$ là trung trực của đoạn thẳng AB

Vậy $MO \perp AB(dfcm)$

b) Chứng minh $MA.AD = MD.AC$

Xét ΔMAC và ΔMDA có: $\angle AMD$ chung; $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDA(g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow MA.AD = MD.AC(dfcm)$

c) Tính độ dài đoạn thẳng OE theo R

Gọi $AB \cap OM = \{H\}$, theo ý $a)$ ta có $OM \perp AB$ tại H

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM, đường cao AH ta có:

$OA^2 = OH.OM$

Mà $OA = OC(= R)$ nên $OC^2 = OH.OM \Rightarrow \dfrac{OC}{OH} = \dfrac{OM}{OC}$

Xét ΔOCH và ΔOMC có: $\angle COM$ chung; $\dfrac{OC}{OH} = \dfrac{OM}{OC}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta OCH \sim \Delta OMC(c.g.c) \Rightarrow \angle OCH = \angle OMC = \angle OMI$ (1) (hai góc tương ứng)

Vì I là trung điểm của $CD(gt)$ nên $OI \perp CD$ (đường kính dây cung)

$\Rightarrow \Delta OMI$ vuông tại $I \Rightarrow \widehat{OMI} + \widehat{MOI} = 90^0$

Lại có: $\widehat{OEH} + \widehat{EOH} = 90^0 (do\, \Delta OEH$ vuông tại H)

Mà $\widehat{MOI} = \widehat{EOH}$ nên $\angle OMI = \angle OEH \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\angle OCH = \angle OEH (= \angle OMI)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OECH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OHE} = 90^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OE)

$\Rightarrow \Delta OCE$ vuông tại C, có đường cao CI

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OCE ta có:

$$OC^2 = OI.OE \Rightarrow OE = \frac{OC^2}{OI} = \frac{R^2}{\frac{R}{3}} = 3R$$

Vậy khi $OI = \frac{R}{3}$ thì $OE = 3R$

d) Tìm vị trí điểm M……….

Đặt $OM = x\left(x > R\right)$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OMP, đường cao OA ta có:

$$\frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} \Rightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{OP^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow OP = \frac{xR}{\sqrt{x^2 - R^2}}$$

Xét tam giác MPQ có đường cao MO đồng thời là đường phân giác (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên ΔMPQ là tam giác cân tại M, do đó đường cao MO cũng đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow PQ = 2OP = \frac{2xR}{\sqrt{x^2 - R^2}}$

Khi đó $S_{MPQ} = \frac{1}{2}MO.PQ = \frac{1}{2}x.\frac{2xR}{\sqrt{x^2 - R^2}} = R.\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}$

Ta có: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \frac{x^2 - R^2 + R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \sqrt{x^2 - R^2} + \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\sqrt{x^2 - R^2} + \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} \ge 2\sqrt{\sqrt{x^2 - R^2}.\frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}} = 2R$$

Khi đó $S_{MPQ} \ge R.2R = 2R^2$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - R^2} = \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} \Leftrightarrow x^2 - R^2 = R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}(tm)$

Vậy diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R^2 \Leftrightarrow M$ cách tâm O một khoảng bằng $R\sqrt{2}$

THANH HÓA

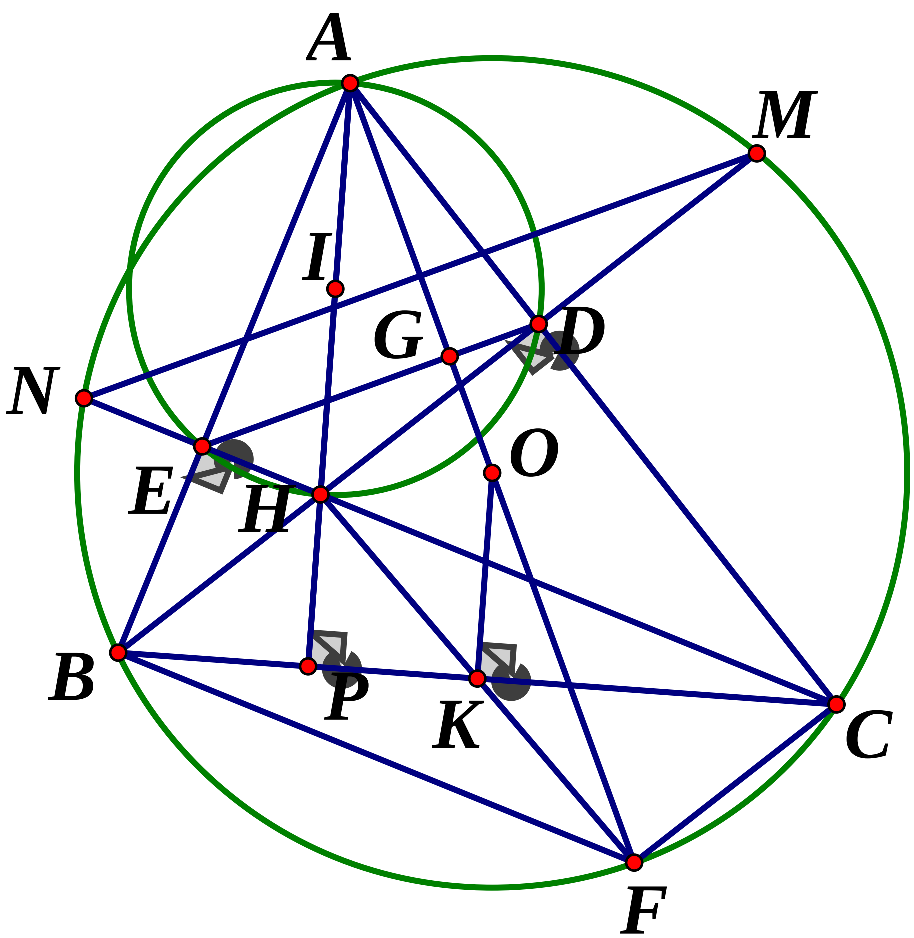
Câu IV.(3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BD, CE (D thuộc AC, E thuộc $AB)$ của tam giác kéo dài lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm M và N (M khác B, N khác $C)$

1. Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp được trong một dường tròn
2. Chứng minh MN song song với DE
3. Khi đường tròn (O) và dây BC cố định, điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn, chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE không đổi và tìm vị trí của điểm A để diện tích tam giác ADE đạt giá trị lớn nhất.

ĐÁP ÁN

Câu IV.



1) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp

Vì BD, CE là các đường cao của ΔABC nên

$BD \perp AC, CE \perp AB \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^0$

Suy ra tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau

2) **Chứng minh MN song song với DE**

Vì $BCDE$ là tứ giác nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BCE}$ (cùng chắn cung BE)

Mà $\widehat{BCE} = \widehat{BCN} = \widehat{BMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{BN}$)

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BMN}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MN//DE$

3) **Tìm vị trí A để S_{ADE} lớn nhất.**

Gọi $BD \cap CE = \{H\}$

Xét tứ giác $AEHD$ có $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow AEHD$ là tứ giác nội tiếp

Lai có $\widehat{AEH} = 90^0$ nên là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, do đó tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AH, tâm I là trung điểm của AH

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE là đường tròn $\left(I;\dfrac{AH}{2}\right)$

Kẻ đường kính AF và gọi K là trung điểm của BC

Vì $\angle ABF, \widehat{ACF}$ là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên

$\angle ABF = \angle ACF = 90^0$

Ta có:

$\begin{cases} CF \perp AB \\ BH \perp AB \end{cases} \Rightarrow CF//BH \quad ; \begin{cases} BF \perp AB \\ CH \perp BF \end{cases} \Rightarrow CH//BF$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCF$ là hình bình hành

$\Rightarrow$ Hai đường chéo BC, HF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường mà K là trung điểm BC (theo cách vẽ) nên K cũng là trung điểm của HF

Khi đó OK là đường trung bình của ΔAHF nên $OK = \dfrac{1}{2}AH$ (tính chất đường trung bình) , suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔADE là đường tròn $(I;OK)$

Mà (O) và BC cố định, do đó O, K cố định nên OK không đổi

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔADE bằng OK không đổi

Ta có: $\angle BAC = \dfrac{1}{2} sd\ cung\ BC$ mà BC cố định nên sđ cung BC không đổi.

Do đó $\widehat{BAC}$ không đổi

Xét ΔADE và ΔACB có: $\widehat{BAC}$ $chung$;

$\widehat{AED}=\widehat{ACB}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác $BCDE$)

$\Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ACB(g.g)$ theo tỉ số $k=\dfrac{AD}{AB}$

Do đó ta có: $\dfrac{S_{AED}}{S_{ACB}}=k^2=\left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2$

Xét tam giác vuông ABD có: $\dfrac{AD}{AB}=\cos\angle BAC$

$\Rightarrow \dfrac{S_{AED}}{S_{ABC}}=\cos^2\angle BAC \Rightarrow_{AED}=\cos^2\angle BAC.S_{ABC}$, mà $\cos\angle BAC$ không đổi nên S_{AED} đạt giá trị lớn nhất thì S_{ABC} max

Kéo dài AH cắt BC tại P nên $AP\perp BC$ và $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AP.BC$

Do BC không đổi (giả thiết) nên S_{ABC} không đổi $\Leftrightarrow AP$ lớn nhất

Khi đó A phải là điểm chính giữa của cung lớn BC

Vậy S_{AED} đạt giá trị lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC

PHẦN 3: CÒN LẠI

AN GIANG

Câu 4. (2,0 điểm)

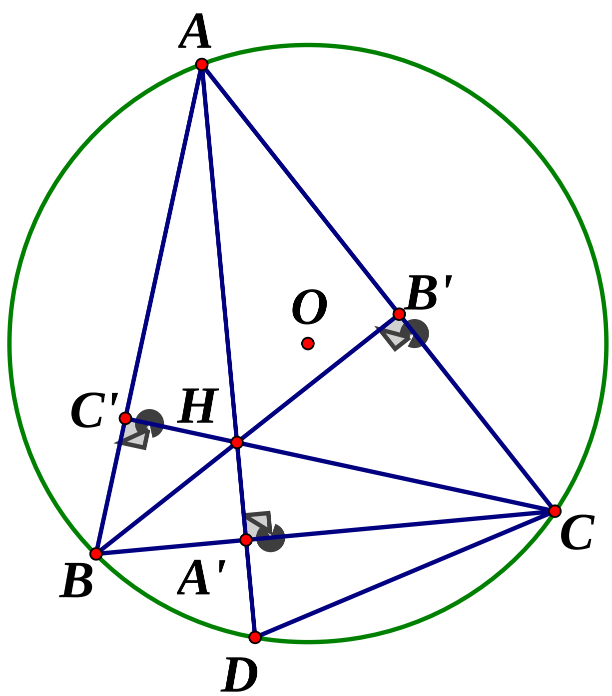
Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H

a) Chứng minh rằng tứ giác $AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp

b) Kéo dài AA' cắt đường tròn (O) tại điểm D. Chứng minh rằng tam giác CDH cân

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) **Chứng minh $AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp**

Ta có: $BB' \perp AC \Rightarrow \widehat{AB'H} = 90^0, CC' \perp AB \Rightarrow \widehat{AC'H} = 90^0$

Tứ giác $AB'HC'$ có: $\widehat{AB'H} + \widehat{AC'H} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp

b) **Chứng minh ΔCDH cân**

Ta có: $\widehat{BAA'} + \widehat{ABA'} = 90^0$; $\widehat{BCC'} + \widehat{ABA'} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BAA'} = \angle BCC'$

Lại có: $\angle BAA' = \angle BCD$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$\Rightarrow \widehat{BCC'} = \widehat{BCD} (= \angle BAA')$

Xét ΔCDH có CA' vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân

BÀ RỊA VŨNG TÀU

Bài 4. (3,5 điểm) Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm C thuộc cung AB sao cho $AC > BC$ (C khác $A, C \neq B$). Hai tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại A và C cắt nhau ở M.

a) Chứng minh tứ giác $AOCM$ nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{AOM} = \widehat{ABC}$

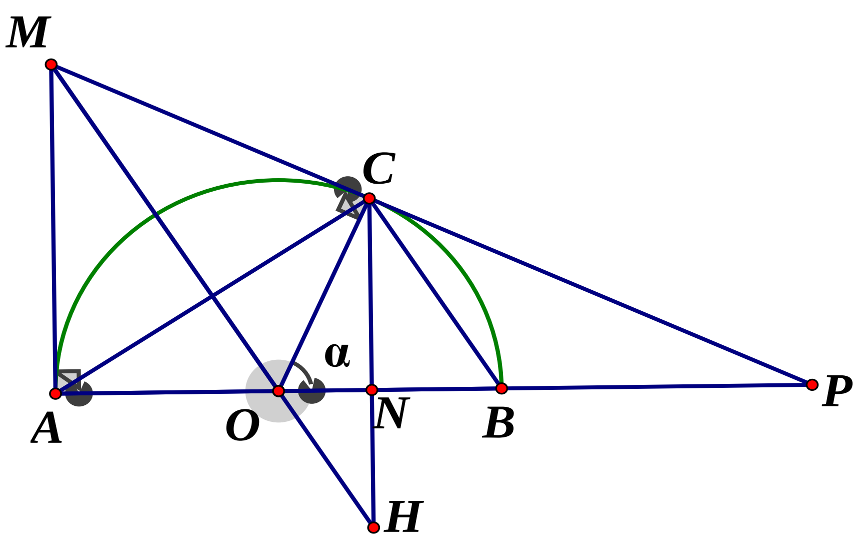
c) Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt MO tại H. Chứng minh $CM = CH$

d) Hai tia AB và MC cắt nhau tại P, đặt $\widehat{COP} = \alpha$

Chứng minh giá trị của biểu thức $\dfrac{\left(PA^2 - PC.PM\right)\sin\alpha}{S_{MCP}}$ là một hằng số

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) Chứng minh tứ giác $AOCM$ nội tiếp

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^0$

Xét tứ giác $AOCM$ có : $\widehat{MAO} + \widehat{MCO} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $AOCM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\angle AOM = \angle ABC$

Vì $AOCM$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{AOM} = \angle ACM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$). Lại có: $\widehat{ACM} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) $\Rightarrow \angle AOM = \angle ABC$

c) Chứng minh $CM = CH$

Gọi $CH \cap AB = \{N\}$

Theo ý b, ta có: $\widehat{AOM} = \angle ABC$

Mà hai góc này ở vi trí đồng vì nên $OM // BC$

$\Rightarrow BC // MH \Rightarrow \widehat{CHM} = \widehat{BCH} = \widehat{BCN} \, (1)$ (so le trong)

Ta lại có:

$\angle BCN + \angle ABC = 90^0$ ($do\, \Delta BCN$ vuông tại N)

$\angle CAB + \angle ABC = 90^0$ (phụ nhau) $\Rightarrow \angle BCN = \angle CAB$ (cùng phụ với $\angle ABC$)

Lại có: $\angle CAB = \angle CAO = \angle CMO = \angle CMH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OC)

$\Rightarrow \widehat{BCN} = \widehat{CMH} \, (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CHM} = \widehat{CMH} \Rightarrow \Delta CMH$ cân tại C $\Rightarrow CH = CM\,(dfcm)$

d) Chứng minh giá trị biểu thức … là một hằng số

Xét ΔPOC và ΔPMA có: $\widehat{APM}$ chung; $\widehat{PCO} = \angle PMA\left(=90^0\right)$

$\Rightarrow \Delta POC \sim \Delta PMA(g.g)$

$\Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{PO}{PM} \Rightarrow PC.PM = PO.PA$. Lại có: $S_{ACP} = \frac{1}{2}CN.AP$. Khi đó ta có:

$$\frac{\left(PA^2 - PC.PM\right)\sin\alpha}{S_{ACP}} = \frac{\left(PA^2 - PO.PA\right)\sin\alpha}{\frac{1}{2}CN.AP}$$

$$= \frac{PA.\left(PA - PO\right)\sin\alpha}{\frac{1}{2}CN.AP} = \frac{2.OA.\sin\alpha}{CN}$$

Xét ΔOCN vuông ta có: $\sin\alpha = \frac{CN}{OC} = \frac{CN}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{CN} = \frac{1}{\sin\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{\left(PA^2 - PC.PM\right)\sin\alpha}{S_{MCP}} = 2\sin\alpha.\frac{1}{\sin\alpha} = 2$$

Vậy $\frac{\left(PA^2 - PC.PM\right)\sin\alpha}{S_{MCP}} = 2 = constast\left(dfcm\right)$

BẮC GIANG

Câu 4. (2,0 điểm) Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 3cm$. Gọi A, B là hai điểm phân biệt cố định trên đường tròn $\left(O;R\right)$ (AB không là đường kính). Trên tia đối của tia BA lấy một điểm M (M khác B). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn đã cho $(C, D$ là hai tiếp điểm)

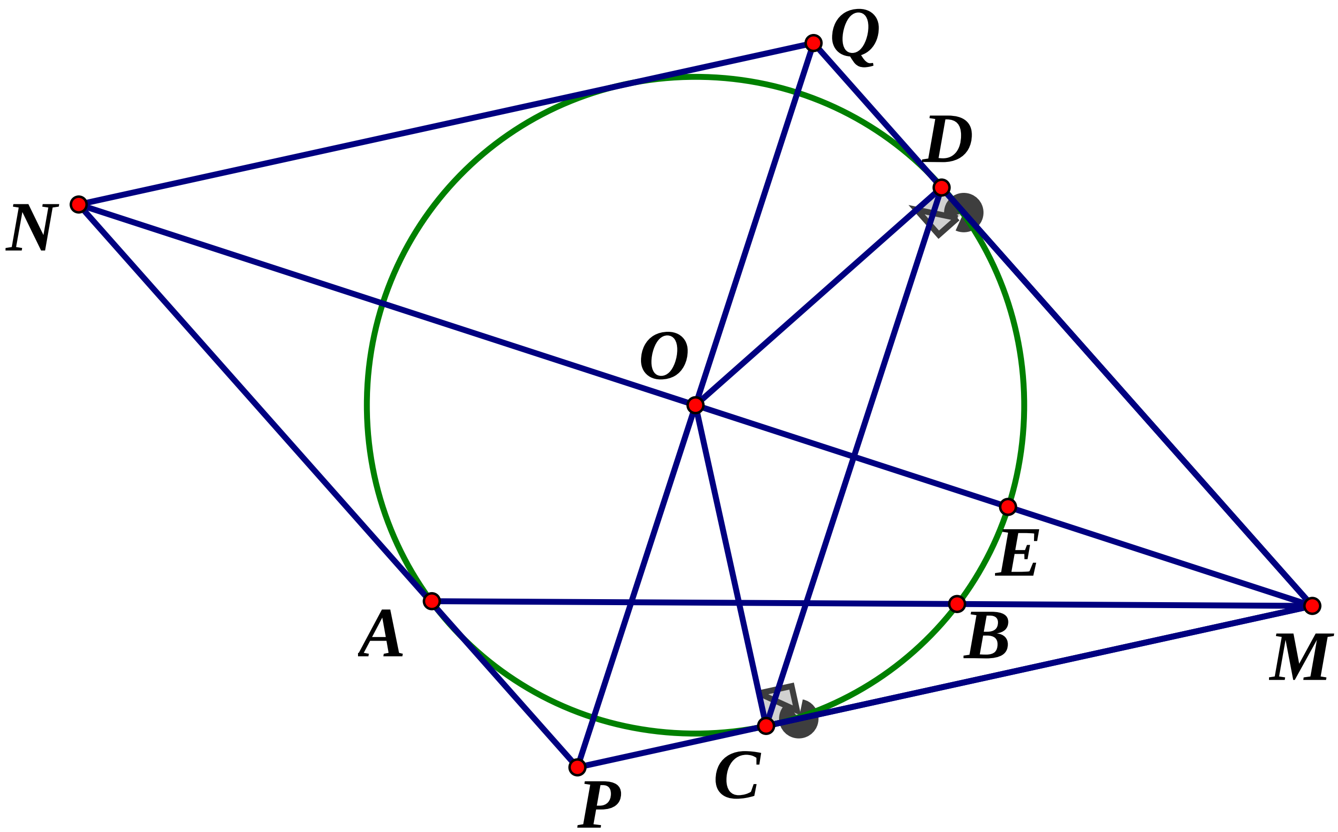
d) Chứng minh tứ giác $OCMD$ nội tiếp trong một đường tròn

e) Đoạn thẳng OM cắt đường tròn $\left(O;R\right)$ tại điểm E. Chứng minh rằng khi $\widehat{CMD} = 60^0$ thì E là trọng tâm của tam giác MCD

f) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O. Đường thẳng đi qua O vuông góc với MN cắt các tia MC, MD lần lượt tại các điểm P và Q. Khi M di động trên tia đối của tia BA, tìm vị trí của điểm M để tứ giác $MPNQ$ có diện tích nhỏ nhất

ĐÁP ÁN

Câu 4.



d) Chứng minh tứ giác $OCMD$ nội tiếp

Xét đường tròn tâm O có MC, MD là các tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{ODM} = 90^0$

Tứ giác $OCMD$ có: $\widehat{OCM} + \widehat{ODM} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow OCMD$ là tứ giác nội tiếp

e) Chứng minh E là trọng tâm ΔMCD

Xét đường tròn (O) có MC, MD là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên $MC = MD$ và MO là tia phân giác của $\widehat{CMD}$

Mà $\widehat{CMD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{OMD} = \frac{1}{2}\widehat{CMD} = \frac{1}{2}.60^0 = 30^0$

Xét ΔODM vuông có $OD = R = 3cm, \widehat{OMD} = 30^0$

Ta có:

$$\sin\widehat{DMO} = \frac{OD}{OM} \Rightarrow OM = \frac{OD}{\sin 30^0} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6(cm) \Rightarrow EM = OM - OE = 6 - 3 = 3(cm)$$

Lại có: $\begin{cases} MD = MC \\ OD = OC = R \end{cases}$ nên OM là đường trung trực của đoạn DC. Gọi I là giao điểm của OM và $DC \Rightarrow OM \perp DC$ tại I

Theo hệ thức lượng trong tam giác ODM vuông ta có:

$$OD^2 = OI.OM \Leftrightarrow OI = \frac{OD^2}{OM} = \frac{3^2}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow IM = OM - OI = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Từ đó ta có: $\frac{ME}{MI} = \frac{3}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow ME = \frac{2}{3}MI$

Xét tam giác MCD có $MC = MD$ và $\widehat{CMD} = 60^0$ nên ΔMCD là tam giác đều có MI là đường phân giác nên MI cũng là trung tuyến. Lại có $ME = \frac{2}{3}MI\,(cmt)$ nên E là trọng tâm tam giác $MCD(dfcm)$

f) Tìm vị trí của M để S_{MNPQ} min

Vì N đối xứng với M qua O nên $OM = ON$

Xét hai tam giác vuông $\Delta OQM, \Delta OPM$ có cạnh OM chung, $\widehat{OMQ} = \widehat{OMP}$

Suy ra $\Delta OQM = \Delta OPM\,(g.c.g) \Rightarrow OP = OQ$

Diện tích tứ giác $MPNQ$ là :

$$S_{MPNQ} = \frac{1}{2}MN.PQ = \frac{1}{2}.2OM.2OQ = 4.\frac{1}{2}OM.OQ = 4S_{OQM} = 4.OD.MQ = 4R.MQ$$

Xét ΔOQM vuông tại O có OD là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $OD^2 = DQ.DM \Leftrightarrow R^2 = DQ.DM$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $QM = DQ + DM \geq 2\sqrt{DQ.DM} = 2\sqrt{R^2} = 2R$

Hay $QM_{\min} = 2R \Leftrightarrow QD = DM = R$

Từ đó S_{MPNQ} nhỏ nhất là $8R^2 \Leftrightarrow MQ = 2R$

Khi đó: Xét ΔMDB & ΔMAD có: $\widehat{DMB}$ chung; $\widehat{MDB} = \widehat{MAD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$$\Rightarrow \Delta MDB \sim \Delta MAD(g-g) \Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MD^2 = MA.MB \Rightarrow MA.MB = R^2$$

Đặt $AB = a, MB = x$ (a không đổi, $a, x > 0$)

Ta có:

$MA.MB = R^2 \Leftrightarrow x\left(x+a\right) = R^2 \Leftrightarrow x^2 + ax - R^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4R^2}}{2}\left(do\ x>0\right)$

Vậy điểm M thuộc tia đối của tia AB và cách B một khoảng bằng

$MB = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4R^2}}{2}$ không đổi thì tứ giác $MPNQ$ có diện tích nhỏ nhất là $8R^2$

BẮC CẠN

Câu 5. (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn $\left(O\right)$ đường kính MN, điểm P thuộc nửa đường tròn $\left(PM > PN\right)$. Kẻ bán kính OK vuông góc với MN cắt dây MP tại E. Gọi d là tiếp tuyến tại P của nửa đường tròn. Đường thẳng đi qua E và song song với MN cắt d ở F. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MPEO$ nội tiếp đường tròn

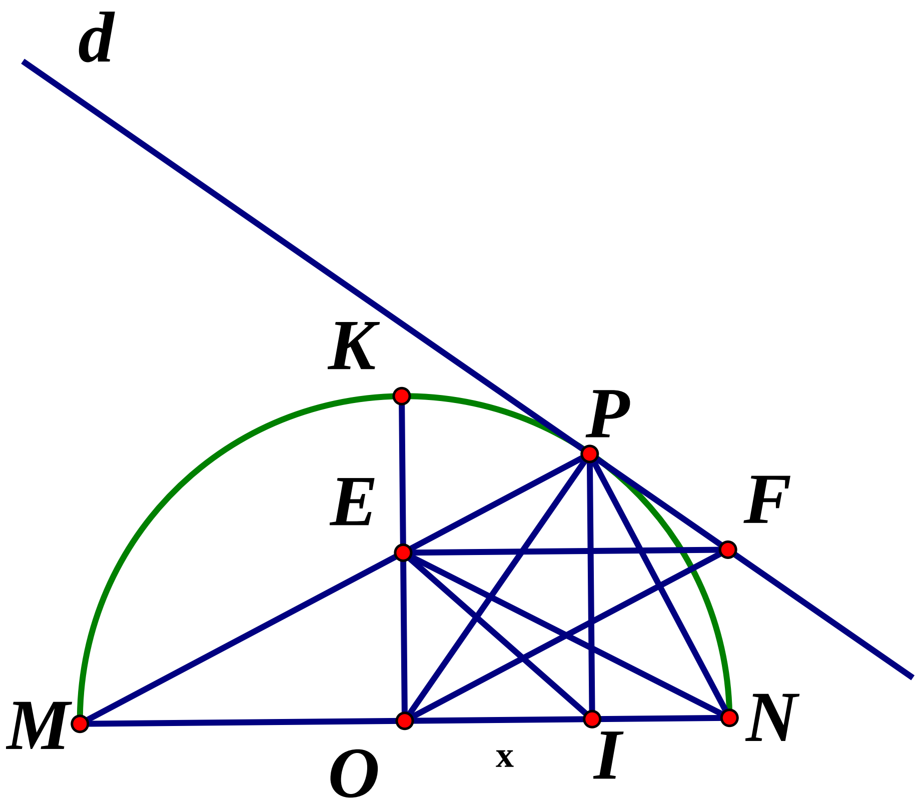
b) $ME.MP = MO.MN$

c) $OF\ //\ MP$

d) Gọi I là chân đường cao hạ từ P xuống MN. Hãy tìm vị trí điểm P để IE vuông góc với MP

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Tứ giác $NPEO$ nội tiếp đường tròn

Vì $\angle MPN$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\angle MPN = 90^0 \Rightarrow \angle EPN = 90^0$

Xét tứ giác $NPEO$ có $\widehat{EPN} + \widehat{EON} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow NPEO$ là tứ giác nội tiếp

b) $ME.MP = MO.MN$

Xét ΔMOE và ΔMPN có: $\widehat{PMN}$ $chung$; $\widehat{MOE} = \widehat{MPN} = 90^0$

$$\Rightarrow \Delta MOE \sim \Delta MPN(g.g) \Rightarrow \frac{MO}{MP} = \frac{ME}{MN} \Rightarrow ME.MP = MO.MN\left(dfcm\right)$$

c) OF song song với MP

Vì $EF // MN(gt)$ mà $MN \perp OK$ nên $EF \perp OK \Rightarrow \widehat{OEF} = 90^0 = \widehat{OPF} \Rightarrow OEPF$ là tứ giác nội tiếp

Lại có $NPEO$ là tứ giác nôi tiếp (cmt) $\Rightarrow 5$ điểm O, E, P, F, N cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác $OEFN$ cũng là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EON} + \widehat{EFN} = 180^0$ mà $\widehat{EON} = 90^0 (gt) \Rightarrow \widehat{EFN} = 90^0$

Xét tứ giác $OEFN$ có: $\widehat{EON} = \widehat{OEF} = \widehat{EFN} = 90^0 \Rightarrow OEFN$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) $\Rightarrow \widehat{ONF} = 90^0 \Rightarrow NF$ là tiếp tuyến của (O) tại N

$\Rightarrow \widehat{FNP} = \widehat{NMP}$ (cùng chắn $\overset\frown{NP}$)

Mà $\widehat{NMP} = \widehat{OMP} = \widehat{OPM}$ (do ΔOMP cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{FNP} = \widehat{OPM} = \widehat{OPE}$

Mà $\widehat{FNP} = \widehat{FOP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{FP}$). $\Rightarrow \widehat{OPE} = \widehat{FOP}$

Mà 2 góc này ở vị trí so le trong nên $OF // MP$

d) Tìm vị trí điểm P……

Đặt $OI = x, MN = 2R \Rightarrow IN = R - x \left(0 < x < R\right)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MPN ta có:

$$PI^2 = MI.NI = \left(R + x\right)\left(R - x\right) = R^2 - x^2 \Rightarrow PI = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Ta có: $OK // PI$ (cùng vuông góc với MN) nên áp dụng định lý Ta let ta có:

$$\frac{OE}{PI} = \frac{MO}{MI} \Rightarrow \frac{OE}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R}{R + x} \Leftrightarrow OE = \frac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{R + x}$$

Để $IE \perp MP$ thì $IE // PN \left(do\, MP \perp PN\right)$, khi đó $\widehat{OIE} = \widehat{INP}$ (hai góc đồng vị)

Xét tam giác OIE có: $\tan\widehat{OIE} = \dfrac{OE}{OI} = \dfrac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{x\left(R + x\right)}$

Xét tam giác vuông IPN có $\tan\widehat{INP} = \dfrac{IP}{IN} = \dfrac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R - x}$

Vì $\widehat{OIE} = \widehat{INP} \Rightarrow \tan\angle OIE = \tan\angle INP$

$$\Rightarrow \frac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{x(R+x)} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R - x} \Leftrightarrow R(R - x) = x(R + x)$$

$$\Leftrightarrow R^2 - Rx = xR + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2Rx - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -R + R\sqrt{2} = R\left(\sqrt{2} - 1\right)(tm) \\ x_2 = -R - R\sqrt{2} < 0(ktm) \end{array}\right. \Rightarrow x = R\left(\sqrt{2} - 1\right) = OI$$

$$\Rightarrow \tan\angle INP = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R - x} = \frac{\sqrt{R^2 - R^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}}{R - R\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{R\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{R\left(2 - \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}} = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$$

$$\Rightarrow \tan\angle MNP = \tan\angle INP = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$$

Vậy khi điểm P nằm trên đường tròn (O) thỏa mãn $\tan\angle MNP = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ thì $IE \perp MP$

BẮC NINH

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm M khác C sao cho $AM > MC$. Vẽ đường tròn tâm O đường kính MC, đường tròn này cắt BC tại E $(E \neq C)$ và cắt đường thẳng BM tại $D(D \neq M)$

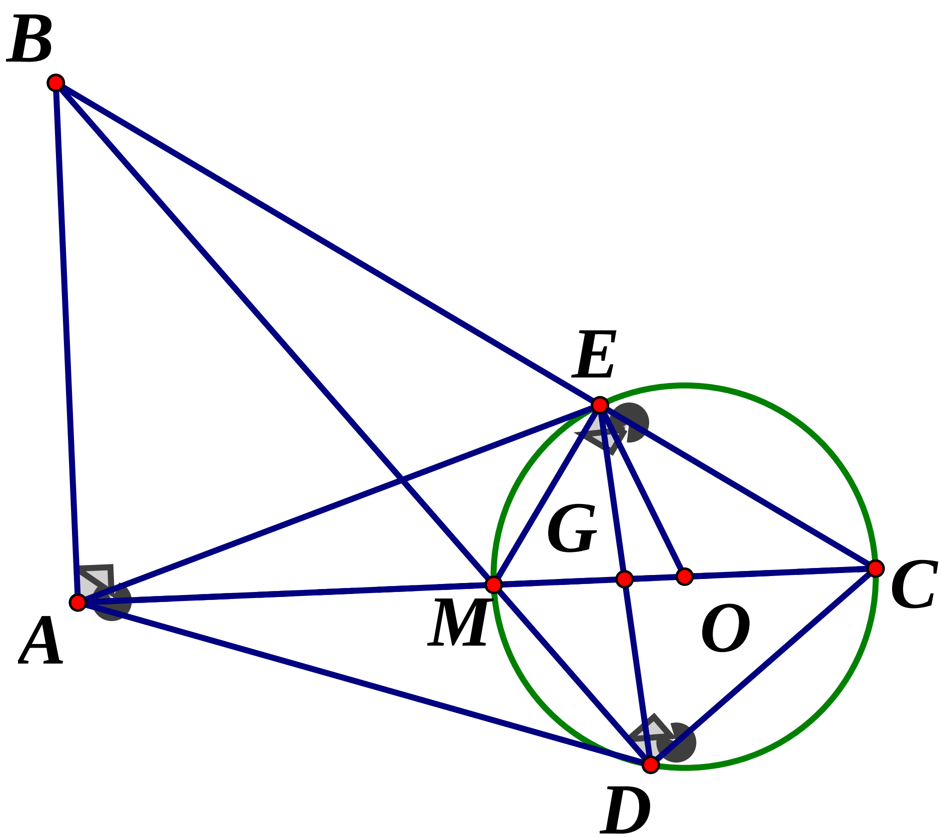
a) Chứng minh $ADCB$ là một tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{ABM} = \widehat{AEM}$ và EM là tia phân giác của góc $\widehat{AED}$

c) Gọi G là giao điểm của ED và AC. Chứng minh rằng $CG.MA = CA.GM$

ĐÁP ÁN

Câu 3.



a) ADCB là tứ giác nội tiếp

Xét đường tròn (O) ta có: $\widehat{MDC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{MDC} = 90^0 \ hay \ \widehat{BDC} = 90^0$

Xét tứ giác $ADCB$ có $\angle BAC = \angle BDC = 90^0$ mà A, D là 2 đỉnh kề nhau

Nên $ADCB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{ABM} = \widehat{AEM}$ và EM là tia phân giác của góc $\widehat{AED}$

Xét đường tròn (O) ta có: $\widehat{MEC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{MEC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BEM} = 90^0$ (hai góc kề bù)

Xét tứ giác $ABEM$ ta có: $\widehat{BAM} + \widehat{BEM} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow ABEM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{AEM}$ (cùng chắn cung AM)

Ta có: $\widehat{MED} = \widehat{MCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MD}$ của (O)) (1)

Vì $ADCB$ là tứ giác nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{ABD}$(hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$) (2)

Lại có $\widehat{ABM}=\widehat{AEM}\,(cmt)$ hay $\widehat{ABD}=\widehat{AEM}$ (3)

Từ (1), (2), (3)$\Rightarrow \widehat{AEM}=\widehat{MED}\Rightarrow ME$ là phân giác của $\widehat{AED}\,(dfcm)$

c) Chứng minh rằng $CG.MA=CA.GM$

Xét ΔAEG ta có: EM là phân giác trong của tam giác $(cmt)\Rightarrow \dfrac{AE}{EG}=\dfrac{AM}{MG}$(tính chất đường phân giác)$\Rightarrow \dfrac{AE}{EG}=\dfrac{AM}{MG}$(tính chất đường phân giác)

Lại có : $ME\perp EC(cmt)\Rightarrow EC$ là đường phân giác ngoài tại đỉnh E của ΔAEG

$\Rightarrow \dfrac{AE}{EG}=\dfrac{AC}{CG}$(tính chất đường phân giác)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{MG}=\dfrac{AC}{CG}\left(=\dfrac{AG}{EG}\right)\Rightarrow AM.CG=AC.MG\,(dfcm)$

BẾN TRE

Câu 8. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có các đường cao BE,CF cắt nhau tại H $(E\in AC,F\in AB)$

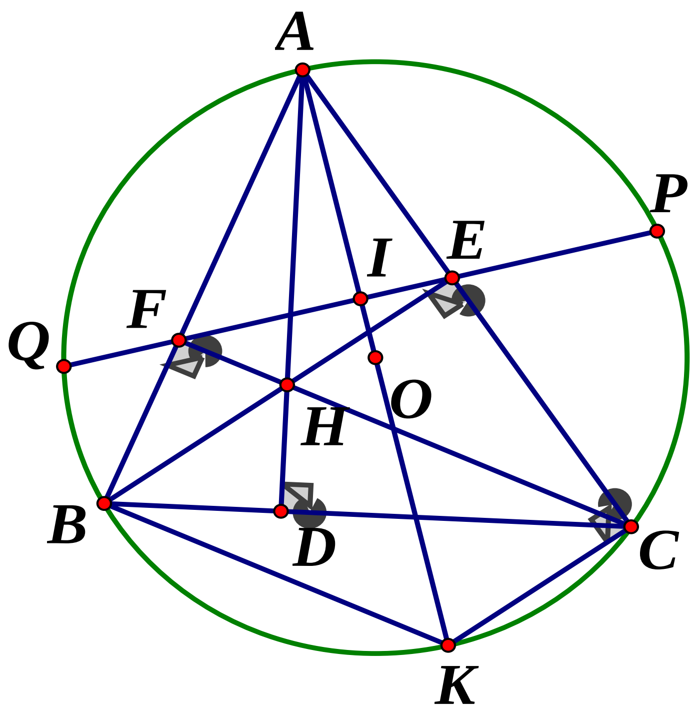
a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp

b) Chứng minh $AH\perp BC$

c) Gọi P,G là hai giao điểm của đường thẳng EF và đường tròn (O) sao cho điểm E nằm giữa hai điểm P và điểm F.Chứng minh AO là đường trung trực của đoạn thẳng PG

ĐÁP ÁN

Câu 8.



a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp

Ta có: $CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFC} = 90^0, BE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^0$

Tứ giác $AFHE$ có $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $AFHE$ nội tiếp

b) Chứng minh $AH \perp BC$

Kéo dài AH cắt BC tại D

Do BE, CF là các đường cao trong tam giác và $BE \cap CF = \{H\}$ nên H là trực tâm của $\Delta ABC \Rightarrow AD$ là đường cao trong $\Delta ABC \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AH \perp BC(dfcm)$

c) Chứng minh AO là đường trung trực của đoạn thẳng PG

Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ nên là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$)(1)

Kẻ đường kính AA', Gọi I là giao điểm của AO và PG

Tứ giác $BACA'$ nội tiếp nên $\widehat{BAA'} = \widehat{BCA'}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BA'}$)(2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{AFE} + \widehat{BAA'} = \widehat{ACB} + \widehat{BC'A}$

Mà $\widehat{ACB} + \widehat{BCA'} = \widehat{A'CA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $\widehat{AFE} + \widehat{BAA'} = 90^0$ hay $\widehat{AFI} + \widehat{FAI} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIF} = 90^0 \Rightarrow AO \perp PG$ tại I.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của PG (tính chất đường kính dây cung)

Nên AO là đường trung trực của PG

BÌNH ĐỊNH

Bài 4. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và d là một tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Trên đường thẳng d lấy điểm M (khác A) và trên đoạn OB lấy điểm N (khác O và B). Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C và D sao cho C nằm giữa M và D. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng CD

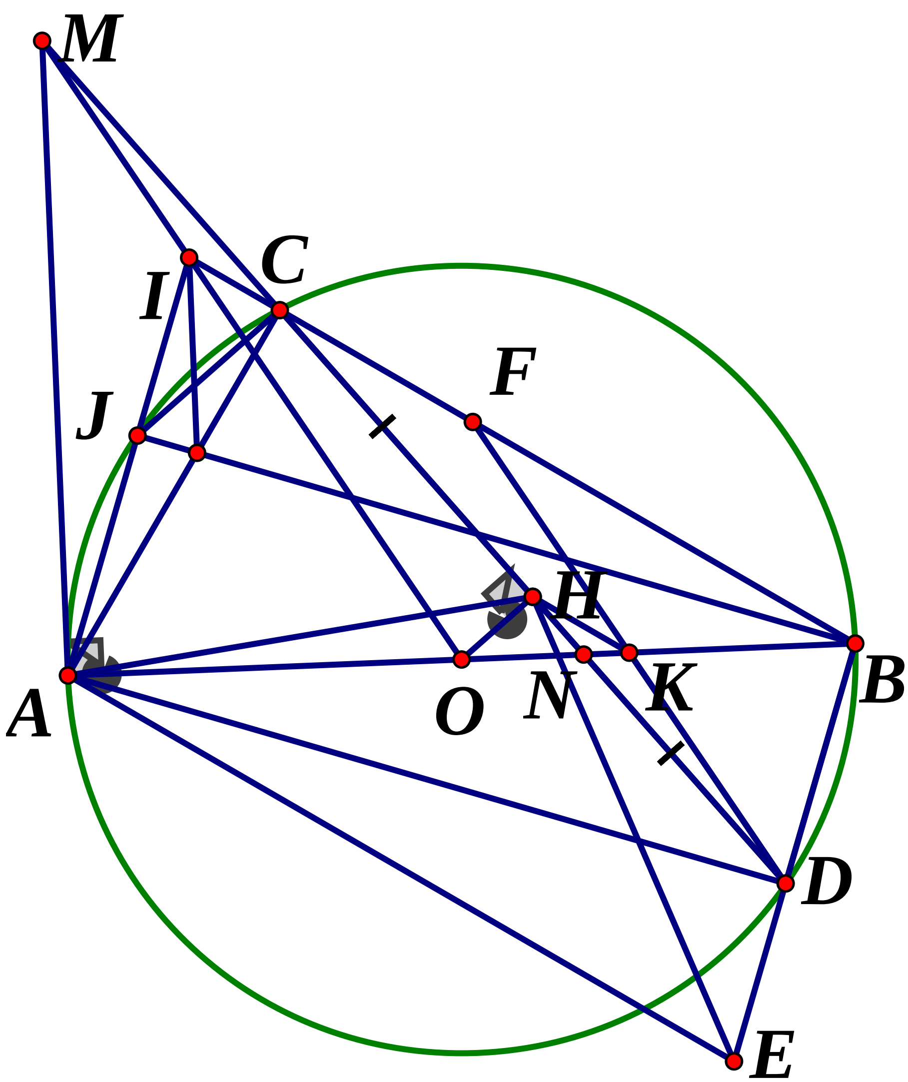
a) Chứng minh tứ giác $AOHM$ nội tiếp trong một đường tròn

b) Kẻ đoạn DK song song với MO (K nằm trên đường thẳng AB). Chứng minh rằng $\widehat{MDK} = \widehat{BAH}$ và $MA^2 = MC.MD$

c) Đường thẳng BC cắt đường thẳng OM tại điểm I. Chứng minh rằng đường thẳng AI song song với đường thẳng BD

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) Chứng minh AOHM là tứ giác nội tiếp

Ta có: MA là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{MAO} = 90^0$

H là trung điểm của $CD \Rightarrow OH \perp CD = \{H\}$ (đường kính – dây cung)

$\Rightarrow \widehat{OHC} = \widehat{OHM} = 90^0$

Xét tứ giác $AOHM$ có: $\widehat{MAO} + \widehat{OHM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà hai góc này đối diện nên $AOHM$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)

b) Chứng minh $\angle MDH = \angle BAH$ và $MA^2 = MC.MD$

Ta có: $DK // MO(gt) \Rightarrow \angle MDK = \angle DMO$ (hai góc so le trong)

Vì $AOHM$ là tứ giác nội tiếp (cm câu a) $\Rightarrow \widehat{HMO} = \widehat{HAO}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{OH}$)

Hay $\widehat{BAD} = \widehat{DMO} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{MDK}\left(= \widehat{DMO}\right)(dfcm)$

Xét ΔAMC và ΔDMA ta có: $\widehat{M}$ chung; $\widehat{MDA} = \widehat{MAC}$ (cùng chắn $\overset\frown{AC}$)

$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta DMA(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{DM} = \dfrac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD(dfcm)$

c) Chứng minh $AI//BD$

Gọi E là giao điểm của MO và $BD.$ Kéo dài DK cắt BC tại F

Xét tứ giác $AHKD$ có $\widehat{HAK} = \widehat{KDH}$ (câu b)

$\Rightarrow AHKD$ là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau) $\Rightarrow \angle DAK = \angle DHK$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{DK}$)

Mà $\angle DAK = \angle DCB$ (cùng chắn $\overset\frown{DB}$) nên $\widehat{DHK} = \widehat{DCB}$

Hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HK//CB \Rightarrow HK//CF$

Trong tam giác DCF, $HK//CF, H$ là trung điểm CD nên K là trung điểm FD

$\Rightarrow DK = KF$. Lại có: $DK//MO \Rightarrow DF//IE \Rightarrow \dfrac{DK}{OE} = \dfrac{FK}{OI}\left(= \dfrac{BK}{BO}\right)$

Mà $DK = FK(cmt) \Rightarrow OE = OI$

Xét tứ giác $AIBE$ có hai đường chéo IE và AB cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên $AIBE$ là hình bình hành $\Rightarrow AI//BE \Rightarrow AI//BD(dfcm)$

BÌNH DƯƠNG

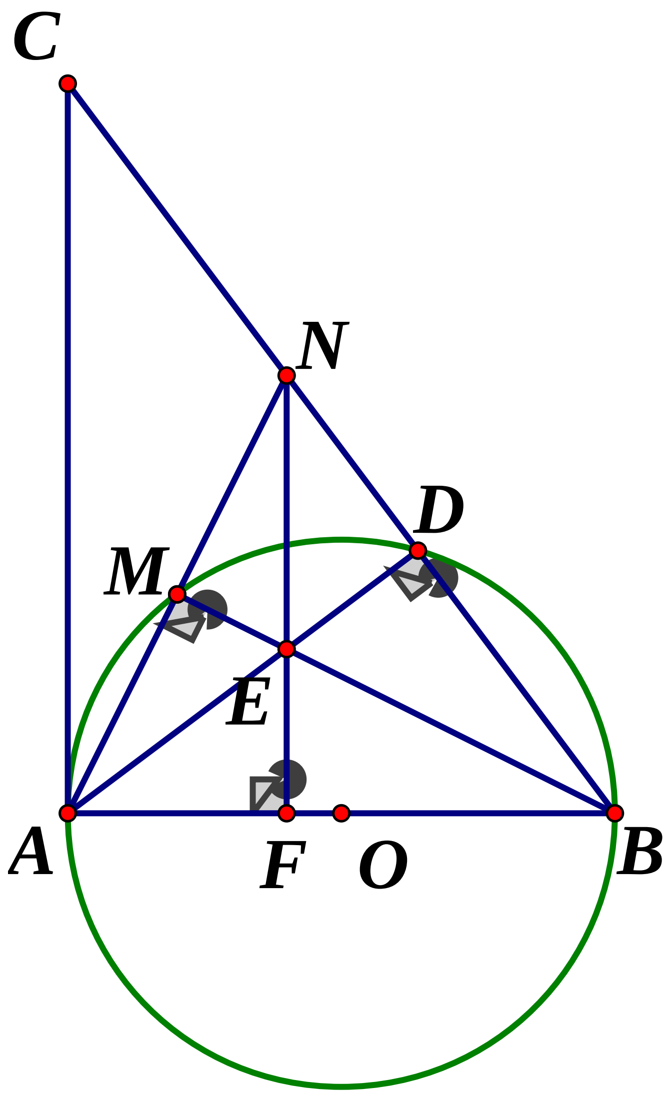
Bài 5. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O;3cm)$ có đường kính AB và tiếp tuyến $Ax.$ Trên Ax lấy điểm C sao cho $AC = 8cm, BC$ cắt đường tròn (O) tại $D.$ Đường phân giác của góc CAD cắt đường tròn (O) tại M và cắt BC tại N

1) Tính độ dài đoạn thẳng AD
2) Gọi E là giao điểm của AD và $MB.$ Chứng minh tứ giác $MNDE$ nội tiếp được trong đường tròn.
3) Chứng minh tam giác ABN là tam giác cân
4) Kẻ EF vuông góc AB $(F \in AB).$ Chứng minh N, E, F thẳng hàng.

ĐÁP ÁN

Bài 5.



1) Tính độ dài đoạn thẳng AD

Vì $\widehat{ADB}$ nội tiếp nửa đường tròn (O) nên $\widehat{ADB}=90^0 \Rightarrow AD\perp BD$ hay $AD\perp BC$

Ta có: Ax là tiếp tuyến của (O) tại A nên $Ax\perp AB$ hay $AB\perp AC$

AB là đường kính của $(O;3cm)$ nên $AB=2.3=6(cm)$

Do đó ΔABC vuông tại A có đường cao AD

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

$$\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2}=\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}\Rightarrow \frac{1}{AD^2}=\frac{25}{576}\Rightarrow \sqrt{\frac{576}{25}}=4,8(cm)$$

Vậy $AD = 4,8cm$

2) Chứng minh $MNDE$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : $AD \perp BC(cmt) \Rightarrow \widehat{EDN} = 90^0$

Tương tự ta có $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên $\widehat{AMB} = 90^0$

$\Rightarrow AM \perp BM$ hay $AN \perp BM \Rightarrow \widehat{EMN} = 90^0$

Xét tứ giác $MNDE$ có $\widehat{EDN} + \widehat{EMN} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $MNDE$ là tứ giác nội tiếp .

3) Chứng minh ΔABN là tam giác cân

Ta có: $\widehat{CAN} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn $\overset\frown{AM}$)

$\widehat{MAD} = \widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{MD}$)

Mà $\widehat{CAN} = \widehat{MAD}(gt) \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MBD}$, do đó BM là tia phân giác của $\widehat{ABN}$

Xét ΔABN có BM là đường cao đồng thời là đường phân giác nên tam giác ABN cân tại $B(dfcm)$

4) Chứng minh N, E, F thẳng hàng

Xét ΔABN có $AD \perp BN(cmt)$; $BM \perp AN(cmt)$; $AD \cap BM = \{E\}(gt)$

$\Rightarrow E$ là trực tâm của tam giác ABN

Do đó NE là đường cao thứ ba của tam giác ABN nên $NE \perp AB$

Lại có : $EF \perp AB(gt)$

$\Rightarrow$ Qua điểm E nằm ngoài đường thẳng AB kẻ được hai đường thẳng EF, NE cùng vuông góc với $AB \Rightarrow NE \equiv EF$ (Tiên đề Ơ clit)

Vậy N, E, F thẳng hàng (đpcm)

BÌNH PHƯỚC

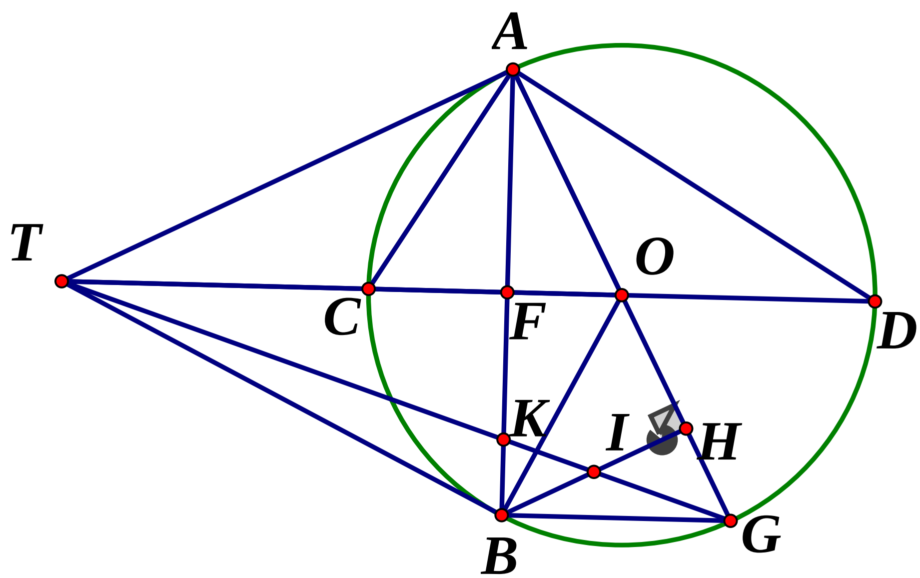
Câu 5. (2,5 điểm)

Từ một điểm T ở bên ngoài đường tròn (O), Vẽ hai tiếp tuyến TA, TB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Tia TO cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt C và D (C nằm giữa T và O) và cắt đoạn thẳng AB tại điểm F

a) Chứng minh : Tứ giác $TAOB$ nội tiếp
b) Chứng minh: $TC.TD = TF.TO$
c) Vẽ đường kính AG của đường tròn (O). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ điểm B đến AG, I là giao điểm của TG và BH. Chứng minh I là trung diểm của BH

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Chứng minh tứ giác $TAOH$ nội tiếp

Ta có: TA, TB là hai tiếp tuyến của (O) tại A, B (gt)

$$\Rightarrow \begin{cases} TA \perp OA \\ TB \perp OB \end{cases} \Rightarrow \widehat{TAO} = \widehat{TBO} = 90^0$$

Xét tứ giác $TAOB$ ta có: $\widehat{TAO} + \widehat{TBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$, mà hai góc này là hai góc đối diện nên $TAOB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $TC.TD = TF.TO$

Ta có: $OA = OB = R \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB

$TA = TB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow T$ thuộc đường trung trực của AB

$\Rightarrow TO$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow TO \perp AB = \{F\}$

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔTAO vuông tại A có đường cao AF ta có:

$TA^2 = TF.TO$ (1)

Xét ΔTAC và ΔTDA ta có:

$\widehat{T}$ chung; $\widehat{TDA} = \widehat{TAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$$\Rightarrow \Delta TAC \sim \Delta TDA (g.g) \Rightarrow \frac{TA}{TD} = \frac{TC}{TA} \Rightarrow TA^2 = TC.TD \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow TF.TO = TC.TD \left(= TA^2\right) (dfcm)$

c) Chứng minh I là trung điểm của BH

Gọi $AB \cap TG = \{K\}$

Ta có: $\begin{cases} AT \perp OA \Rightarrow AT \perp AG \\ BH \perp AG \end{cases} \Rightarrow BH // AT \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{TAB}$ (so le trong)

Mà $TA = TB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên ΔTAB cân tại T

$\Rightarrow \widehat{TAB} = \widehat{TBA} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{TBA} \Rightarrow BK$ là phân giác của $\widehat{TBH}$

Ta có: $\widehat{ABG} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BA \perp BG$ hay $BK \perp BG$

Do đó BG là phân giác ngoài của $\widehat{TBH}$

Áp dụng định lý đường phân giác ta có: $\dfrac{BI}{BT} = \dfrac{KI}{KT} = \dfrac{GI}{GT}$

Lại có $\dfrac{KI}{KT} = \dfrac{BI}{AT}; \dfrac{GI}{GT} = \dfrac{IH}{AT}$ (định lý Ta – lét)

Do đó $\dfrac{BI}{AT} = \dfrac{IH}{AT} \Rightarrow BI = IH$

Vậy I là trung điểm của $BH\,(dfcm)$

BÌNH THUẬN

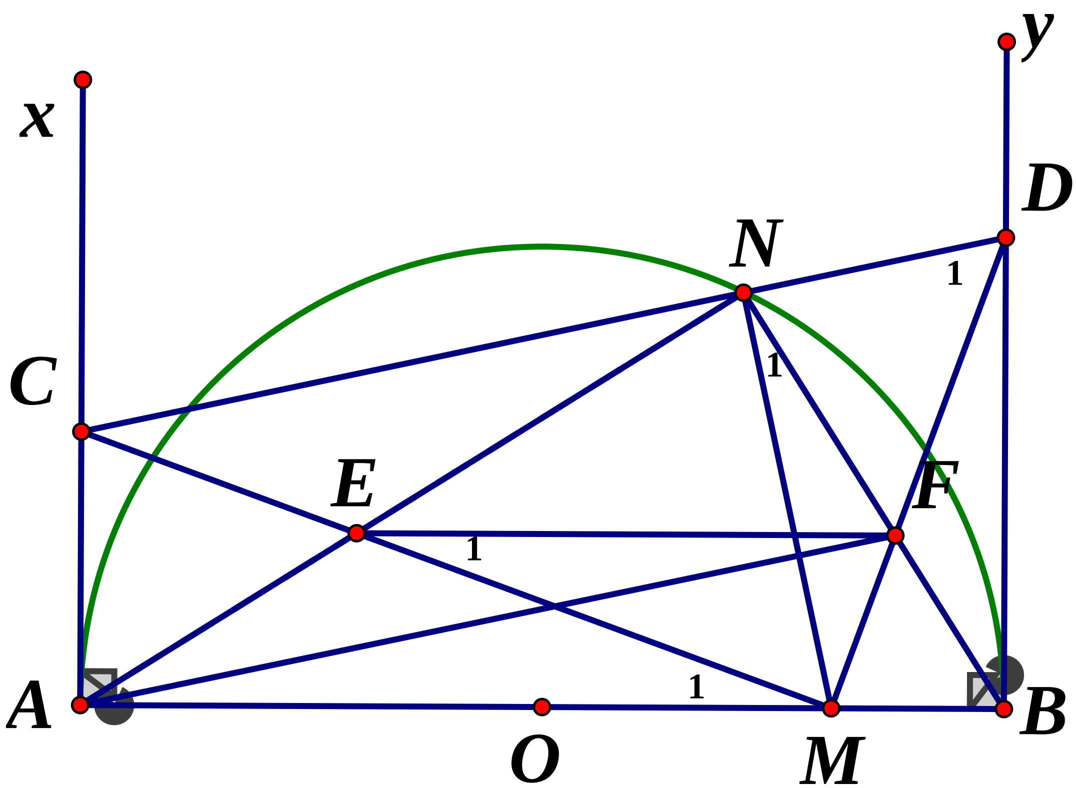
Bài 5. (4,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm M (M khác O và B). Đường thẳng vuông góc với MN tại N cắt các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn (O) lần lượt ở C và D (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB)

a) Chứng minh tứ giác $ACNM$ nội tiếp
b) Chứng minh $AN.MD = NB.CM$
c) Gọi E là giao điểm của AN và CM. Đường thẳng qua E và vuông góc với BD, cắt MD tại F. Chứng minh N, F, B thẳng hàng
d) Khi $\widehat{ABN} = 60^0$, tính theo R diện tích của phần nửa hình tròn tâm O bán kính R nằm ngoài ΔABN

ĐÁP ÁN

Bài 5.



a) **Chứng minh tứ giác $ACNM$ nội tiếp**

Vì AC là tiếp tuyến của (O) tại A nên $\widehat{MAC} = 90^0$

Vì $MN \perp CD$ tại N nên $\angle MNC = \angle MND = 90^0$

Xét tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MAC} + \widehat{MNC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow ACNM$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

b) **Chứng minh $AN.MD = NB.CM$**

Vì BD là tiếp tuyến của (O) tại B nên $\angle MBD = 90^0$

Xét tứ giác $BMND$ có: $\angle MBD + \angle MND = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow BMND$ là tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow \angle MDN = \angle MBN$ (cùng chắn cung MN)

$\Rightarrow \angle ABN = \angle MDC$

Vì $ACNM$ là tứ giác nội tiếp (câu a)$\Rightarrow \angle MAN = \angle MCN$ (cùng chắn cung MN)

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{MCD}$

Xét ΔABN và ΔCDN có: $\angle ABN = \angle MDC(cmt); \angle BAN = \angle MCD(cmt)$

$$\Rightarrow \Delta ABN \sim \Delta CDM\,(g.g) \Rightarrow \frac{AN}{CM} = \frac{NB}{MD} \Rightarrow AN.MD = NB.CM\,(dfcm)$$

c) **Chứng minh N, F, B thẳng hàng.**

Gọi $E = BN \cap DM$, ta chứng minh $EF \perp BD$

Vì $\Delta ABN \sim \Delta CDM\,(cmt)$ nên $\widehat{ANB} = \widehat{CMD}$ mà $\widehat{ANB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CMD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ENF} = \widehat{EMF} = 90^0$

Xét tứ giác $MENF$ có $\widehat{ENF} + \widehat{EMF} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow MENF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0).

$\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{E_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MF)

Mà $\widehat{N_1} = \widehat{D_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{D_1}\,(1)$

Vì ΔBDM vuông tại B nên $\widehat{D_1} + \widehat{BMD} = 90^0$ (hai góc nhọn trong tam giác vuông phụ nhau)

Mà $\widehat{BMD} + \widehat{CMD} + \widehat{M_1} = 180^0 \Rightarrow \angle M_1 + \angle BMD = 180^0 - \angle CMD = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{M_1}\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{M_1}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $EF // AM \;\; hay \; EF // AB$. Lại có $AB \perp BD(gt) \Rightarrow EF \perp BD$

Vậy đường thẳng qua E vuông góc với BD cắt MD tại $F \in BN\,(dfcm)$

d) Khi $\angle ABN = 60^{0,}$, tính theo R diện tích …..

Xét tam giác vuông ABN vuông tại N có $AB = 2R, \widehat{ABN} = 60^0\,(gt)$ ta có:

$AN = AB.\sin\angle ABN = 2R.\sin 60^0 = R\sqrt{3}$

$BN = AB.\cos\angle ABN = 2R.\cos 60^0 = R$

$$\Rightarrow S_{ABN} = \frac{1}{2}AN.BN = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích nửa hình tròn tâm $(O;R)$ là $S_r = \frac{1}{2}\pi R^2$

Vậy diện tích của phần nửa hình tròn tâm O, bán kính R nằm ngoài ΔABN là:

$$S = S_r - S_{ABN} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

CÀ MAU

Bài 6.

Câu 1. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Vẽ các đường cao BD, CE của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của BD, CE

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được đường tròn

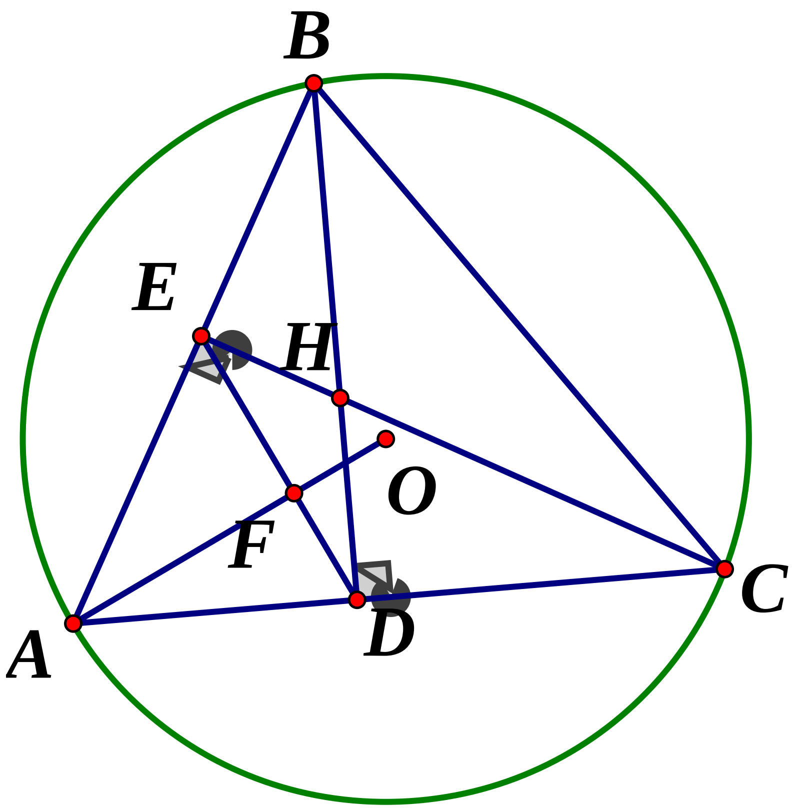
b) Chứng minh rằng: $DE.AC = BC.AE$

c) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $OA \perp DE$

ĐÁP ÁN

Bài 6.

Câu 1.



a) Theo giả thiết, ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^0 \Rightarrow$ tứu giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn

b) Vì $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^0(gt)$ và cùng nhìn cạnh BC nên $BEDC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BED} + \widehat{BCD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BCD} = 180^0 - \widehat{BED} = \widehat{DEA}$

Xét ΔAED và ΔACB có: $\widehat{DAE}$ chung; $\widehat{DEA} = \widehat{BCA}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ACB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow DE.AC = BC.AE(dfcm)$

c) Gọi $OA \cap ED = \{F\}$

Ta có: $\widehat{AFD} = 180^0 - \widehat{FAD} - \widehat{FDA} = 180^0 - \widehat{OAC} - \widehat{EDA}(1)$

Xét ΔOAC có $OA = OC \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OAC} = \dfrac{180^0 - \widehat{AOC}}{2} = 90^0 - \widehat{ABC}(2)$

Lại có: $\widehat{EDA}=\widehat{ABC}$ (do $\Delta AED\sim\Delta ACB)(3)$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow\widehat{AFD}=180^0-\left(90^0-\widehat{ABC}\right)-\widehat{ABC}=90^0$

$\Rightarrow AF\perp FD\ \ hay\ AO\perp ED(dfcm)$

CAO BẰNG

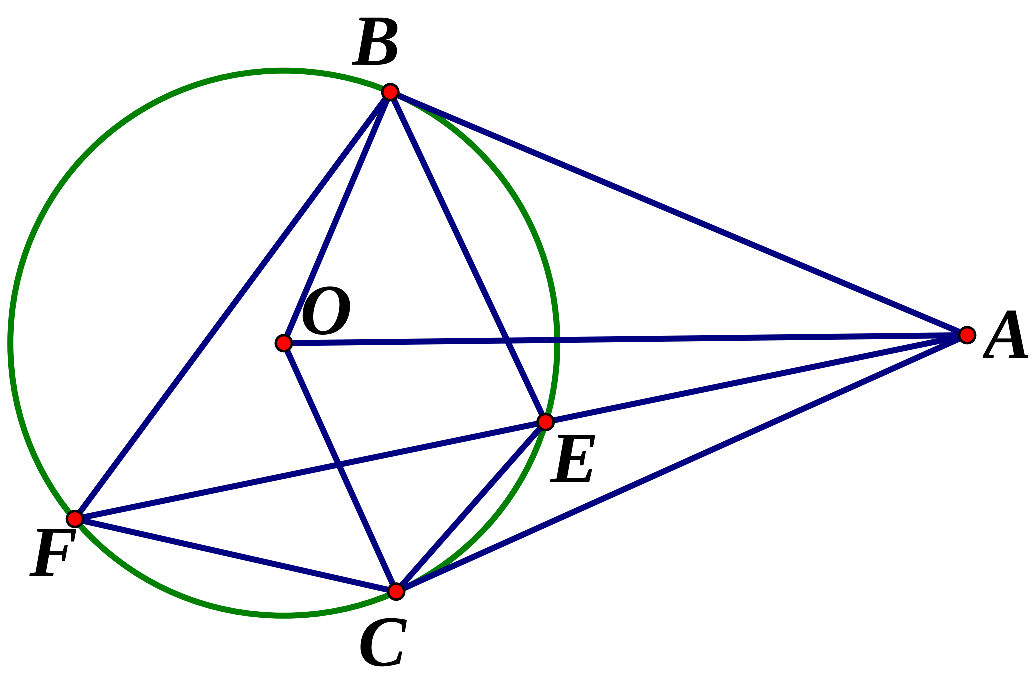
Câu 4. (2.0 điểm)

Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC của đường tròn $(B,C$ là các tiếp điểm)

a) Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp
b) Kẻ đường thẳng qua diểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và F sao cho E nằm giữa A và F. Chứng minh $BE.CF=BF.CE$

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) AB là tiếp tuyến với (O) nên $OB\perp AB\Rightarrow\widehat{OBA}=90^0$

AC là tiếp tuyến với (O) nên $OC\perp AC\Rightarrow\widehat{OCA}=90^0$

Tứ giác $ABOC$ có $\widehat{OBA}+\widehat{ACO}=90^0+90^0=180^0$

Do đó $ABOC$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

b) Xét ΔABE và ΔAFB có: $\widehat{A}$ chung ; $\widehat{ABE}=\widehat{AFC}$ (cùng chắn cung BE)

$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta AFB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{AF}=\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{AE}{AF}$ (các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AB.BF=AF.BE$ và $AB^2=AE.AF$

Xét ΔACE và ΔAFC có:

$\widehat{A}$ chung; $\widehat{ACE}=\widehat{AFC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

$\Rightarrow \Delta ACE \sim \Delta AFC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{AF}=\dfrac{CE}{CF}=\dfrac{AE}{AC}$ (các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AC.CE=AE.CF$. Ta có:

$AB.BF=AF.BE$; $AC.CE=AE.CF$

$\Rightarrow AB.BF.AC.CE=AF.BE.AE.CF$

$\Rightarrow AB^2.BF.CE=AE.AF.BE.CF$

Mà $AB^2=AE.AF(cmt) \Rightarrow BF.CE=BE.CF(dfcm)$

ĐẮK LẮK

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho $AB=R.$ Kẻ đường kính AC của đường tròn $(O).$ Gọi E là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ $BC(E\neq B;C)$, CB và EB lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm thứ hai là D và F

a) Chứng minh $\widehat{AFD}=90^0$

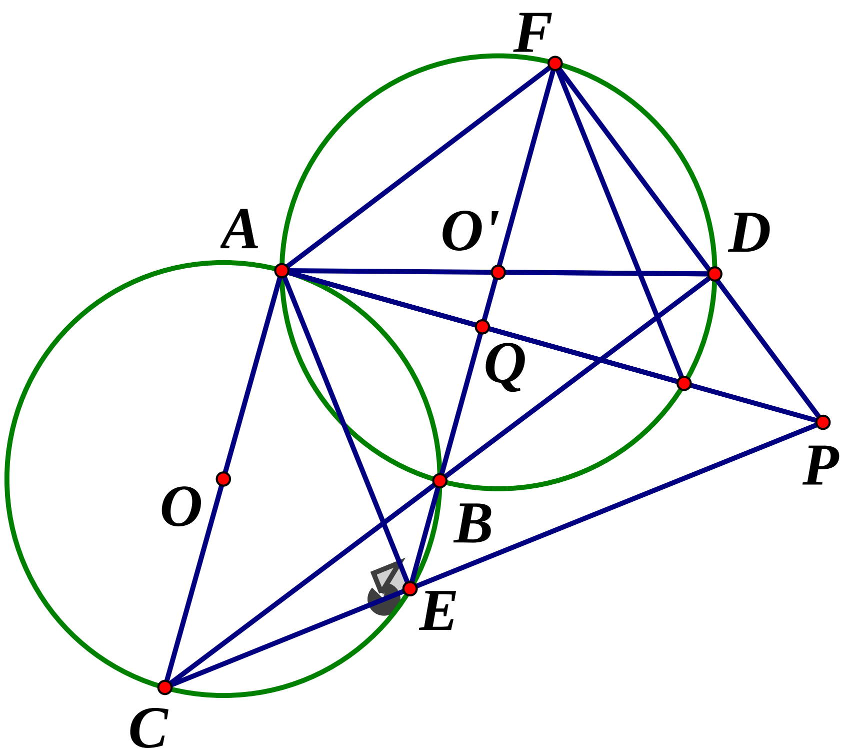
b) Chứng minh $AE=AF$

c) Gọi P là giao điểm của CE và $FD.$ Gọi Q là giao điểm của AP và $EF.$ Chứng minh AP là đường trung trực của EF

d) Tính tỉ số $\dfrac{AP}{AQ}$

ĐÁP ÁN

Câu 4.



1) Chứng minh $\widehat{AFD}=90^0$

Ta có: $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $(O;R)$

$\Rightarrow \angle ABC=90^0 \Rightarrow \angle ABD=90^0$ (hai góc kề bù)

Mà $\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên AD là đường kính $(O';R)$

Lại có : $\widehat{AFD}$ là góc nội tiếp chắn cung $AD \Rightarrow \widehat{AFD}=90^0\,(dfcm)$

2) Chứng minh $AE=AF$

Ta có: $\widehat{AEB}=\widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O)) hay

$\angle AEF=\angle ACD\,(1)$

$\angle AFB=\angle ADB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O'))

Hay $\widehat{AFE}=\widehat{ADC}\,(2)$

Ta có: $AD=AC=2R \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{ADC}\;\;(3)$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{AFE} \Rightarrow \Delta AEF$ là tam giác cân$\Rightarrow AE=AF$

3) Chứng minh AP **là đường trung trực của** EF

Ta có: $AE=AF\,(cmt) \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của EF. $\quad(4)$

Xét ΔAEP và ΔAFP ta có:

$AE = AF(cmt); \widehat{AEP} = \widehat{AFD} = 90^0; AP$ chung

$\Rightarrow \Delta AEP = \Delta AFP(ch-cgv) \Rightarrow PE = PF$ (hai cạnh tương ứng bằng nhau)

$\Rightarrow P$ thuộc đường trung trực của EF $\quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra AP là đường trung trực của $EF\left(dfcm\right)$

4) **Tính tỉ số** $\dfrac{AQ}{AP}$

Ta có: AP là đường trung trực của $EF(cmt) \Rightarrow AP \perp EF = \{Q\}$

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔAFP vuông tại F có đường cao FQ ta có:

$$AF^2 = AQ.AP \Rightarrow AP = \frac{AF^2}{AQ} \Rightarrow \frac{AQ}{AP} = \frac{AQ^2}{AF^2}$$

Xét ΔAFQ vuông tại Q ta có:

$$\sin\angle AFQ = \frac{AQ}{AF} \Rightarrow \sin\angle ADB = \frac{AQ}{AF} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \left(\dfrac{AQ}{AF}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{1}{4}$. Vậy $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{1}{4}$

ĐẮK NÔNG

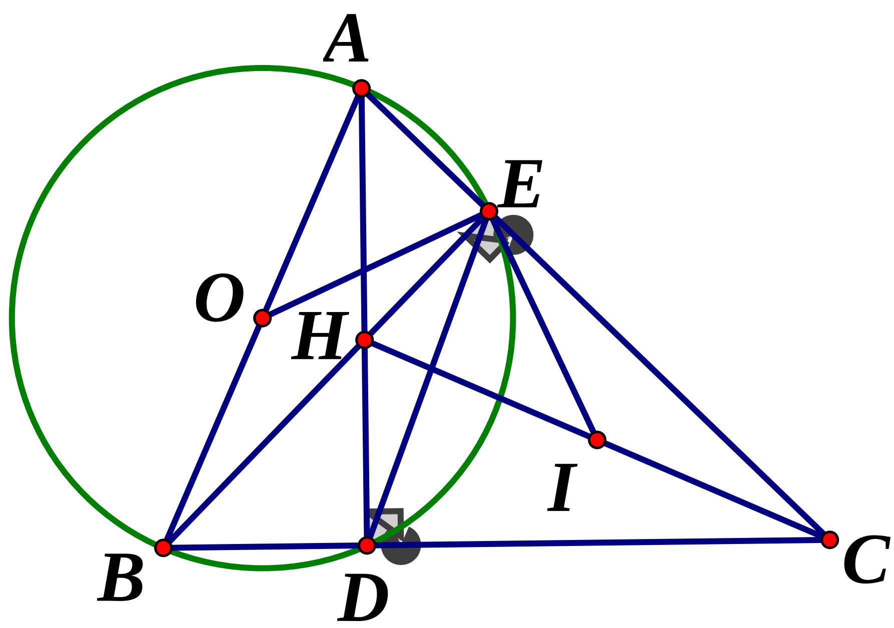
Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai đường cao của tam giác ABC là AD, BE cắt nhau tại $H\left(D \in BC, E \in AC\right)$

a) Chứng minh: $CDHE$ là tứ giác nội tiếp một đường tròn
b) Chứng minh: $HA.HD = HB.HE$
c) Gọi điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) Chứng minh tứ giác CDHE nội tiếp

Ta có: AD, BE là hai đường cao của

$$\Delta ABC(gt) \Rightarrow \begin{cases} AD \perp BC = \{D\} \\ BE \perp AC = \{E\} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BEC} = 90^0$$

Xét tứ giác $CDHE$ ta có: $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow CDHE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $HA.HD = HB.HE$

Xét ΔHAE và ΔHBD ta có:

$\widehat{AHE} = \widehat{BHD}$ (đối đỉnh); $\widehat{AEH} = \widehat{BDH} = 90^0$

$$\Rightarrow \Delta AHE \sim \Delta BHD(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow AH.DH = BH.EH\left(dfcm\right)$$

c) Chứng minh IE **là tiếp tuyến ……….**

Xét tứ giác $ABDE$ ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^0$, mà hai đỉnh D, E là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $\Rightarrow ABDE$ là tứ giác nội tiếp

Lại có: ΔAEB vuông tại $E \Rightarrow A, B, D, E$ cùng thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

Ta có: $ABDE$ là tứ giác nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{BAE}$ (góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện) (1)

Ta có: I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE \Rightarrow I$ là trung điểm của HC

ΔECH vuông tại E có đường trung tuyến $EI \Rightarrow EI = HI = \frac{1}{2}HC$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta HEI$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ (tính chất tam giác cân) hay $\angle IEH = \angle EHC$ (2)

Tứ giác $CDHE$ là tứ giác nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CHE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{BAE} = \widehat{HEI}$

ΔAOE cân tại O $(OA = OE) \Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OBE}$ (tính chất tam giác cân)

Hay $\widehat{BAE} = \widehat{OEA}$ mà $\widehat{OBE} + \widehat{BAE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OEB} + \widehat{HEI} = 90^0 \Rightarrow OE \perp EI$

$\Rightarrow EI$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $AB(dfcm)$

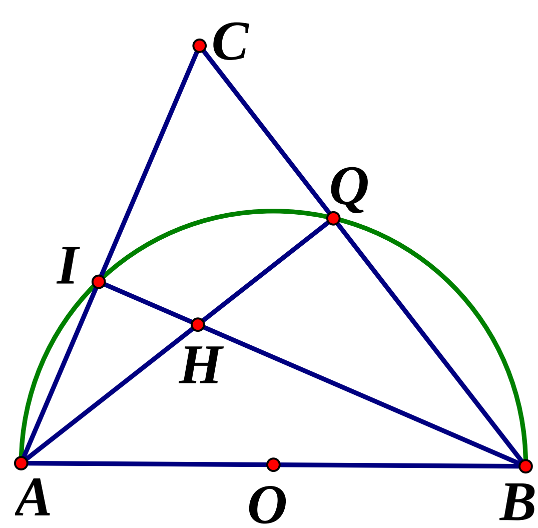
ĐIỆN BIÊN

Câu 4. (3 điểm) Trên nửa đường tròn đường kính $AB,$ bán kính $R.$ Lấy hai điểm I, Q sao cho I thuộc cung $AQ.$ Gọi C là giao điểm của hai tia AI, BQ, H là giao điểm của hai dây AQ và $BI.$ Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $CIHQ$ là tứ giác nội tiếp
2) $CI.AI = HI.BI$
3) $AI.AC + BQ.BC$ luôn không đổi.

ĐÁP ÁN

Bài 4.



1) Tứ giác $CIHQ$ nội tiếp

Vì $\angle AIB, \angle AQB$ là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên

$\widehat{AIB} = \angle AQB = 90^0 \Rightarrow \widehat{CIH} = \widehat{CQH} = 90^0$

Xét tứ giác $CIHQ$ có: $\widehat{CIH} + \widehat{CQH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên $CIHQ$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $CI.AI = HI.BI$

Xét ΔAHI và ΔBCI có: $\widehat{HAI} = \widehat{CBI}$ (cùng chắn cung IQ); $\widehat{AIH} = \widehat{BIC} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta AHI \sim \Delta BCI\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{HI}{CI} = \dfrac{AI}{BI}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow CI.AI = HI.BI\,(dfcm)$

3) Chứng minh $AI.AC + BQ.BC$ **luôn không đổi**

Ta có:

$AI.AC + BQ.BC = AC.(AC - IC) + BQ.(BQ + QC) = AC^2 - AC.IC + BQ^2 + BQ.QC$

$= AQ^2 + QC^2 - AC.IC + BQ^2 + BQ.QC = (AQ^2 + BQ^2) + QC.(QC + BQ) - AC.IC$

$= AB^2 + QC.BC - AC.IC$

Xét ΔAQC và ΔBIC có:

$\widehat{ICQ}$ chung; $\widehat{AQC} = \widehat{BIC} = 90^0 \Rightarrow \Delta AQC \sim \Delta BIC\,(g.g)$

$\Rightarrow AC.IC = QC.BC \Rightarrow QC.BC - AC.IC = 0$

Vậy $AI.AC + BQ.BC = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$ luôn không đổi (đpcm)

ĐỒNG THÁP

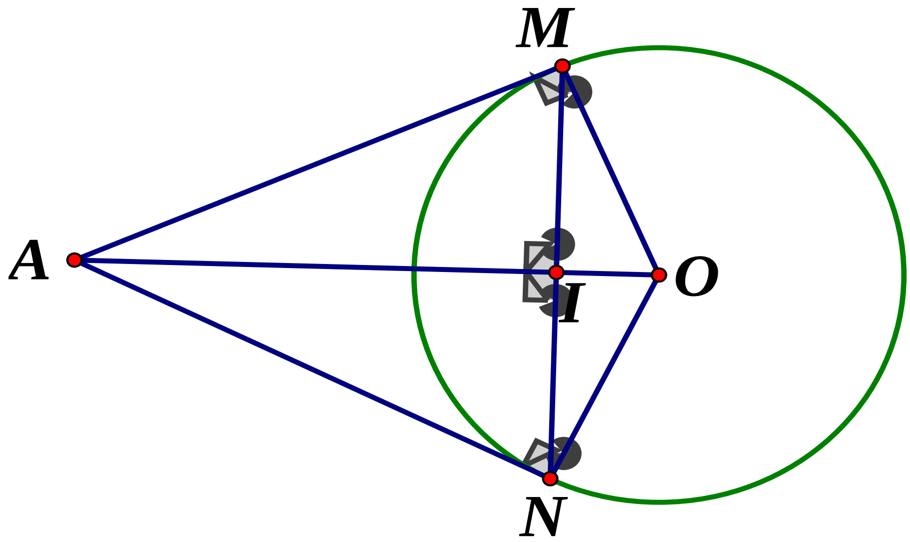
Câu 6. (2,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với (O) $(M, N$ là các tiếp điểm)

1) Chứng minh tứ giác $AMON$ là tứ giác nội tiếp
2) Biết rằng $OA = 10cm, \widehat{MAN} = 60^0$. Tính phần diện tích của tứ giác $AMON$ nằm bên ngoài đường tròn (O)

ĐÁP ÁN

Câu 6.



1) Chứng minh tứ giác $AMON$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: AM, AN là các tiếp tuyến tại M, N của

$$(O) \Rightarrow \begin{cases} OM \perp AM \\ ON \perp AN \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^0$$

Xét tứ giác $AMON$ ta có: $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow AMON$ là tứ giác nội tiếp

2) Tính phần diện tích …………..

Ta có: AM, AN là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

$\Rightarrow AO$ là phân giác của $\angle MAN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\widehat{MAO} = \frac{1}{2}\widehat{MAN} = 30^0$$

Xét ΔAMO vuông tại M ta có:

$$AM = AO.\cos\angle MAO = 10.\cos 30^0 = 5\sqrt{3}(cm)$$

$$OM = R = AO.\sin\widehat{MAO} = 10.\sin 30^0 = 5cm$$

$$\Rightarrow S_{AMO} = \frac{1}{2}OM.AM = \frac{1}{2}.5.5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}\left(cm^2\right)$$

$$\Rightarrow S_{AMON} = 2S_{AMO} = 2.\frac{25\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}cm^2$$

Ta có: $AMON$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{MAN} + \widehat{MON} = 180^0$ (tính chất tứ giác nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{MON} = 180^0 - \widehat{MAN} = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

Mà $\angle MON$ là góc ở tâm chắn cung $MN \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{MN} = 120^0$

$$\Rightarrow S_{quat\,(MON)} = \frac{\pi.R^2.n}{360} = \frac{\pi.5^2.120}{360} = \frac{25\pi}{3}\left(cm^2\right)$$

Nên diện tích phần cần tìm là $S = S_{AMON} - S_{quat} = 25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{3}(cm^2)$

Vậy diện tích cần tìm là $25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{3}(cm^2)$

GIA LAI

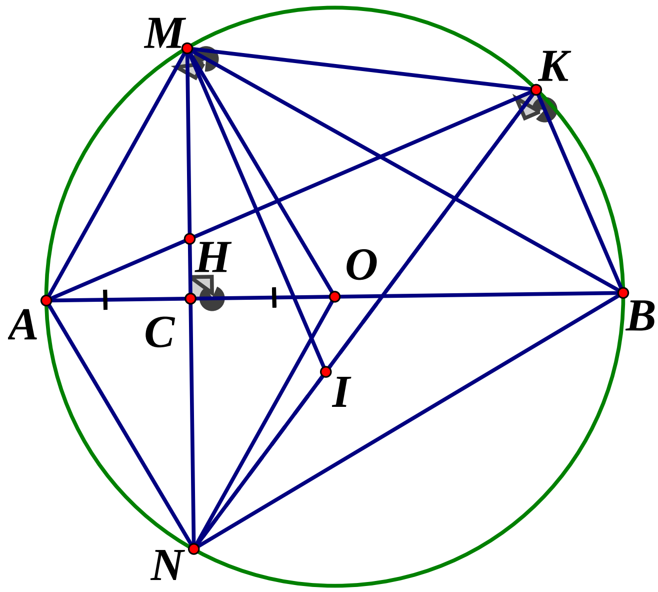
Câu 5. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R.$ Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng OA, qua C kẻ dây cung MN vuông góc với $OA.$ Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM (K không trùng với B và M), H là giao điểm của AK và MN

a) Chứng minh tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp
b) Chứng minh $AH.AK = R^2$
c) Trên đoạn thẳng KN lấy điểm I sao cho $KI = KM$. Chứng minh $NI = KB$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Ta có: $\widehat{AKB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\widehat{BCH}=90^0\left(MC\perp AB\right)$

Do đó $\widehat{HKB}+\widehat{BCH}=180^0$. Vậy tứ giác $BCHK$ nội tiếp

b) **Chứng minh** $AK.AH=R^2$

Ta có: MC là đường trung trực của OA nên $MA=MO$ và $OM=OA=R,$ nên

$OM=OA=MA=R\Rightarrow\Delta OAM$ đều, $\angle MOA=60^0$

Xét ΔACH và ΔAKB có: $\angle C=\angle K=90^0,\angle A$ chung $\Rightarrow\Delta ACH\sim\Delta AKB$

$\Rightarrow\dfrac{AC}{AK}=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AK.AH=AB.AC$

Mặt khác tam giác AMB vuông tại M có MC là đường cao ứng với cạnh huyền nên $AC.AB=MA^2=R^2$ (hệ thức lượng) . Vậy $AK.AH=R^2$

c) Ta có:Tứ giác $OMAN$ có hai đường chéo OA và MN vuông góc nhau tại trung điểm C mỗi đường nên là hình thoi. Do đó $\angle MON=2\angle MOA=120^0$

Từ đó $\widehat{MKN}=\dfrac{1}{2}\widehat{MON}=60^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN)

Mặt khác $MK=KI\Rightarrow\Delta MKI$ đều $\Rightarrow MK=MI=KI$

Ta có: BC là trung trực của MN nên $BM=BN$, và $\widehat{MNB}=\widehat{MAB}=60^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM), do đó ΔBMN đều, suy ra $\widehat{BMN}=60^0, MB=MN$

Ta có: $\widehat{KMN}=\widehat{KMB}+\widehat{BMN}=\widehat{KMB}+60^0\left(1\right)$

Ta lại có: $\widehat{KMN}=\widehat{NMI}+\widehat{KMI}=\widehat{NMI}+60^0\left(2\right)$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{KMB}=\widehat{NMI}$, vì $MN=MB, MI=MK$ nên $\Delta MNI=\Delta MBK(c.g.c)$

Vậy $NI=BK$

HÀ GIANG

Câu 4. (3,5 điểm)

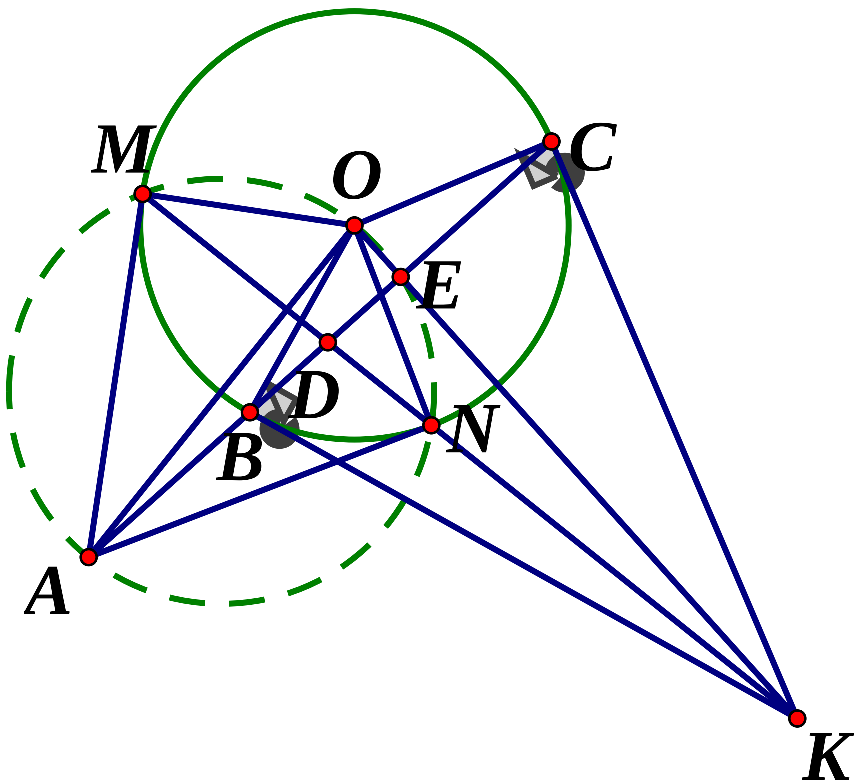
Cho đường tròn $\left(O\right)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn $\left(O\right)$. Qua điểm A dựng hai tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn $\left(O\right)$ với M, N là các tiếp điểm. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại hai điểm B và C $(AB<AC,$ đường thẳng d không đi qua tâm $O)$

a) Chứng minh tứ giác $AMON$ là tứ giác nội tiếp
b) Chứng minh $AN^2=AB.AC$

c) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh rằng điểm K luôn thuộc một đường thẳng cố định khi đường thẳng d thay đổi và đường thẳng d thỏa mãn điều kiện đề bài

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Vì AM, AN là tiếp tuyến tại M, N của $(O) \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $AMON$ nội tiếp đường tròn đường kính $AO(dfcm)$

b) Dễ chứng mnh $\Delta AMO = \Delta ANO$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow AM = AN$
Xét ΔABN và ΔANC ta có:

$\widehat{BAN}$ $chung; \widehat{BNA} = \widehat{BCN} = \widehat{NCA}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung)

Suy ra $\Delta ABN \sim \Delta ANC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2(dfcm)$

c) Gọi KM cắt (O) tại N'

Vì tứ giác $MBN'C$ nội tiếp $\Rightarrow \Delta KBN' \sim \Delta KMB \Rightarrow KN'.KM = KB^2$

Gọi KO cắt BC tại E

Dễ thấy $\widehat{OEA} = 90^0 = \widehat{ONA} = \widehat{OMA} \Rightarrow 5$ điểm O, M, N, E, A cùng thuộc một đường tròn (1)

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔKBO vuôn tại B, đường cao BE, ta có:

$KE.KO = KB^2 = KN'.KM \Rightarrow \Delta KN'E \sim \Delta KOM$

$\Rightarrow \widehat{OM'N} = \angle OMK = \angle N'EK = 180^0 - \widehat{OEN'} \Rightarrow \widehat{OMN'} + \widehat{OEN'} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MOEN'$ nội tiếp hay 5 điểm M, O, E, N', A cùng thuộc một đường tròn, kết hợp với (1) suy ra $N \equiv N'$ hay $K \in MN$ cố định

CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM (HÀ NỘI)

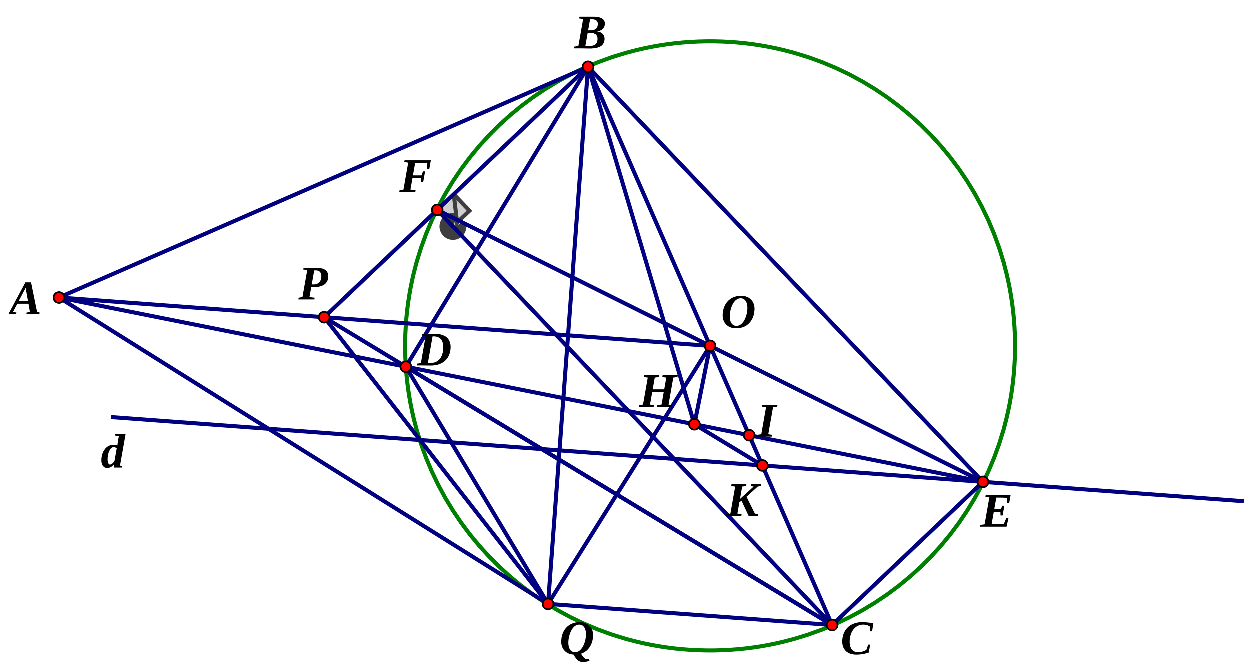
Bài 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và một điểm nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C và O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE

a) Chứng minh $AB.BE = BD.AE$
b) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh $HK // CD$
c) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) **Chứng minh** $AB.BE = BD.AE$

Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{A}$ chung; $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$) $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta AEB (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AB.BE=BD.AE(dfcm)$

b) Chứng minh $HK//CD$

Vì H là trung điểm của $DE(gt)$ nên $OH\perp DE$ (tính chất đường kính và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{OHD}=90^0 \Rightarrow \widehat{OHA}=90^0$

Xét tứ giác $OBAH$ có : $\widehat{OHA}=90^0(cmt);\widehat{OBA}=90^0$ (do AB là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{OHA}+\widehat{OBA}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow OBAH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OAH}=\widehat{OBH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OH)

Mà $\widehat{OAH}=\widehat{HEK}$ (so le trong do $d//OA$)

$\Rightarrow \widehat{OBH}=\widehat{HKE}=\widehat{HBK} \Rightarrow$ Tứ giác $BEKH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{HKB}=\widehat{HEB}=\widehat{DEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HB)

Mà $\widehat{DEB}=\widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$) $\Rightarrow \widehat{HKB}=\widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) $\Rightarrow \widehat{HKB}=\widehat{DCB}\left(=\widehat{DEB}\right)$. Lại có hai góc này ở vị trí đồng vị bằng nhau

$\Rightarrow HK//CD(dfcm)$

c) Chứng minh $BECF$ **là hình chữ nhật**

Kẻ tiếp tuyến AQ với đường tròn (O) $\quad(Q\neq B)$

Xét tứ giác $OBAQ$ có: $\widehat{OBA}+\widehat{OQA}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow OBAQ$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{OBQ}=\widehat{OAQ}=\widehat{PAQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OQ)

Lại có: $\widehat{OBQ}=\widehat{CBQ}=\widehat{CDQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CQ)

$\Rightarrow \widehat{PAQ}=\widehat{CDQ}\left(=\widehat{OBQ}\right) \Rightarrow$ Tứ giác $APDQ$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow \widehat{ADP}=\widehat{AQP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)

Mà $\widehat{ADP}=\widehat{CDE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{CDE}=\widehat{CBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

$\Rightarrow \widehat{AQP}=\widehat{CBE} \qquad (1)$

Xét ΔABP và ΔAQP có: AP chung; $\quad \widehat{BAP}=\widehat{QAP}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);

$AB = AQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta ABP = \Delta AQP(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{AQC}$ $\quad (2)$ (hai góc tương ứng)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{ABP}\left(= \widehat{AQP}\right)$

$\Rightarrow \widehat{CBE} + \widehat{CBF} = \widehat{ABP} + \widehat{CBF} \Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{ABC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{EBF}$ là góc nội tiếp chắn nửa đườn tròn (O) nên EF là đường kính của (O)

$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF

Xét tứ giác $BECF$ có hai đường chéo BC, EF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

$\Rightarrow BECF$ là hình bình hành. Lại có: $\widehat{EBF} = 90^0(cmt)$ nên $BECF$ là hình chữ nhật $(dfcm)$

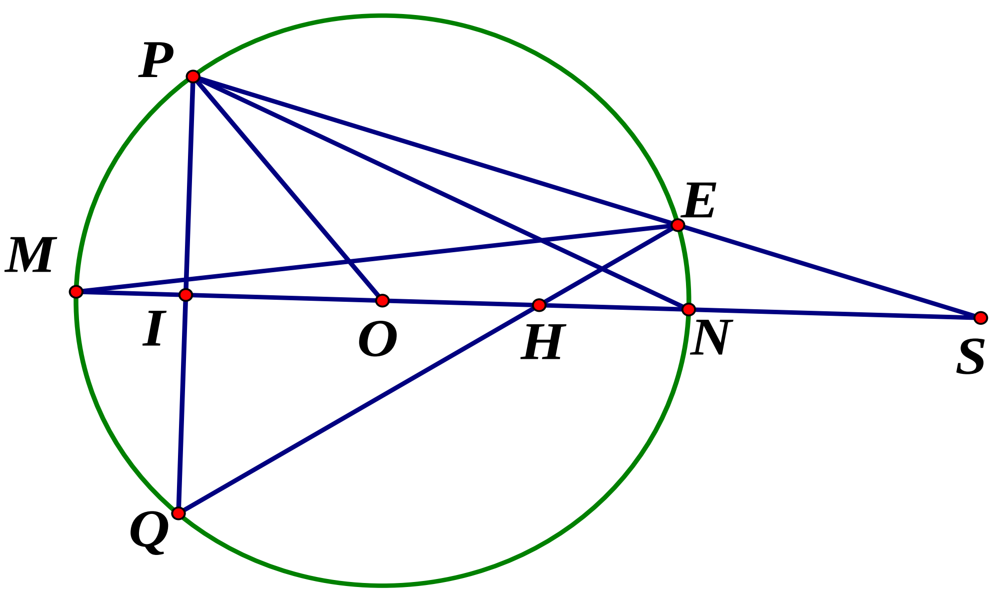
HÀ TĨNH

Câu 5. (2,0 điểm) Cho đường tròn tâm $O,$ đường kính $MN,$ điểm I thay đổi trên đoạn OM
(I khác M). Đường thẳng qua I vuông góc với MN cắt (O) tại P và $Q.$ Trên tia đối của tia NM lấy điểm S cố định. Đoạn PS cắt (O) tại $E,$ gọi H là giao điểm của EQ và MN

a) Chứng minh tam giác SPN và tam giác SME đồng dạng
b) Chứng minh độ dài đoạn OH không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) **Chứng minh $\Delta SPN \sim \Delta SME$**

Ta có : bốn điểm P, E, M, N cùng thuộc (O) nên tứ giác $PENM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EPN} = \widehat{EMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EN)

Xét ΔSPN và ΔSME có : $\hat{S}$ $chung; \widehat{EPN} = \widehat{EMS}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta SPN \sim \Delta SME(g.g) \quad (dfcm)$

b) **Chứng minh độ dài đoạn OH không phụ thuộc vào I**

Từ câu $a, \Delta SPN \sim \Delta SME \Rightarrow \dfrac{SP}{SM} = \dfrac{SN}{SE}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow SP.SE = SM.SN\,(1)$

Ta có: $\widehat{PEH} = \widehat{PEQ} = \dfrac{1}{2} sd\,\widehat{PQ} = sd = \widehat{PM} = \widehat{POM}$

$\widehat{PEH} + \widehat{SEH} = 180^0; \widehat{POM} + \widehat{POS} = 180^0 \Rightarrow \widehat{SEH} = \widehat{POS}$

Xét ΔSEH và ΔSOP có: $\widehat{SEH} = \widehat{POS}(cmtt); \hat{S}$ chung

$\Rightarrow \Delta SEH \sim \Delta SOP(g-g) \Rightarrow \dfrac{SE}{SO} = \dfrac{SH}{SP}$ (Hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow SE.SP = SO.SH\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $SO.SH = SM.SN \Rightarrow SH = \dfrac{SM.SN}{SO}$

Mà S, M, N, O cố định nên SM, SN, SO không đổi $\Rightarrow SH$ không đổi

$\Rightarrow OH = SO - SH$ không đổi

Vậy độ dài OH không phụ thuộc vào vị trí điểm I $(dfcm)$

HẢI PHÒNG

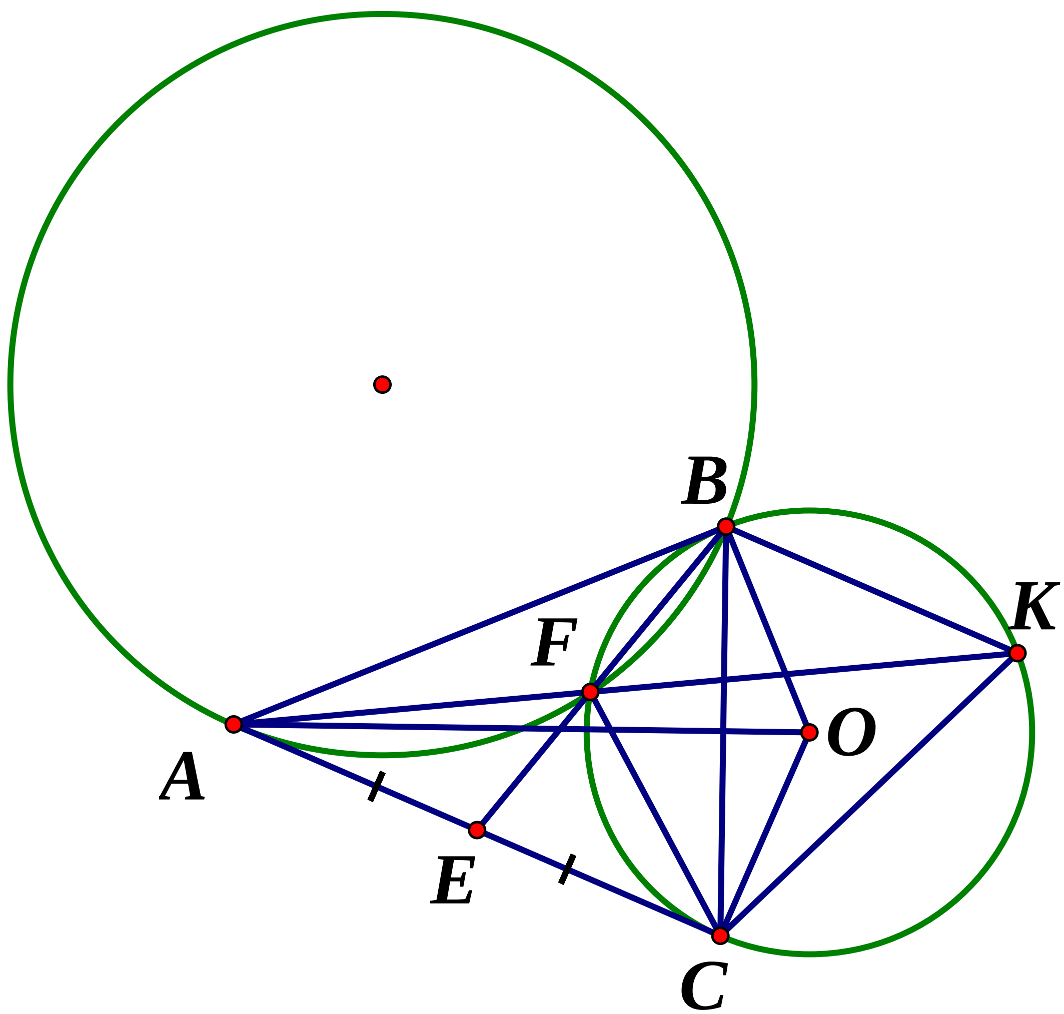
Bài 4. (3,5 điểm)

1. Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC của đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AC, F là giao điểm thứ hai của đường thẳng EB với đường tròn $(O), K$ là giao điểm thứ hai của đường thẳng AF với đường tròn (O). Chứng minh
   a) Tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và tam giác ABF đồng dạng với tam giác AKB
   b) $BF.CK = CF.BK$

c) $\Delta FCE \sim \Delta CBE$ và EA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABF

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) Tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và $\Delta ABF \sim \Delta AKB$

Ta có: AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) tại $B, C \Rightarrow \begin{cases} OB \perp AB \\ OB \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO}$

$= 90^0$

Xét tứ giác $ABOC$ ta có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà hai góc này đối nhau nên $ABOC$ là tứ giác nội tiếp $(dfcm)$

Xét ΔABF và ΔAKB ta có: $\widehat{A}$ chung; $\widehat{AKB} = \widehat{ABF}$ (cùng chắn $\overparen{BF}$)

$\Rightarrow \Delta ABF \sim \Delta AKB (g-g)(dfcm)$

b) Chứng minh $BF.CK = CF.BK$

Ta có: $\Delta ABF \sim \Delta AKB(cmt) \Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{BF}{KB} = \dfrac{AF}{AB}$ (các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Xét ΔACF và ΔAKC có: $\widehat{A}$ chung; $\widehat{AKC} = \widehat{ACF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CF}$)

$\Rightarrow \Delta ACF \sim \Delta AKC(g-g)(dfcm) \Rightarrow \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{CF}{KC} = \dfrac{AF}{AC}$ (các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Mà $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{BF}{KB} = \dfrac{CF}{KC} \Rightarrow BF.KC = KB.CF(dfcm)$

c) Chứng minh EA là tiếp tuyến……

Ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BCE}$ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Lại có: $BFCK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{BKC}$ (góc ngoài tại 1 điểm bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

$\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{BCE}\left(= \widehat{BKC}\right)$

Xét ΔFCE và ΔCBE ta có: $\widehat{E}$ chung; $\widehat{EFC} = \widehat{ECB}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta FCE \sim \Delta CBE(g.g)(dfcm)$

Vì $\Delta FCE \sim \Delta CBE(cmt) \Rightarrow \dfrac{FE}{CE} = \dfrac{CE}{BE} \Rightarrow CE^2 = FE.BE = AE^2$

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{EF}{EA}$

Xét ΔAEF và ΔBEA ta có: $\widehat{AEB}$ chung; $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{EF}{EA}(cmt) \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta BEA(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{ABE}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{ABE}$ là góc nội tiếp chắn cung BF của đường tròn ngoại tiếp ΔABF

$\widehat{FAE}$ được tạo bởi dây cung AF và AE (E nằm ngoài đường tròn)

$\Rightarrow AE$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABF(dfcm)$

HẬU GIANG

Câu IV. (2,0 điểm) Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 2a$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ đến (O) hai tiếp tuyến AM, AN (với M, N là các tiếp điểm.

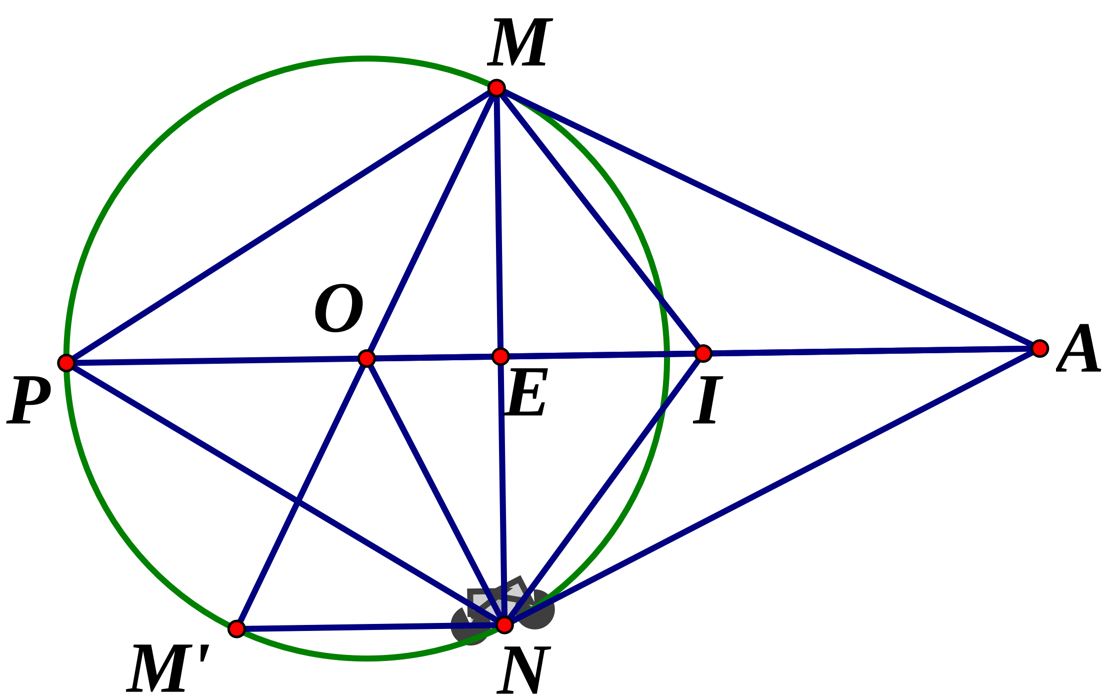
1) Chứng minh bốn điểm A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của đường tròn (C)

2) Tính diện tích S của tứ giác $AMON$ theo a, biết rằng $OA = 3a$

3) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua O và P là giao điểm của đường thẳng AO và (O), P nằm bên ngoài đoạn OA. Tính $\sin \widehat{MPN}$

ĐÁP ÁN

Câu IV.



1) Xác định tâm và bán kính

Gọi I là trung điểm của OA

Ta có: $\widehat{OMA} = 90^0$ (AM là tiếp tuyến với (O)) $\Rightarrow \Delta AMO$ vuông tại M

Có MI là trung tuyến $\Rightarrow MI = IO = IA \, (1)$

$\widehat{ONA} = 90^0$ (AN là tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow \Delta ANO$ vuông tại N

Có NI là trung tuyến nên $NI = IO = IA \, (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $IO = IA = IM = IN$ nên 4 điểm A, M, N, O cùng thuộc đường tròn (C) tâm I bán kính $R = \dfrac{OA}{2} (dfcm)$

2) Tính diện tích S……..

Gọi E là giao điểm của MN và OA

Ta có: $OM = ON = R$ và $AM = AN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $MN \Rightarrow OA \perp MN$ tại trung điểm E của MN

Tam giác OMA vuông tại M, theo định lý $Pytago$ ta có:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = (3a)^2 - (2a)^2 = 5a^2 \Rightarrow AM = a\sqrt{5}$$

Tam giác AMO vuông tại M có ME là đường cao nên:

$$ME.OA = OM.AM \Rightarrow ME = \frac{OM.AM}{OA} = \frac{2a.a\sqrt{5}}{3a} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow MN = 2ME = 2.\frac{2a\sqrt{5}}{3} = \frac{4a\sqrt{5}}{3}$$

Tứ giác $OMAN$ có hai đường chéo OA, MN vuông góc nên:

$$S_{OMAN} = \frac{1}{2}.OA.MN = \frac{1}{2}.3a.\frac{4a\sqrt{5}}{3} = 2a^2\sqrt{5}$$

Vậy $S_{OMAN} = 2a^2\sqrt{5}$

3) Tính sin MPN

Nối M' với N ta có: $\widehat{MPN} = \widehat{MM'N}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MN}$)

$$\Rightarrow \sin\widehat{MPN} = \sin\widehat{MM'N}$$

Tam giác MNM' có $\widehat{MNM'} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên là tam giác vuông tại N

$$\Rightarrow \sin\widehat{MM'N} = \frac{MN}{MM'} = \frac{4a\sqrt{5}}{3} : 4a = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Vậy $\sin\widehat{MPN} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Bài 8.

Cho đường tròn tâm O; bán kính R và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA > 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn (O) (D, E là hai tiếp điểm) Lấy điểm M nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ sao cho $MD > ME$. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt AD, AE lần lượt tại I, J. Đường thẳng DE cắt OJ tại F

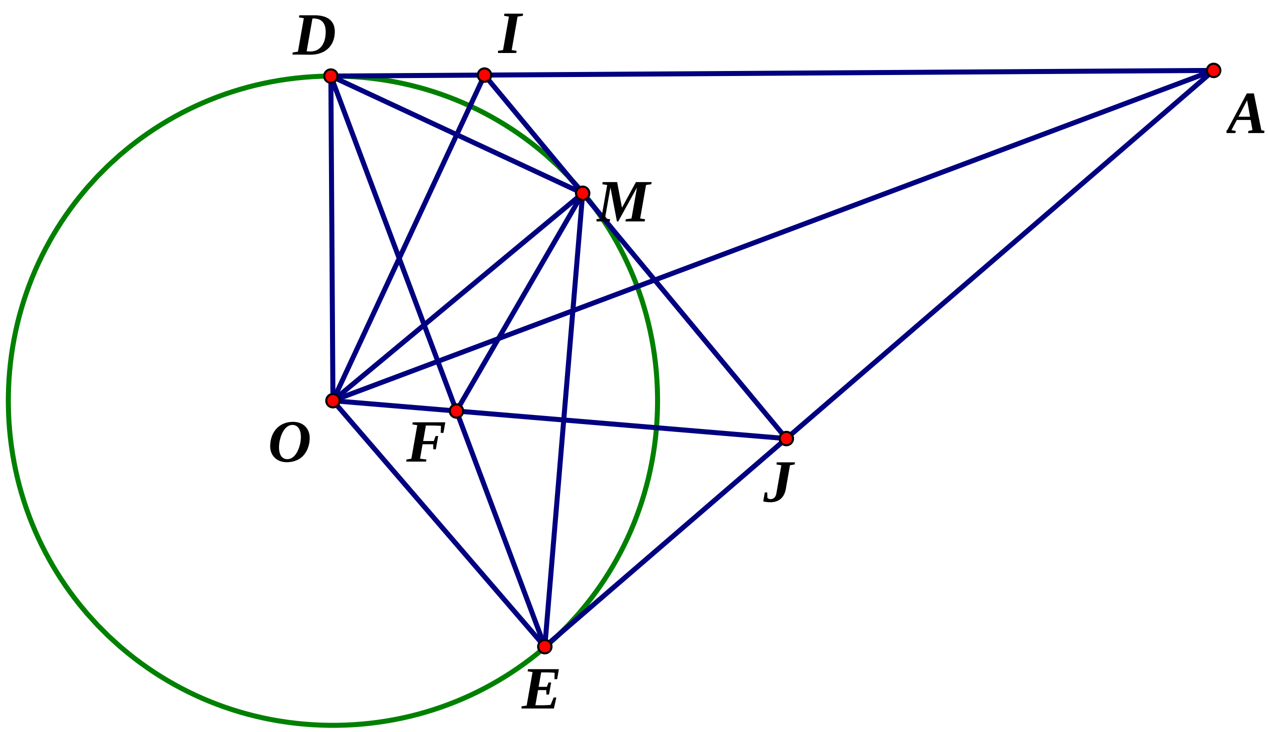
a) Chứng minh OJ là đường trung trực của đoạn thẳng ME và $\widehat{OMF} = \widehat{OEF}$

b) Chứng minh tứ giác $ODIM$ nội tiếp và 5 điểm I, D, O, F, M cùng nằm trên một đường tròn

c) Chứng minh $\widehat{JOM} = \widehat{IOA}$ và $\sin \widehat{IOA} = \dfrac{MF}{IO}$

ĐÁP ÁN

Bài 8.



a) Chứng minh OJ là đường trung trực đoạn thẳng ME và $\widehat{OMF} = \widehat{OEF}$

Ta có: AE, JI là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E, M

Mà $AE \cap JI = \{J\}$ nên $JE = JM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Lại có: $OE = OM\ (= R)$ nên OJ là đường trung trực của đoạn $ME (dfcm)$

Xét ΔOEF và ΔOMF có: OF chung; $\widehat{EOF} = \widehat{MOF}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);

$OE = OM\ (= R) \Rightarrow \Delta OEF = \Delta OMF (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{OMF} = \widehat{OEF}$ (hai góc tương ứng) (đpcm)

b) Chứng minh $ODIM$ là tứ giác nội tiếp và I, D, O, F, M cùng nằm trên một đường tròn

Vì AD là tiếp tuyến với (O) tại D nên $AD \perp OD \Rightarrow \widehat{ODA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ODI} = 90^0$

MI là tiếp tuyến với (O) tại B nên $OM \perp MI \Rightarrow \widehat{OMI} = 90^0$

Tứ giác $ODIM$ có: $\widehat{ODI}+\widehat{OMI}=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0) . Vậy tứ giác $ODIM$ là tứ giác nội tiếp

Theo câu a, $\widehat{EOF}=\widehat{MOF}\Rightarrow \widehat{EOM}=2\widehat{MOF}$

$\Rightarrow \widehat{MOF}=\dfrac{1}{2}\widehat{EOM}=\dfrac{1}{2}sd\,cung\,ME$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn)

Nên $\widehat{MOF}=\widehat{MDF}\left(=\dfrac{1}{2}sd\,cungME\right)$

Xét tứ giác $OFMD$ có $\widehat{MOF}=\widehat{MDF}(cmt)$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau),

do đó các điểm O,F,M,D cùng thuộc một đường tròn

Mà tứ giác $ODIM$ nội tiếp (cmt) nên các điểm O,D,I,M cùng thuộc một đường tròn.

Vậy 5 điểm O,D,I,M,F cùng thuộc một đường tròn

c) Chứng minh $\widehat{JOM}=\widehat{IOA}$……..

Xét ΔMOI và ΔDOI có: $OM=OD(=R), OI$ chung; $IM=ID$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta MOI=\Delta DOI\,(c-c-c)\Rightarrow \widehat{MIO}=\widehat{DIO}$ (2 góc tương ứng)

Tứ giác $OFMI$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{OFM}+\widehat{MIO}=180^0$ (tính chất tứ giác nội tiếp)

Mà $\widehat{MIO}=\widehat{DIO}(cmt)$ nên $\widehat{OFM}+\widehat{DIO}=180^0$

Lại có $\widehat{OIA}+\widehat{DIO}=180^0\Rightarrow \widehat{OFM}=\widehat{OIA}$

Xét tứ giác $OEAD$ có $\widehat{OEA}+\widehat{ODA}=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{OED}=\widehat{OAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{OD}$)

Mà $\widehat{OED}=\widehat{OEF}=\widehat{OMF}$ (theo câu b) nên $\widehat{OMF}=\widehat{OAD}=\widehat{OAI}$

Xét ΔOFM và ΔOIA có:

$\widehat{OFM}=\widehat{OIA}(cmt);\widehat{OMF}=\widehat{OAI}\,(cmt)\Rightarrow \Delta OFM\sim\Delta OIA(g.g)$

$\Rightarrow \widehat{FOM}=\widehat{IOA}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow \widehat{JOM}=\widehat{IOA}(dfcm)$

$\Rightarrow \sin\widehat{IOA}=\sin\widehat{JOM}=\dfrac{JM}{OJ}(1)$

Tứ giác $OFMI$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{JFM}=\widehat{MIO}$ (góc ngoại tại 1đỉnh và góc trong tại đỉnh đối diện)

Xét tam giác ΔJFM và ΔJIO có:

$\widehat{J}$ chung; $\widehat{JFM}=\widehat{MIO}=\widehat{JIO}(cmt)\Rightarrow \Delta JFM\sim\Delta JIO(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{JM}{OJ} = \dfrac{MF}{IO}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IOA} = \dfrac{MF}{IO} (dfcm)$

PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU (THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MÌNH)

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có tâm O, có $AB = AC$, và $\widehat{BAC} > 90^0$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tia MO cắt đường tròn (T) tại điểm D. Đường thẳng BC lần lượt cắt các đường thẳng AO và AD tại các điểm N, P

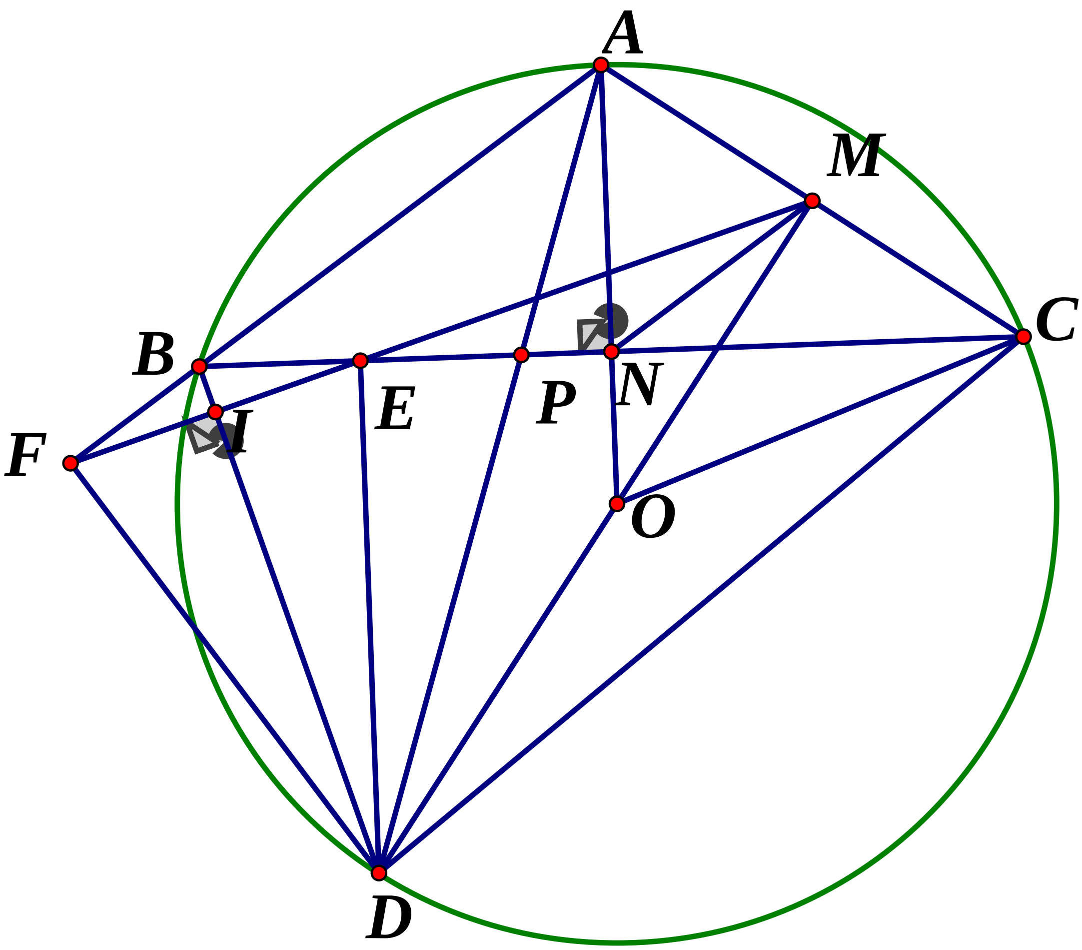
a) Chứng minh rằng tứ giác $OCMN$ nội tiếp và $\widehat{BDC} = 4.\widehat{ODC}$

b) Tia phân giác của $\widehat{BDP}$ cắt đường thẳng BC tại điểm E. Đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại điểm F. Chứng minh rằng $CA = CP$ và $ME \perp DB$

c) Chứng minh rằng tam giác MNE cân. Tính tỉ số $\dfrac{DE}{DF}$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Chứng minh $OCMN$ **là tứ giác nội tiếp và** $\widehat{BDC} = 4\widehat{ODC}$

***)** Ta có : $AB = AC(gt) \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC

$OB = OC$ (cùng bằng bán kính)$\Rightarrow O$ thuộc trung trực của BC

Khi đó ta có OA là trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC \Rightarrow \widehat{ONC} = 90^0$

Vì M là trung điểm của AC (gt) nên $OM \perp AC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)$\Rightarrow \widehat{ONC} = 90^0$

Xét tứ giác $OCMN$ có $\widehat{ONC} = \widehat{OMC} = 90^0 (cmt)$, suy ra $OCMN$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối dưới các góc bằng nhau)

*)Xét ΔACD có $DM \perp AC\left(do\ OM \perp AC\right) \Rightarrow DM$ là đường cao đồng thời là đường trung tuyến suy ra ΔACD cân tại D nên DM cũng là đường phân giác của $\widehat{ADC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 2\widehat{ODC}$ (1)

Ta có : $AB = AC(gt)$ nên $sd\,\overset{\frown}{AB} = sd\,\overset{\frown}{AC}$ (trong một đường tròn hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (trong 1 đường tròn, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau)

$\Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{BDC} = 2\widehat{ADC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDC} = 4.\widehat{ODC}$ $(dfcm)$

b) Phân giác góc $\widehat{BDP}$ cắt BC tại E, ME cắt AB tại F. Chứng minh $CA = CP$ và ME vuông góc với DB

Ta có : $sd\,\overset{\frown}{AB} = sd\,\overset{\frown}{AC}(cmt)$

$\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AB} + sd\,\overset{\frown}{BD} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}$

$\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AD} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}$

$\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{CD} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}$

$\left(do\ AD = CD \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AD} = sd\,\overset{\frown}{CD}\right)$

Lại có : $\widehat{DAC} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{CD}$ (góc nội tiếp chắn cung CD)

$\widehat{APC} = \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}\right)$ (góc có đỉnh nằm phía trong đường tròn chắn cung AC, BD)

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{APC}$ $\quad hay\ \widehat{PAC} = \widehat{APC}$

Suy ra ΔACP cân tại C (tam giác có hai góc bằng nhau) $\Rightarrow CA = CP(dfcm)$

Ta có : $\widehat{APC} = \widehat{DPB}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{PAC} = \widehat{DBP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Mà $\widehat{APC} = \widehat{PAC}$ (do tam giác ACP cân tại C) (cmt)

$\Rightarrow \widehat{DPB} = \widehat{DBP} \Rightarrow \Delta BDP$ cân tại D, do đó phân giác DE đồng thời là đường cao nên $DE \perp BC$

Xét tứ giác $CDEM$ có $\widehat{CED} = \widehat{CMD} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $CDEM$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MDC} = \widehat{ADM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Mà $\widehat{MEC} = \widehat{BEF}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{ADM}\ (3)$

Ta có: $\widehat{ADM}+\widehat{DAM}=90^0$ (do tam giác ADM vuông tại M)

$\widehat{ADE}+\widehat{DPE}=90^0$ (do tam giác DEP vuông tại D)

Mà $\widehat{DAM}=\widehat{APC}=\widehat{DPE}$ nên $\widehat{ADM}=\widehat{ADE}=\widehat{EDB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{BEF}=\widehat{EDB}$

Gọi $EF\cap BD=\{I\}$. Ta có: $\widehat{DEI}+\widehat{EDB}=\widehat{DEI}+\widehat{BEF}=\widehat{DEB}=90^0$

$\Rightarrow \Delta DEI$ vuông tại I $\Rightarrow DI\perp IE$ hay $ME\perp DB(dfcm)$

c) Chứng minh tam giác MNE cân. Tính $\frac{DE}{DF}$

Ta có: $\widehat{DBA}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AD}$ lớn $=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{CD}+sd\overset{\frown}{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{CD}+sd\overset{\frown}{AB}\right)=\widehat{CPD}$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn) $\Rightarrow 180^0-\widehat{DBA}=180^0-\widehat{CPD}$

$\Rightarrow \widehat{DBF}=\widehat{DPE}=\widehat{BDE}\Rightarrow BD$ là tia phân giác của $\widehat{EBF}\,(*)$

$\Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B (phân giác BI đồng thời là đường cao)

$\Rightarrow \widehat{BEF}=\widehat{BFE}\,(5)$ (góc ở đáy tam giác cân)

Ta có: $\widehat{ANM}=\widehat{ACO}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp $OCMN$) mà $\widehat{ACO}=\widehat{OAC}=\widehat{OAB}$ nên $\widehat{ANM}=\widehat{OAB}$, hai góc này lại ở vị trí so le trong

$\Rightarrow MN//AF\Rightarrow \widehat{NME}=\widehat{BFE}$ (hai góc so le trong) (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{BEF}=\widehat{NME}=\widehat{NEM}$

Suy ra ΔMNE cân tại N $(dfcm)$

Vì ΔBEF cân tại B(cmt) nên $BE=BF$

Xét ΔBDE và ΔBDF có: $BE=BF\,(cmt); BD$ chung; $\widehat{EBD}=\widehat{FBD}$ (theo $(*)$)

$\Rightarrow \Delta BDE=\Delta BDF\,(c.g.c)\Rightarrow DE=DF$ (hai cạnh tương ứng)

Vậy $\frac{DE}{DF}=1$.

HÒA BÌNH

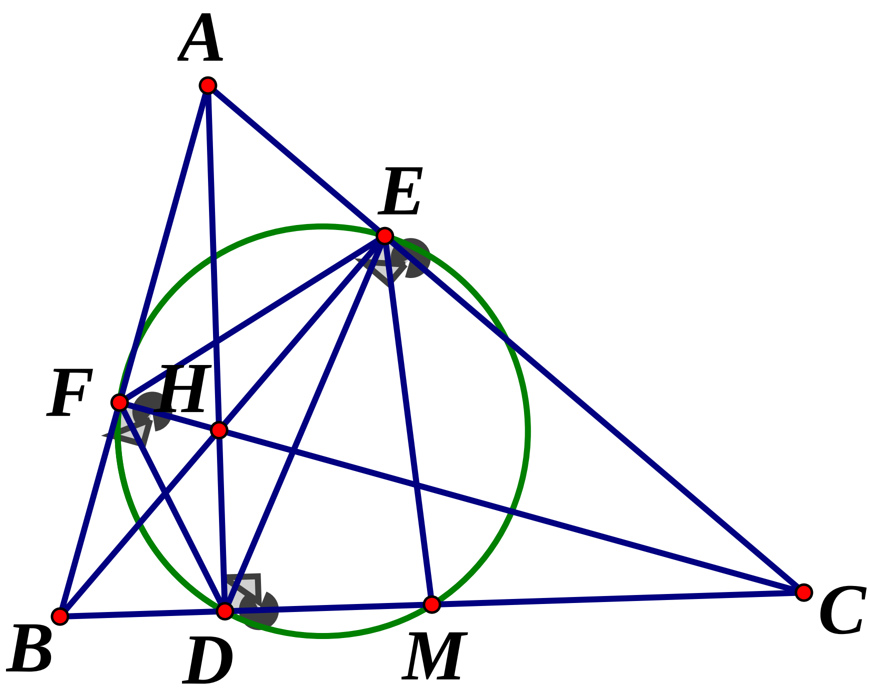
Câu IV. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB\neq AC)$ có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

1) Chứng minh rằng: Tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp
2) Chứng minh rằng $\widehat{ADE}=\widehat{ADF}$

3) Chứng minh rằng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDF đi qua trung điểm M của cạnh BC

ĐÁP ÁN

Câu IV.



1) **Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp**

Xét tứ giác $AEHF$ có: $\begin{cases} BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AEH} = 90^0 \\ \widehat{AFH} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp

2) **Chứng minh** $\widehat{ADE} = \widehat{ADF}$

Xét tứ giác $BDHF$ có: $\begin{cases} AD \perp BC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle BDH = 90^0 \\ \angle BFH = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{BFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow BDHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HBF}$ (cùng chắn cung HF)

$\Rightarrow \angle ADF = \angle ABE$ (1)

Tương tự xét tứ giác $CDHE$ có: $\begin{cases} AD \perp BC \\ BE \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle HDC = 90^0 \\ \angle HEC = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow CDHE$ là tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ (2)

Ta lại có:

$\widehat{ABE} + \widehat{BAC} = 90^0 (do\ \Delta ABE$ vuông tại E)

$\widehat{ACF} + \widehat{BAC} = 90^0 (do\ \Delta ACF$ vuông tại F)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle ADE = \angle ADF (dfcm)$

3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔEDF đi qua trung điểm M của cạnh BC

Gọi M là trung điểm của BC, ta sẽ chứng minh tứ giác $DMEF$ nội tiếp

Xét tam giác BEC vuông tại E có trung tuyến EM ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow ME = \frac{1}{2}BC = MB = MC$ (định lý đường trung tuyến trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta MBE$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MEB}$

$\Rightarrow \angle EMC = \angle MEB + \angle MBE \Rightarrow 2\angle MBE = 2\angle DBH\ (*)$ (góc ngoài của tam giác)

Vì $BDHF$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DFH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DH}$) (5)

Vì $AEHF$ là tứ giác nội tiếp $(cmt) \Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HAE}$ (3) (cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$)

Mà $\widehat{DBH} + \widehat{ACB} = 90^0 (\Delta BCE$ vuông tại E)

$\widehat{HAE} + \widehat{ACB} = 90^0 (do\ \Delta ACD$ vuông tại D)

$\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{HAE}$ (4) (cùng phụ với $\angle ACB$) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{DBH}$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{DFH} + \widehat{HFE} = \widehat{DBH} + \widehat{DBH} = 2\widehat{DBH}\ (2*)$

Từ $(*)$ và $(2*) \Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{DFE}$

$\Rightarrow DMEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua trung điểm M của $BC (dfcm)$

HÒA BÌNH (CHUYÊN)

Câu III. (3,0 điểm)

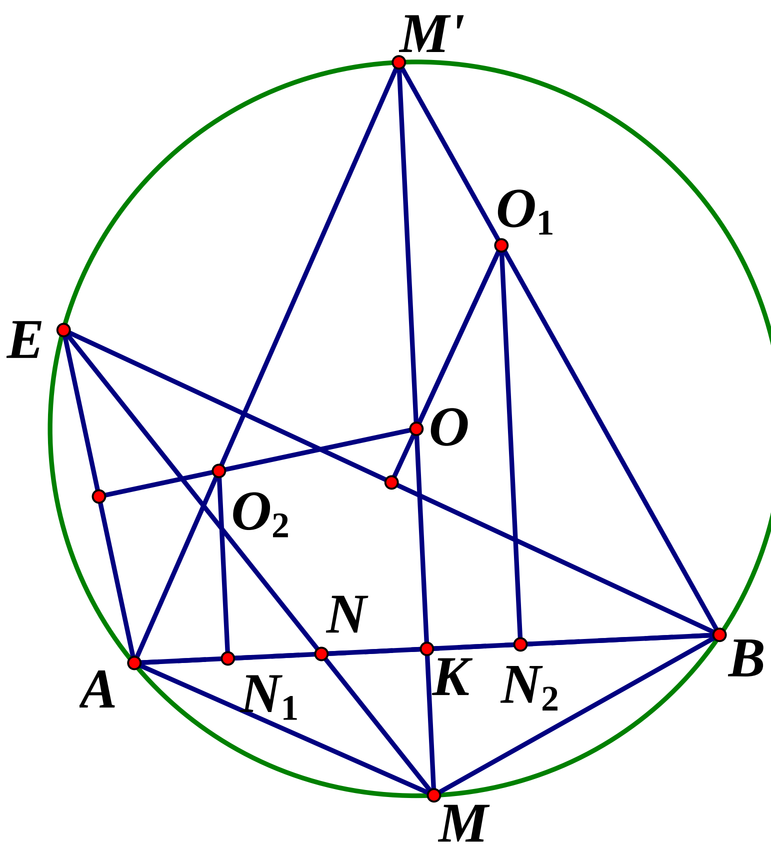
Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định, gọi M là điểm chính giữa của cung AB và N là một điểm bất kỳ trên dây AB (N khác A, N khác B). Tia MN cắt đường tròn (O) tại E.

1) Chứng minh rằng : Tam giác MNA đồng dạng với tam giác MAE
2) Chứng minh rằng: $MB.BE = BN.ME$

3) Chứng minh rằng: BM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BNE
4) Chứng minh rằng : Khi N di động trên AB thì tổng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BNE và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANE không đổi

ĐÁP ÁN

Câu III.



1) Vì M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AM} = sd\,\overset{\frown}{MB} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{AEM}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔMNA và ΔMEA có: $\widehat{M}$ chung; $\widehat{MAN} = \widehat{MEA}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta MNA \sim \Delta MAE(g.g)$

2) Xét ΔBME và ΔNMB có:

$\widehat{M}$ chung; $\widehat{ABM} = \widehat{MEA}$ (cùng chắn hai cung $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$)

$\Rightarrow \Delta BME \sim \Delta NMB(g-g) \Rightarrow \dfrac{ME}{BE} = \dfrac{MB}{BN}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow MB.BE = ME.BN(dfcm)$

3) Ta có: $\widehat{MBA} = \widehat{MEB}$ (chứng minh câu 2)

Mà xét đường tròn ngoại tiếp ΔENB thì $\widehat{MEB}$ là góc nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MBA}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến – dây cung $\Rightarrow MB$ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔBNE

4) Vẽ đường kính MM' cắt AB tại K

Áp dụng định lý Ta let và tam giác đồng dạng ta có:

$\dfrac{AO_2}{AN_1} = \dfrac{AM'}{AK}; \dfrac{BO_1}{BN_2} = \dfrac{M'B}{BK}$ mà $AK = BK$ (tính chất đường kính – dây cung)

$AM' = BM'$ (MM' là đường kính, M chính giữa)

$\Rightarrow \dfrac{AO_2}{AN_1} = \dfrac{BO_1}{BN_2} = \dfrac{AO_2 + BO_1}{AN_1 + BN_2} = \dfrac{AM'}{AK} \Rightarrow AO_2 + BO_1 = AK$ (không đổi)

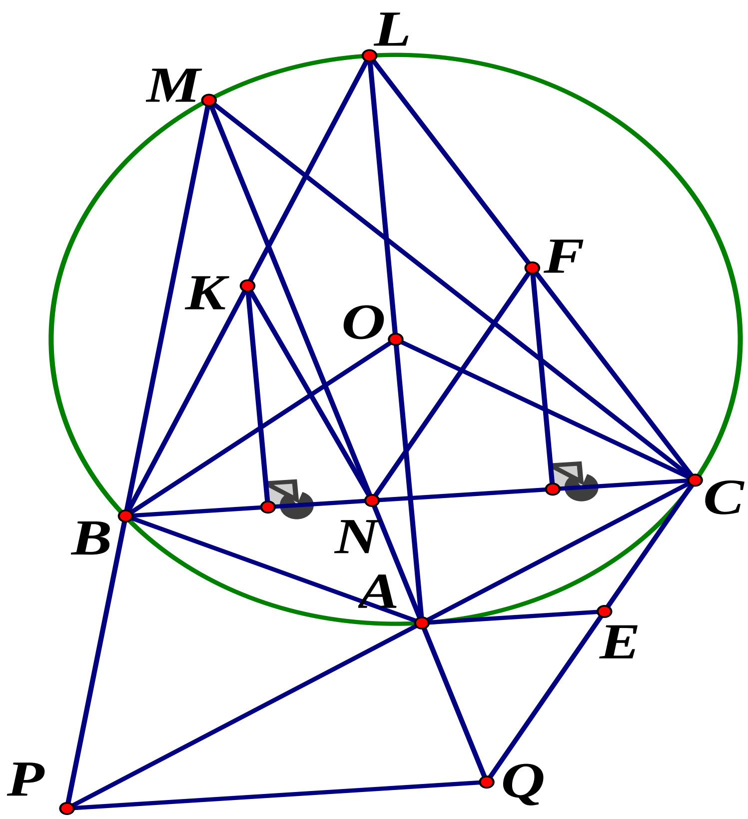
HÒA BÌNH (CHUYÊN 2)

Câu IV. (2,0 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $BC < 2R$. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, M là điểm tùy ý trên cung lớn $BC\left(CM \geq BM > 0\right)$. Qua C kẻ tiếp tuyến d tới (O). Đường thẳng AM cắt d và BC lần lượt tại Q và N. Các đường thẳng MB và AC cắt nhau tại P.

1) Chứng minh : $PQCM$ là tứ giác nội tiếp
2) Chứng minh rằng: PQ song song với BC
3) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt d tại E. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{CN} + \dfrac{1}{CQ} = \dfrac{1}{CE}$
4) Xác định vị trí của M sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMBN lớn nhất

Câu IV.



Ý 1. $PQCM$ là tứ giác nội tiếp

Ta có A là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{BA} = sd\,\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{PCQ}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà 2 góc này cùng nhìn $PQ \Rightarrow PMCQ$ là tứ giác nội tiếp

Ý 2. PQ song song với BC

Ta có: $\widehat{QPC} = \widehat{QMC}$ ($MPQC$ là tứ giác nội tiếp) (1)

$\widehat{QMC} = \widehat{BCP}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{QPC} = \widehat{BCP}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BC\,//\,PQ$

Ý 3.

Dễ chứng minh : $AE\,//\,BC$ và $AE = CE$

Ta có: $\dfrac{CE}{CN} = \dfrac{AE}{CN} = \dfrac{QE}{QC}$ (hệ quả Ta let)

$$\Rightarrow \frac{CE}{CN} + \frac{CE}{CQ} = \frac{QE}{QC} + \frac{CE}{CQ} \Rightarrow CE.\left(\frac{1}{CN} + \frac{1}{CQ}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{CN} + \frac{1}{CQ} = \frac{1}{CE}$$

Ý 4.

Ta có : $\overparen{ABN} = \overparen{BMN}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

$\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn (BMN)

Kẻ đường kính AL của (O). Gọi K là giao điểm đường trung trực của đoạn BN và BL

$\Rightarrow E$ là tâm đường tròn (BMN)

Tương tự dựng F là tâm (CMN)

Dễ dàng chứng minh được $\Delta BLC, \Delta BEN, \Delta CFN$ cân

$\Rightarrow LENF$ là hình bình hành $\Rightarrow R_{(MBN)} + R_{(MCN)} = LC$ (không đổi)

Ta có: $MC \geq MB \Rightarrow NC \geq NB$ mà $\Delta EBN \sim \Delta FCN (g.g) \Rightarrow \dfrac{EB}{FC} = \dfrac{NB}{NC} \leq 1$

$\Rightarrow EB \leq FC \Rightarrow 2EB \leq EB + FC \Rightarrow 2R_{(ABN)} \leq LC$

$\Rightarrow R_{(MBN)} \leq \dfrac{LC}{2}$

Dấu $"="$ xảy ra khi $M \equiv L$ là điểm chính giữa của cung lớn $\overparen{BC}$

HƯNG YÊN (KHÔNG CÓ)

KIÊN GIANG

Bài 4. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A} = 60^0$, nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ hai đường cao $BD, CE\left(D \in AC, E \in AB\right)$

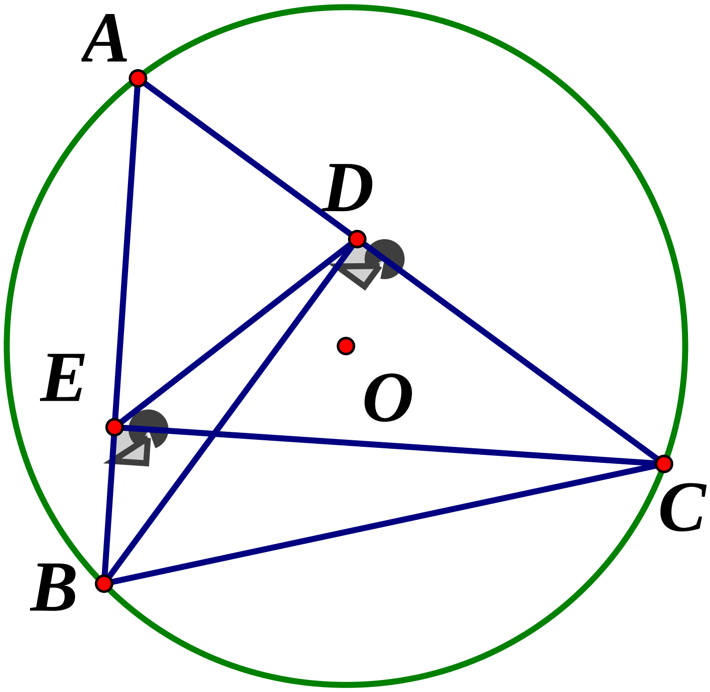
a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp trong một đường tròn

b) Chứng minh $AE.AB = AC.AD$

c) Tính diện tích tam giác ADE, biết diện tích tam giác ABC là $100cm^2$

ĐÁP ÁN

Bài 4



a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp

Vì BD, CE là hai đường cao của $\Delta ABC(gt) \Rightarrow \begin{cases} BD \perp AC \Rightarrow \widehat{BDC} = 90^0 \\ CE \perp AB \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0 \end{cases}$

Xét tứ giác $BCDE$ có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^0(cmt)$ nên $BCDE$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau)

b) Chứng minh $AE.AB = AC.AD$

Xét ΔADE và ΔABC có: $\widehat{BAC}$ chung; $\widehat{AED} = \widehat{ACD}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp $BCDE$)

$\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Vậy $AE.AB = AC.AD(dfcm)$

c) Tính S_{ADE}

Ta có: $\Delta ADE \sim \Delta ABC(cmt)$ theo tỉ số $k = \dfrac{AE}{AC}$

Xét tam giác AEC vuông tại E ta có: $k = \dfrac{AE}{AC} = \cos\widehat{EAC} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$

Do đó ta có: $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{ADE} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = \dfrac{1}{4}.100 = 25\left(cm^2\right)$

Vậy $S_{ADE} = 25cm^2$

KON TUM

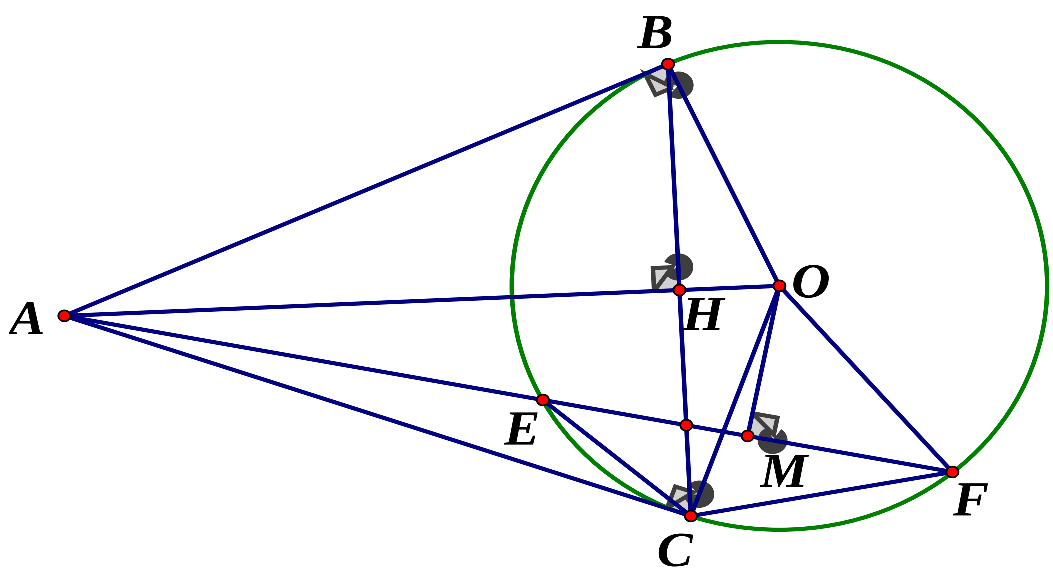
Câu 5. (2,5 điểm) Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O),, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn $(B, C$ là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và $F(AE < AF$ và d không đi qua tâm O)

a) Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp
b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Chứng minh $AH.AO = AE.AF$
c) Gọi K là giao điểm của BC và EF. M là trung điểm EF

Chứng minh $\frac{AK}{AE} + \frac{AK}{AF} = 2$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) **Chứng minh ABOC là tứ giác nội tiếp**

Ta có: AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $\begin{cases} AB \perp OB \\ AC \perp OC \end{cases} \Rightarrow \angle ABO = \angle ACO = 90^0$

Xét tứ giác $ABOC$ ta có: $\angle ABO + \angle ACO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối diện nên $ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b) **Chứng minh** $AH.AO = AE.AF$

Ta có: $OB = OC = R \Rightarrow O \in$ đường trung trực của BC

$AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $AO \cap BC = \{H\}$, Áp dụng hệ thức lượng cho ΔABO vuông tại B có đường cao BH, ta có: $AB^2 = AH.AO$

Xét ΔAEC và ΔACF ta có:

$\widehat{A}\ chung;\ \widehat{AFC} = \widehat{ACE}$ (cùng chắn cung EC)

$\Rightarrow \Delta AEC \sim \Delta ACF(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AC}{AF} \Rightarrow AC = AE.AF$

Mà $AB = AC(cmt) \Rightarrow AH.AO = AE.AF\,(dfcm)$

c) Chứng minh $\dfrac{AK}{AE} + \dfrac{AK}{AF} = 2$

Xét ΔAKH và ΔAOM có: $\widehat{A}\ chung;\ \widehat{H} = \widehat{M} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta AKH \sim \Delta AOM\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AK}{AO} \Rightarrow AK.AM = AH.AO$

$AM.AK = AB^2$ (phương tích)

Xét ΔAEB và ΔABF có: $\widehat{A} chung; \widehat{B} = \widehat{F}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

$\Rightarrow \Delta AEB \sim \Delta ABF\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{AF} \Rightarrow AE.AF = AB^2$

$\Rightarrow AM.AK = AE.AF \Rightarrow \dfrac{AK}{AE} = \dfrac{AF}{AM}(1)$

Chứng minh tương tự : $\Rightarrow \dfrac{AK}{AF} = \dfrac{AE}{AM}(2)$

Cộng (1), (2) vế theo vế:

$\Rightarrow \dfrac{AK}{AF} + \dfrac{AK}{AE} = \dfrac{AE}{AM} + \dfrac{AF}{AM} = \dfrac{AM - EM + AM + MF}{AM}$

$= \dfrac{2AM}{AM}(Do\ ME = MF) = 2$

Vậy $\dfrac{AK}{AE} + \dfrac{AK}{AF} = 2$

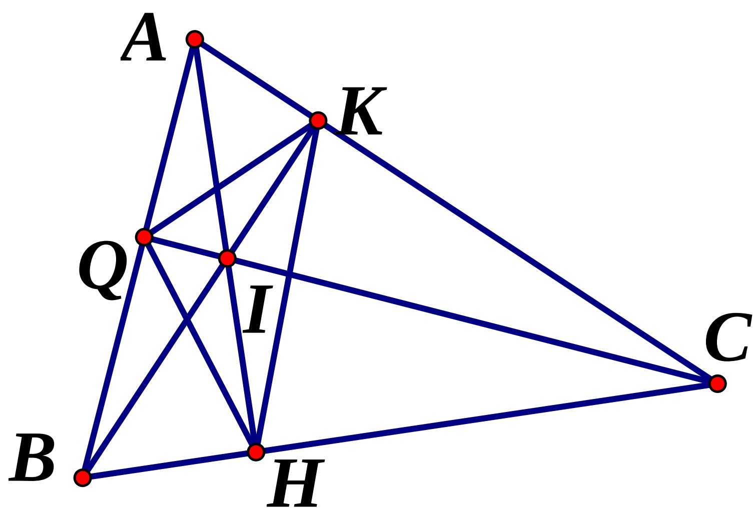
LÂM ĐỒNG

Câu 10. Cho tam giác nhọn ABC có AH, BK, CQ là ba đường cao $(Q \in AB, K \in AC, H \in BC)$. Chứng minh HA là tia phân giác của góc QHK

Câu 12. Cho đường tròn $(O;R)$ cố định đi qua hai điểm B và C cố định $(BC$ khác đường kính). Điểm M di chuyển trên đường tròn (O) (d không trùng với B và C). G là trọng tâm ΔMBC. Chứng minh rằng điểm G chuyển động trên một đường tròn cố định.

ĐÁP ÁN

Câu 10.



Ta gọi I là giao điểm của AH và BK, CQ

Vì $\widehat{IQB}+\widehat{IHB}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow BQIH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABI}=\widehat{QHI}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{QI}$)(1)

Xét tứ giác $BQKC$ có $\widehat{BQC}=\widehat{BKC}=90^0$ cùng nhìn $BC \Rightarrow BQKC$ là tứ giác nội tiếp

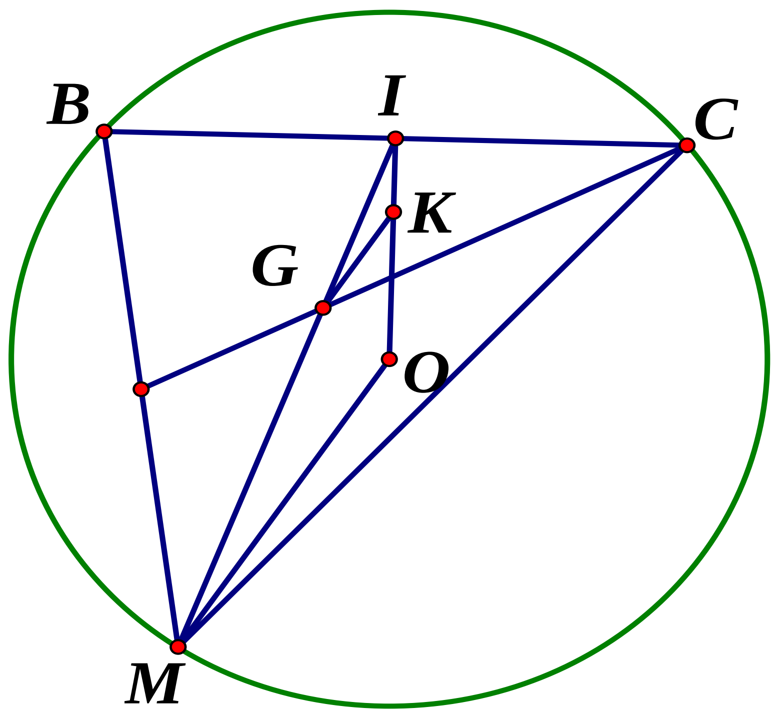
$\Rightarrow \widehat{ABI}=\widehat{QCK}$ $\quad(2)$

Xét tứ giác $IHCK$ có $\widehat{H}+\widehat{K}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow IHCK$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QCK}=\widehat{KHI}$ $\quad(3)$

Từ (1) , (2), $(3) \Rightarrow \widehat{QHI}=\widehat{KHI} \Rightarrow HA$ là tia phân giác của $\widehat{QHK}$

Câu 12.



Gọi I là trung điểm $BC,$ từ G kẻ $GK//OM\left(K\in IO\right)$

Xét ΔIOM có $GK//OM$ nên theo hệ quả Ta let

$\Rightarrow \dfrac{IK}{IO}=\dfrac{GK}{OM}=\dfrac{IG}{IM}=\dfrac{1}{3}$(do G là trọng tâm)

$\Rightarrow \dfrac{GK}{OM}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow GK=\dfrac{R}{3}$ và $\dfrac{IK}{OM}=\dfrac{1}{3}$

Mà I cố định (do B,C cố định), O cố định$\Rightarrow K$ cố định

Vậy G di động trên đường tròn tâm $K,$ bán kính $\dfrac{R}{3}$

LẠNG SƠN

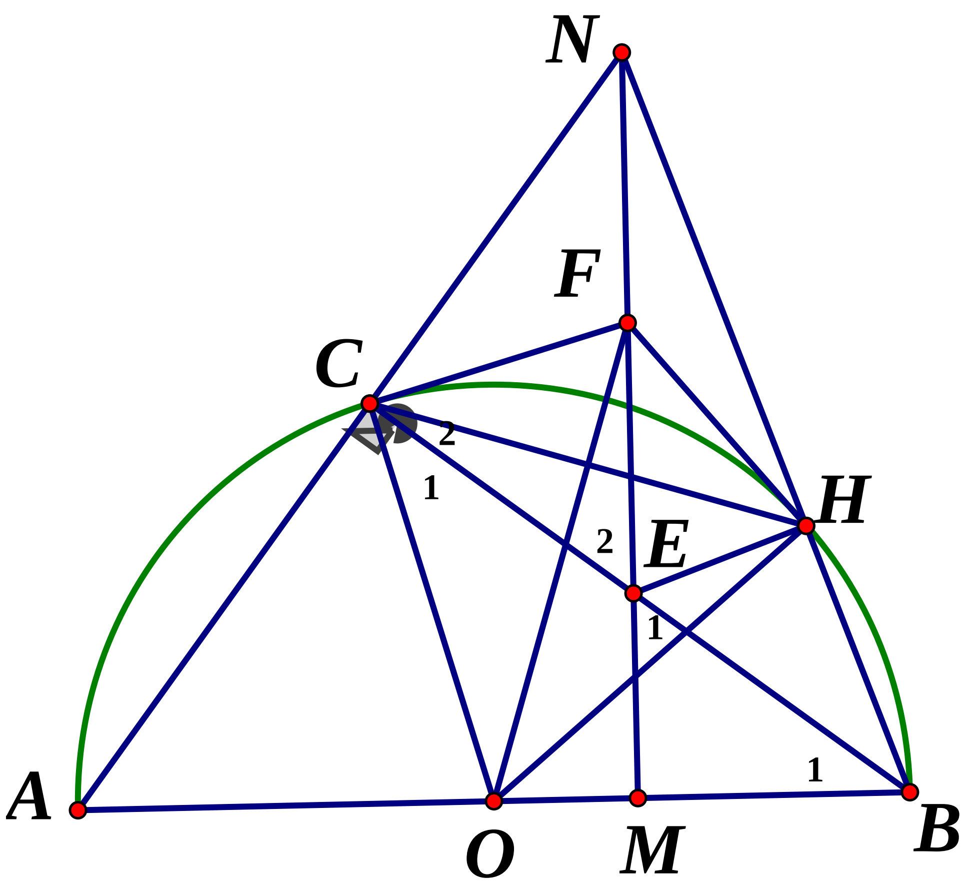
Câu 4. (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn $\left(O\right)$ đường kính $AB.$ Trên nửa đường tròn $\left(O\right)$ lấy điểm C sao cho $CA<CB.$ Trên đoạn thẳng OB lấy điểm M sao cho M nằm giữa O và $B.$ Đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt tia AC tại N, cắt BC tại $E.$

a) Chứng minh tứ giác $ACEM$ nội tiếp trong một đường tròn
b) Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng MN tại F. Chứng minh ΔCEF cân
c) Gọi H là giao điểm của NB với nửa đường tròn (O). Chứng minh HF là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh tứ giác $ACEM$ nội tiếp đường tròn

Ta có: $\angle ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\widehat{AME} = 90^0 (do\, EM \perp AB)$

Tứ giác $ACEM$ có $\widehat{ACE} + \angle AME = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)$(dfcm)$

b) Chứng minh ΔCEF cân

CF là tiếp tuyến của (O) nên $OC \perp CF \Rightarrow \widehat{OCF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^0\ (1)$

Tam giác EMB vuông tại M nên $\widehat{B_1} + \widehat{E_1} = 90^0$ mà $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (đối đỉnh)

Nên $\angle B_1 + \widehat{E_2} = 90^0\,(2)$

Tam giác OBC cân tại O nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}\,(3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{C_2} = \widehat{E_2} \Rightarrow \Delta CEF$ cân tại $F\,(dfcm)$

c) Chứng minh HF là tiếp tuyến

Tứ giác $ABHC$ nội tiếp nên $\angle NHC = \angle CAB$

Tứ giác $ACEM$ nội tiếp nên $\widehat{E_2} = \widehat{CAM} = \widehat{CAB}$ (tính chất)

Nên $\widehat{NHC} = \widehat{E_2} = \widehat{NEC}$

Tứ giác $CNHE$ có $\widehat{NHC} = \widehat{NEC}(cmt)$ nên là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{NHE} + \widehat{NCE} = 180^0 \Rightarrow \widehat{NHE} = 180^0 - \angle NCE = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow \Delta NHE$ vuông tại H

Theo câu b, ΔCEF cân tại F nên $FE = FC(4)$

Ta có: $\widehat{CNF} + \angle E_2 = 90^0, \angle NCF + \widehat{C_2} = 90^0$

Mà $\widehat{E_2} = \widehat{C_2}(cmt) \Rightarrow \widehat{CNF} = \widehat{NCF} \Rightarrow \Delta NCF$ cân tại F $\Rightarrow FC = FN\ (5)$

Từ (4) và (5) suy ra $FC = FN = FE$ hay F là trung điểm EN

Tam giác HNE vuông tại H có HF là trung tuyến nên $HF = \frac{1}{2}EN = CF$

Xét ΔOCF và ΔOHF có: $OC = OH\,(= R); OF$ chung; $FC = FH(cmt)$

$\Rightarrow \Delta OCF = \Delta OHF\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{OHF} = \widehat{OCF}$ mà $\widehat{OCF} = 90^0$ nên $\widehat{OHF} = 90^0$

$\Rightarrow OH \perp HF \Rightarrow FH$ là tiếp tuyến của O$\,(dfcm)$

LÀO CAI

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm $O.$ Kẻ đường thẳng d là tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O).$ Gọi d' là đường thẳng qua B và song song với $d; d'$ cắt các đường thẳng AO, AC lần lượt tại $E, D.$ Kẻ AF là đường cao của tam giác $ABC\,(F \in BC)$

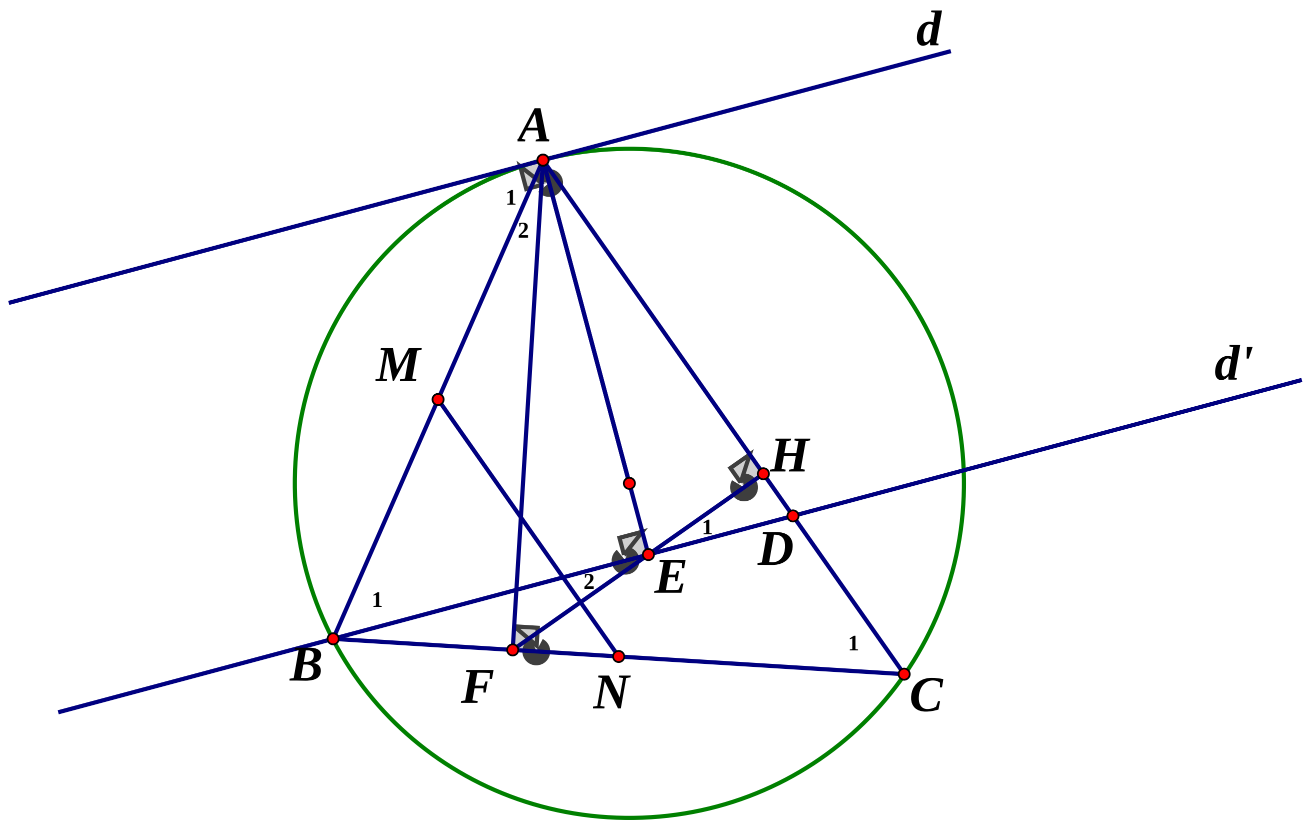
a) Chứng minh rằng tứ giác $ABFE$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $AB^2 = AD.AC$

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, BC.$ Chứng minh rằng $MN \perp EF$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Chứng minh rằng tứ giác $ABFE$ nội tiếp

Ta có: $AF \perp BC \Rightarrow \widehat{AFB} = 90^0; \begin{cases} OA \perp d \\ d'//d \end{cases} \Rightarrow OA \perp d' \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^0$

Tứ giác $ABFE$ có $\widehat{AFB} = \widehat{AEB} = 90^0$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau) $(dfcm)$

b) Chứng minh rằng $AB^2 = AD.AC$

Ta có: $d//d' \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong)

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}\left(= \widehat{A_1}\right)$

Xét ΔABD và ΔACB có: $\widehat{A}$ chung; $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta ACB\left(g-g\right) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$(các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AB^2 = AC.AD(dfcm)$

c) Chứng minh $MN \perp EF$

Gọi H là giao điểm của EF với AC

Ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (đối đỉnh)

Tứ giác $ABFE$ nội tiếp nên $\widehat{E_2} = \widehat{A_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{A_2}\left(=\widehat{E_2}\right)$

Lại có $\Delta ABD \sim \Delta ACB(cmt) \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABC}$ (góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{ADB} + \widehat{E_1} = \widehat{ABC} + \widehat{A_2} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{EHD} = 180^0 - \left(\widehat{ADB} + \widehat{E_1}\right) = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow FE \perp AC(1)$

Mà MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN//AC(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $EF \perp MN(dfcm)$

LONG AN

Câu 5. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC cân tại $A\left(\widehat{BAC} \neq 90^0\right)$, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H.Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE

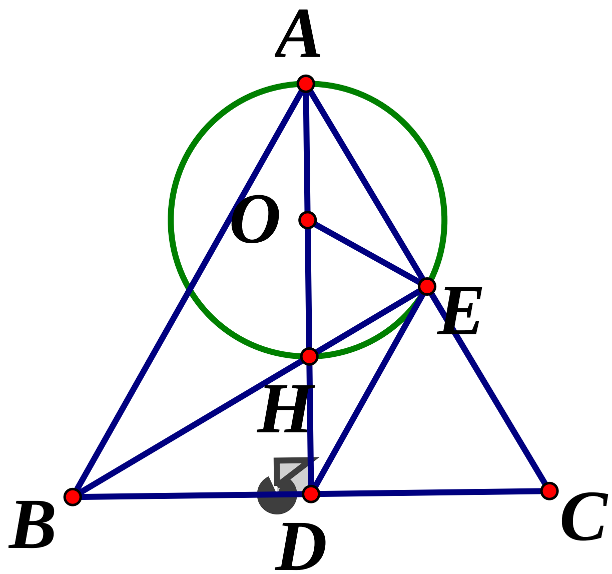
a) Chứng minh bốn điểm C, D, H, E cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $BC = 2DE$

c) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Chứng minh bốn điểm C, D, H, E cùng thuộc một đường tròn

Ta có: AD, BE là các đường cao của $\Delta ABC(gt)$

$$\Rightarrow \begin{cases} BE \perp AC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BEC} = 90^0 \\ \widehat{ADC} = 90^0 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \widehat{HEC} = 90^0 \\ \widehat{HDC} = 90^0 \end{cases}$$

Xét tứ giác $DCEH$ ta có: $\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên $DCEH$ là tứ giác nội tiếp hay 4 điểm C, D, H, E cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $BC = 2DE$

Ta có: AD là đường cao của ΔABC cân tại A nên AD cũng là đường trung tuyến của ΔABC

(tính chất tam giác cân) $\Rightarrow D$ là trung điểm của BC

Xét ΔBEC vuông tại E có đường trung tuyến $ED \Rightarrow ED = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2ED(dfcm)$

c) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Ta có: ΔAHE vuông tại E (gt) $\Rightarrow$ Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAHE là trung điểm của cạnh huyền $AH \Rightarrow O$ là trung điểm của AH

$\Rightarrow OE$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của ΔAEH vuông tại E

$\Rightarrow OE = OH = \dfrac{1}{2}AH \Rightarrow \Delta OEH$ cân tại O$\Rightarrow \widehat{OEH} = \widehat{OHE}$

Ta có: ΔBDE cân tại D $\left(DE = BD = \dfrac{1}{2}BC \right) \Rightarrow \widehat{DEB} = \widehat{EBD}$ (tính chất tam giác cân)

Ta có: ΔBHD vuông tại $D \Rightarrow \widehat{HBD} + \widehat{BHD} = 90^0$ mà $\widehat{OHE} = \widehat{BHD}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{OHE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BED} + \widehat{OHE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BED} + \widehat{OEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{OED} = 90^0 \Rightarrow BE \perp OE$

$\Rightarrow DE$ là tiếp tuyến của O tại $E(dfcm)$

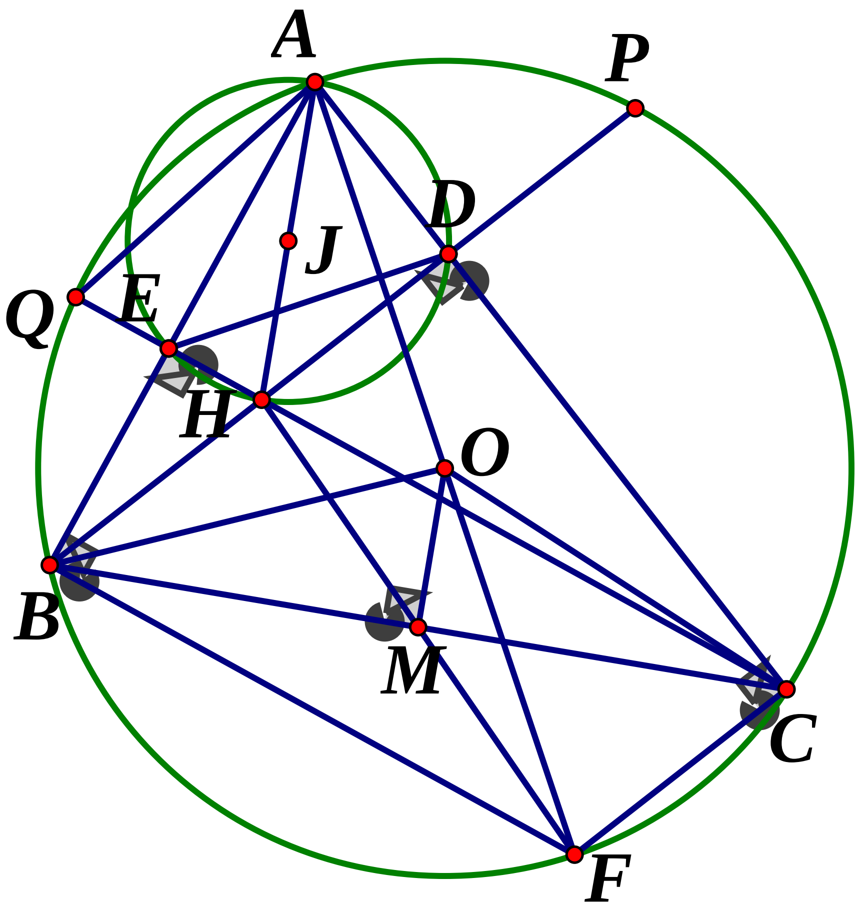
NAM ĐỊNH

Bài 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nôi tiếp đường tròn $(O;R)$. Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Các tia BD, CE cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại điểm thứ hai la P, Q

1) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp và cung AP bằng cung AQ
2) Chứng minh E là trung điểm của HQ và $OA \perp DE$
3) Cho góc CAB bằng $60^0, R = 6cm.$ Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AED

ĐÁP ÁN

Bài 4.



1) **Chứng minh tứ giác** $BCDE$ **nội tiếp và cung** $AP =$ **cung** AQ

Ta có: BD, CE là các đường cao của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp AC = \{D\} \\ CE \perp AB = \{E\} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^0$$

Xét tứ giác $BEDC$ ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^0$ mà hai đỉnh E, D là hai đỉnh kề nhau

Nên $BEDC$ là tứ giác nội tiếp

Vì $BEDC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle EBD = \angle ECD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn ED)

$\Rightarrow \angle ABP = \angle ACQ$

Lại có: $\angle ABP, \angle ACQ$ lần lượt là tứ giác nội tiếp chắn các cung

$AP, AQ \Rightarrow cung\,\overset{\frown}{AP} = cung\,\overset{\frown}{AQ}$

2) **Chứng minh E là trung điểm HQ…..**

Xét tứ giác $AEHD$ ta có: $\widehat{AEH}+\angle ADH=90^0+90^0=180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên $AEHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAH}=\widehat{EDH}$ (cùng chắn cung EH)

Vì $BEDC$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{EDC}=\widehat{ECB}$ (cùng chắn cung EB)

$\Rightarrow \angle AEH=\angle ECB\left(=\angle EDH\right)$ hay $\angle EAH=\angle EAQ\left(=\angle BCQ\right)$

Lại có : $\widehat{QAB}=\widehat{QCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QB)

$\Rightarrow \widehat{EAH}=\widehat{EAQ}\left(=\angle BCQ\right)\Rightarrow AE$ là tia phân giác của $\angle QAH$

Xét ΔQAH ta có: AE vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ΔQAH cân tại A.

$\Rightarrow AE$ cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow E$ là trung điểm $HQ(dfcm)$

Kéo dài AO cắt đường tròn (O) tại F

Khi đó ta có: $\angle ABC=\widehat{AFC}$ (cùng chắn cung AC)

Vì $BCDE$ là tứ giác nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \angle ADE=\angle ABC$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)$\Rightarrow \widehat{ADB}=\widehat{AFC}\left(=\widehat{ABC}\right)$

Ta có $\widehat{ACF}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{CAF}+\widehat{AFC}=90^0\Rightarrow \widehat{FAC}+\widehat{ADE}=90^0$ hay

$\angle DAO+\angle ADE=90^0\Rightarrow AO\perp DE(dfcm)$

3) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác AED

Theo chứng minh b, ta có: $AEDH$ là tứ giác nội tiếp

Nên Đường tròn ngoại tiếp ΔAED là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDH$

Ta có: $\angle AEH=90^0$ và là góc nội tiếp chắn cung AH nên AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDH$

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ADE\Rightarrow J$ là trung điểm của AH.Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có: $\begin{cases} FC\perp AC \\ DB\perp AC \end{cases}\Rightarrow FC//BD$ hay $BH//FC$

$\begin{cases} CE\perp AB \\ BF\perp AB \end{cases}\Rightarrow CE//BF$ hay $BF//CH$

$\Rightarrow BHCF$ là hình bình hành nên BC, HF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Mà M là trung điểm của $BC \Rightarrow M$ cũng là trung điểm của HF

Xét ΔAHF ta có: O, M lần lượt là trung điểm của AE, HF

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\Delta AHF \Rightarrow \begin{cases} OM // AH \\ OM = \dfrac{1}{2}AH \end{cases}$

Ta có : $\angle BOC$ là góc ở tâm chắn cung BC$\Rightarrow \angle BAC$ là góc ở tâm chắn cung BC

$\Rightarrow \angle BAC$ là góc nội tiếp chắc cung BC$\Rightarrow BOC = 2\angle BAC = 2.60^0 = 120^0$

ΔOBC cân tại O có đường trung tuyến $OM \Rightarrow OM$ cũng là phân giác của $\widehat{BOC}$

$\Rightarrow \widehat{BOM} = 60^0$

Xét ΔOBM ta có: $OM = OB.\cos\angle BOM = 6.\cos 60^0 = 3(cm)$

$\Rightarrow AH = 2OM = 2.3 = 6cm$

Vậy bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE là : $AJ = \dfrac{1}{2}AH = 3cm$

NGHỆ AN

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD\left(AD > BC\right)$nội tiếp đường tròn tâm O đường kính $AB.$Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại $E.$Gọi H là hình chiếu của E trên AB

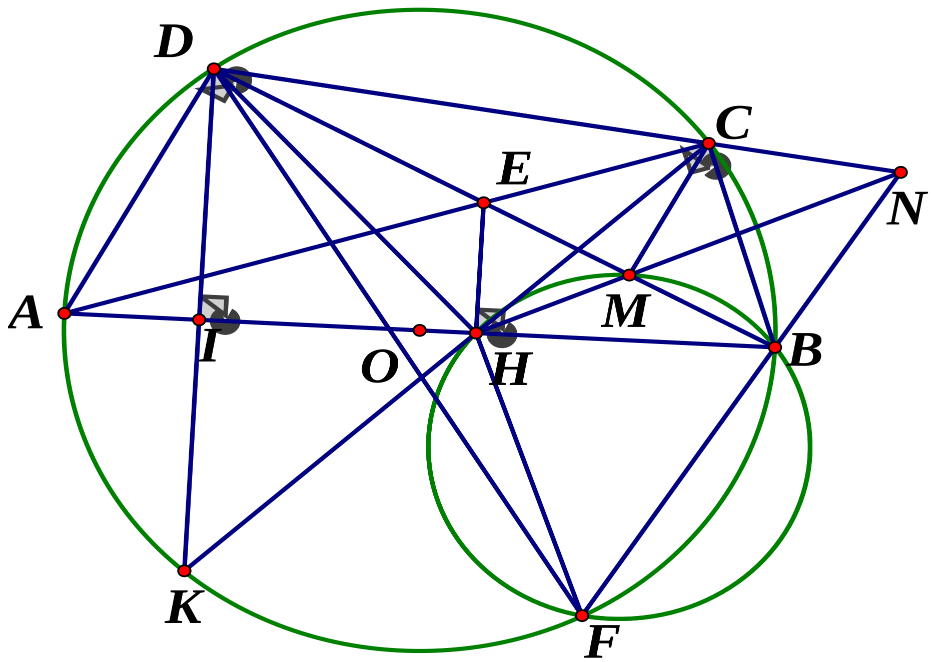
a) Chứng minh $ADEH$ là tứ giác nội tiếp

b) Tia CH cắt đường tròn (O)tại điểm thứ hai là $K.$Gọi I là giao điểm của DK và $AB.$Chứng minh $DI^2 = AI.BI$

c) Khi tam giác DAB không cân, gọi M là trung điểm của $EB, tia\, DC$ cắt tia HM tại N. Tia NB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HMB tại điểm thứ hai là $F.$ Chứng minh F thuộc đường tròn (O)

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh $ADEH$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $\angle ADB = 90^0$ (góc nôi tiếp chắn nửa đường tròn)

$EH \perp AB \Rightarrow \angle AHE = 90^0$

Tứ giác $ADEH$ có: $\angle ADE + \angle AHE = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp (đpcm)

b) Chứng minh $DI^2 = AI.BI$

Tứ giác $ADCK$ nội tiếp nên $\angle ADK = \angle ACK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$) (1)

Xét tứ giác $ECBH$ có: $\widehat{ECB} = \angle ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\angle EHB = 90^0 \left(do\, EH \perp AB \right) \Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{EHB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó tứ giác $ECBH$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{EBH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EH) $\Rightarrow \widehat{ACK} = \angle DBA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADK} = \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{DBA}$

Lại có $\widehat{DBA} + \widehat{DAB} = 90^0$ nên $\widehat{ADI} + \widehat{DAB} = 90^0$ hay $\widehat{ADI} + \widehat{DAI} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DIA} = 180^0 - \left(\angle ADI + \angle DAI \right) = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow DI \perp AB$ nên DI là đường cao trong tam giác vuông ADB

$\Rightarrow DI^2 = IA.IB$ (theo hệ thức lượng) $(dfcm)$

c) Chứng minh F thuộc đường tròn (O)

Theo câu b, $DK \perp BA$ tại I nên AB là đường trung trực của DK

$\Rightarrow DA = AK \Rightarrow sd\, cung\, AD = sd\, cung\, AK$

$\Rightarrow \angle DCA = \angle ACK \Rightarrow CA$ là tia phân giác của góc DCH

$\Rightarrow \widehat{DCH} = 2\widehat{ECH}$ (3)

Tam giác EHB vuông tại H có M là trung điểm EB nên HM là đường trung tuyến

$\Rightarrow MH = MB \Rightarrow \Delta MHB$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{DMH} = \angle MHB + \angle MBH = 2\angle MBH = 2\angle EBH\,(4)$

Tứ giác $ECBH$ có $\widehat{ECB} + \widehat{EHB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{ECH} = \widehat{EBH}\,(5)$

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{DCH} = \widehat{DMH} \Rightarrow DCMH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NCM} = \widehat{NHD}$ (tính chất)

Xét ΔNCM và ΔNHD có: $\widehat{N}$ $chung; \widehat{NCM} = \widehat{NHD}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta NCM \sim \Delta NHD(g.g) \Rightarrow \dfrac{NC}{NH} = \dfrac{NM}{ND}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow NC.ND = NM.NH \qquad (6)$

Tứ giác $HMBF$ nội tiếp nên $\widehat{NMB} = \widehat{NFH}$ (tính chất)

Xét ΔNMB và ΔNFH có: $\widehat{N}\, chung; \widehat{NMB} = \widehat{NFC} \Rightarrow \Delta NMB \sim \Delta NFH\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{NM}{NF} = \dfrac{NB}{NH}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow NM.NH = NB.NF\,(7)$

Từ $(6)\,\&\,(7)$ suy ra $NC.ND = NF.NB \Rightarrow \dfrac{NC}{NF} = \dfrac{NB}{ND}$

Xét ΔNBC và ΔNDF có: $\widehat{N}\, chung; \dfrac{NC}{NF} = \dfrac{NB}{ND}(cmt) \Rightarrow \Delta NBC \sim \Delta NDF\,(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{NFD} = \widehat{BFD}$ (các góc tương ứng)

Mà $\widehat{NCB} + \widehat{DCB} = 180^0$ (kề bù) nên $\widehat{BFD} + \widehat{DCB} = 180^0$

Do đó tứ giác $DCFB$ nội tiếp nên F nằm trên đường tròn $(O)(dfcm)$

NINH BÌNH

Câu 4. (3,5 điểm)

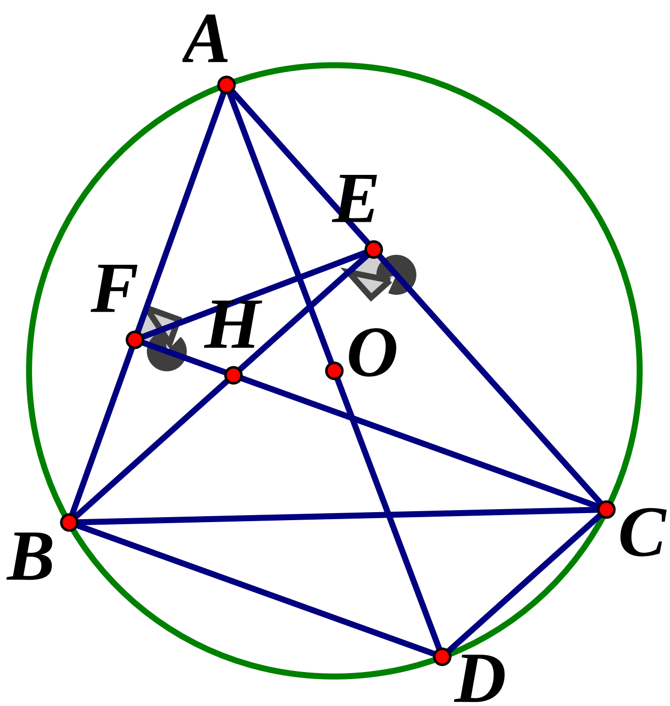
1. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm $O.$ Hai đường cao BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn
b) Chứng minh rằng $AF.AB = AE.AC$
c) Kẻ đường kính AD của đường tròn tâm $O.$ Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

ĐÁP ÁN

Câu 4.

1)



a) Ta có: BE là đường cao nên $BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$

CF là đường cao nên $CF \perp AB \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^0$

Xét tứ giác $BFEC$ có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ nên $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau)

Vậy tứ giác $BFEC$ nội tiếp

b) Theo câu a, $BFEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BFE} + \widehat{BCE} = 180°$ (tính chất)

Mà $\widehat{BFE} + \widehat{AFE} = 180^0$ (kề bù) nên $\widehat{BCE} = \widehat{BCA} = \widehat{AFE}$

Xét ΔAFE và ΔACB có: $\widehat{A}$ chung; $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}(mt) \Rightarrow \Delta AFE \sim \Delta ACB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AF.AB = AE.AC(dfcm)$

c) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành

AD là đường kính nên $\widehat{ACD}=\widehat{ABD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow DC\perp AC, DB\perp AB$

Ta có: $\begin{cases} DC\perp AC \\ BH\perp AB \end{cases} \Rightarrow DC//BH$; $\begin{cases} DB\perp AB \\ CH\perp AB \end{cases} \Rightarrow DB//CH$

Tứ giác $BHCD$ có $DC//BH, DB//HC$ nên là hình bình hành (đpcm)

NINH THUẬN

Bài 4. (4,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=2R.$ Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại I $(I$ nằm giữa A và O). Lấy điểm E trên cung nhỏ $BC(E$ khác B và C), AE cắt CD tại F .

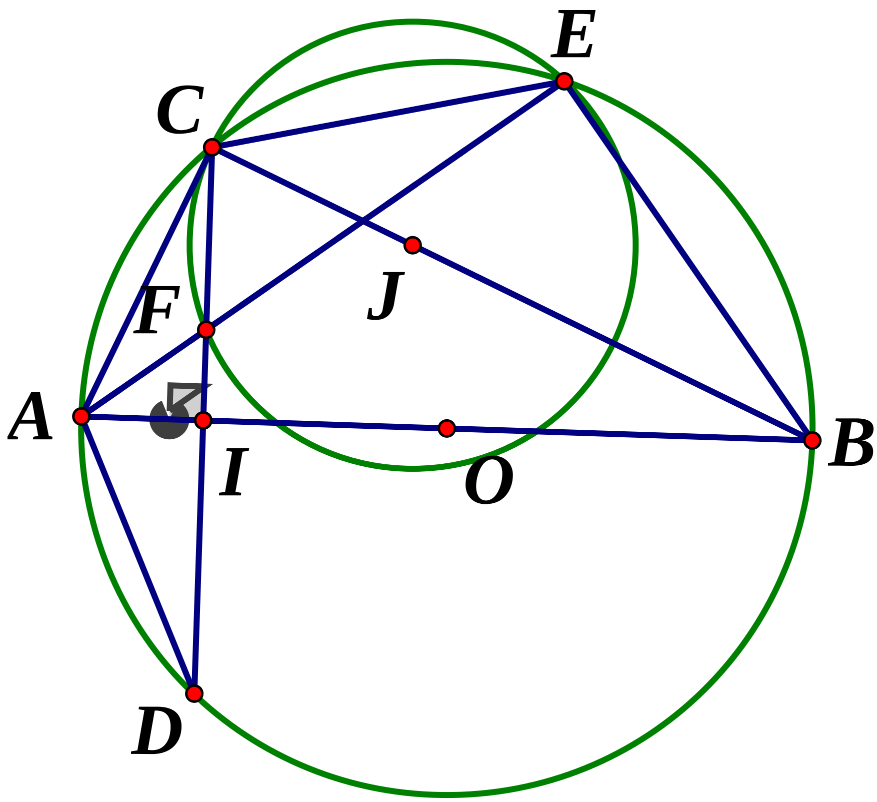
a) Chứng minh tứ giác $BEFI$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Tính độ dài cạnh AC theo R và $\angle ACD$ khi $\angle BAC=60^0$.

c) Chứng minh khi điểm E chạy trên cung nhỏ BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF luôn thuộc một đường thẳng cố định.

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) Chứng minh tứ giác $BEFI$ nội tiếp

Xét đường tròn (O) có $\angle AEB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có: $\angle FIB = 90^0 (do\ CD \perp AB$ tại I)

Xét tứ giác $BEFI$ có $\widehat{FEB} + \widehat{FIB} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow BEFI$ là tứ giác nội tiếp

b) Tính độ dài cạnh AC theo R

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tam giác ABC vuông tại C ta có: $\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{BAC} = 90^0 - 60^0 = 30^0$

Ta có: $\cos\angle BAC = \dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC = AB.\cos\angle BAC = 2R.\cos 60^0 = 2R.\dfrac{1}{2} = R$

Xét đường tròn (O) có $AB \perp CD$ tại I nên I là trung điểm của dây CD (tính chất đường kính – dây cung) hay AB là đường trung trực đoạn CD, suy ra $AC = AD$

Do đó cung $AC = cung\ AD$

Xét đường tròn (O) có $\angle ACD = \angle ABC = 30^0$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung AC và AD bằng nhau) nên $\widehat{ACD} = 30^0$

Vậy $AC = R, \angle ACD = 30^0\ \ khi\ \ \angle BAC = 60^0$

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCEF thuộc đường thẳng cố định

Xét đường tròn (O) có $\angle CEA = \angle ACD$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau CA, AD)

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF có $\angle CEF = \angle ACF$

Mà $\angle CEF$ là góc nội tiếp chắn cung $CF \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta CEF, \Rightarrow JC \perp AC$ tại C (do AC là tiếp tuyến)

Lại có $\widehat{ACB} = 90^0 (cmt)$ hay $AC \perp BC \Rightarrow J \in BC$

Hay tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF luôn thuộc đường thẳng BC cố định.

PHÚ THỌ

Câu 3. (3,0 điểm) Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn (O) tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên AB, T là hình chiếu của M trên AC. Chứng minh rằng:

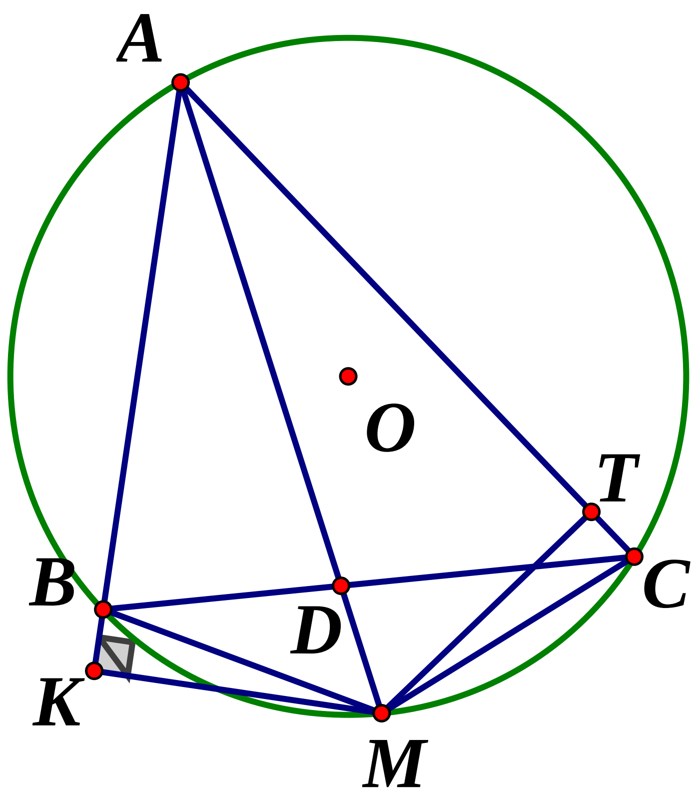
a) $AKMT$ là tứ giác nội tiếp

b) $MB^2 = MC^2 = MD.MA$

c) Khi đường tròn (O) và $B; C$ cố định, điểm A thay đổi trên cung lớn BC thì tổng $\dfrac{AB}{MK} + \dfrac{AC}{MT}$ có giá trị không đổi.

ĐÁP ÁN

Câu 3.



a) Chứng minh $AKMT$ **là tứ giác nội tiếp**

Ta có: $\begin{cases} MK \perp AB = \{K\} \\ MT \perp AC = \{T\} \end{cases} (gt) \Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{ATM} = 90^0$

Xét tứ giác $AKMT$ có: $\widehat{AKM} + \widehat{ATM} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow AKMT$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $MB^2 = MC^2 = MD.MA$

Xét (O) ta có:

$\widehat{MAB}$ là góc nội tiếp chắn cung BM ; $\widehat{MAC}$ là góc nội tiếp chắn cung MC

Lại có: MA là tia phân giác của $\widehat{BAC}(gt) \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MAC} \Rightarrow sd\,\overparen{BM} = sd\,\overparen{CM}$ (hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau)

Ta có :

$\angle MBC$ là góc nội tiếp chắn $\overparen{MC}$

$\angle BAM$ là góc nội tiếp chắn cung BM

$\Rightarrow \angle MAB = \angle MBC = \angle MBD$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔMAB và ΔMBD ta có:

$\widehat{AMB}$ chung ; $\angle MAB = \angle MBD(cmt) \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MBD(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow MB^2 = MD.MA$

Lại có: $sd\,\overset{\frown}{BM} = sd\,\overset{\frown}{CM}\,(cmt) \Rightarrow MB = MC$ (hai cung bằng nhau chắn hai dây bằng nhau)

Vậy $MB^2 = MC^2 = MD.MA(dfcm)$

c) Khi đường tròn (O) và B, C cố định………

Đặt $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} = \alpha$. Xét ΔAKM và ΔATM có:

$AM\ chung; \widehat{KAM} = \widehat{TAM} \Rightarrow \Delta AKM = \Delta ATM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow MK = MT$ (hai cạnh tương ứng)

Giả sử, $AB \le AC$, khi đó ta có:

$$\frac{AB}{MK} + \frac{AC}{MT} = \frac{AK - BK}{MK} + \frac{AT + TC}{MK} = \frac{AK + AT - BK + TC}{MK}$$

Xét ΔBMK và ΔCMT có: $MB = MC, MK = MT\,(cmt)$

$\Rightarrow \Delta BMK = \Delta CMT$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BK = TC$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \frac{AB}{MK} + \frac{AC}{MT} = \frac{AK + AT}{MK}$$

Xét tam giác AKM vuông tại K có: $AK = AM.\cos\alpha, MK = AM.\sin\alpha$

Xét tam giác vuông AMT vuông tại T có: $AT = AM.\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MK} + \frac{AC}{MT} = \frac{AM.\cos\alpha + AM.\cos\alpha}{AM.\sin\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cot\alpha$$

Vì đường tròn (O) và BC cố định nên số đo cung BC không đổi

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 2\alpha = \dfrac{1}{2}$ số đo cung BC không đổi (góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn)

$\Rightarrow \alpha$ không đổi $\Rightarrow 2\cot\alpha$ không đổi

Vậy $\dfrac{AB}{MK} + \dfrac{AC}{MT} = 2\cot\alpha$ không đổi, với $\alpha = \dfrac{1}{4}$ số đo cung BC không đổi.

PHÚ YÊN

Câu 16. *(2,00 điểm)* Cho đường tròn (O), đường kính AB.Trên (O) lấy điểm C sao cho $AC < BC$ .Trên đoạn thẳng OB lấy điểm I cố định (I khác O, B). Đường thẳng qua I vuông góc với AB cắt BC tại E, cắt AC tại F

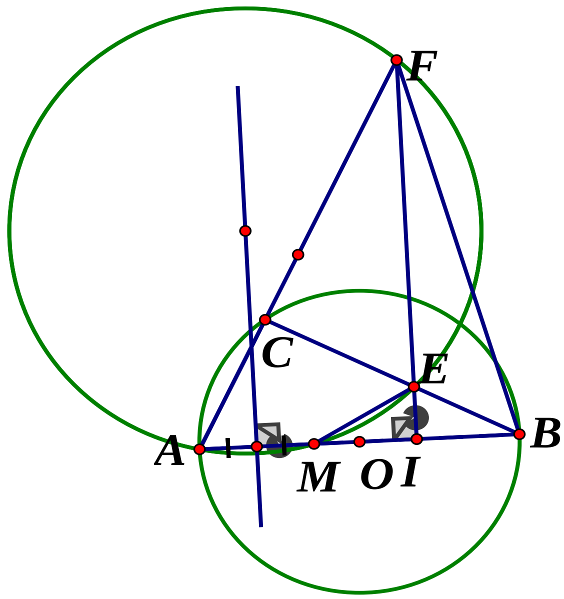
a) Chứng minh rằng: $ACEI$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi M là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với AB (M khác A). Chứng minh rằng tam giác EBM cân

c) Chứng minh rằng khi C di chuyển trên (O) thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF chạy trên một đường thẳng cố định

ĐÁP ÁN

Câu 16.



a) Chứng minh rằng tứ giác $ACEI$ là tứ giác nội tiếp

Vì $\angle ACB$ là góc nôi tiếp chắn nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^0 \Rightarrow \angle ACE = 90^0$

Xét tứ giác $ACEI$ có: $\widehat{ACE} + \widehat{AIE} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $ACEI$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng ΔEBM cân

Vì tứ giác $AMEF$ là tứ giác nội tiếp (các điểm A, M, E, F cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAEF) $\Rightarrow \angle EMI = \angle AFE = \widehat{AFI}(1)$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp). Ta lại có:

$\widehat{AFI} + \widehat{FAI} = 90^0 (do\, \Delta AFI$ vuông tại I)

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{CAB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{FAI} = 90^0 (\Delta ABC$ vuông tại C)

$\Rightarrow \widehat{AFI} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\angle FAI$) $\Rightarrow \widehat{AFI} = \widehat{EBI}\,(2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{EBI} \Rightarrow \Delta EBM$ cân tại E

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF chạy trên một đường thẳng cố định

Ta có: ΔEBM cân tại E (cmt), mà $EI \perp BM$ nên I là trung điểm của BM (đường cao đồng thời là đường trung tuyến) $\Rightarrow M$ là điểm đối xứng với B qua I và $IM = IB$

Mà I, A, B cố định $\Rightarrow IB$ không đổi nên IM không đổi.

Lại có I cố định nên M cố định

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF đi qua điểm M, nên tâm đường tròn nội tiếp ΔAEF thuộc đường trung trực của AM

Vì A, M cố định nên trung trực của AM là cố định

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF thuộc trung trực của AM cố định, với M là điểm đối xứng với B qua I

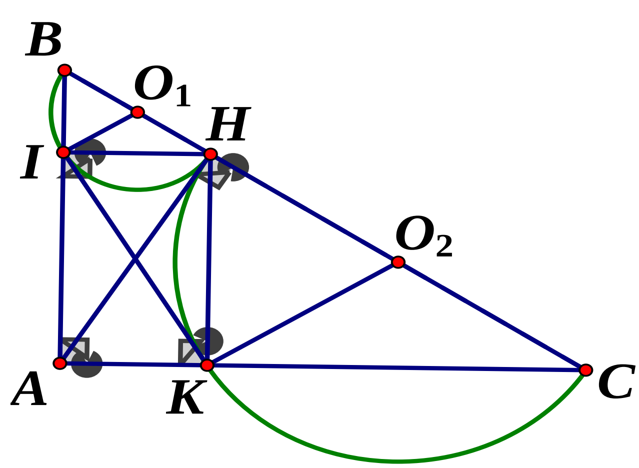
QUẢNG BÌNH

Câu 5. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông ở $A\left(AB < AC\right)$ có đường cao AH $\left(H \in BC\right)$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn $\left(O_1\right)$, đường kính BH cắt AB tại I (I khác B) và nửa đường tròn $\left(O_2\right)$ đường kính HC cắt AC tại K (K khác C). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật
b) Tứ giác $BIKC$ là tứ giác nội tiếp
c) IK là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Xét tứ giác $AHKI$ có $\widehat{AKH} = \widehat{HKD} = 90^0; \widehat{AIH} = \widehat{BIH} = 90^0$

Và theo giả thiết: $\widehat{IAK} = 90^0$ nên $AKHI$ là hình chữ nhật

b) Vì $AKHI$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AIK} = \angle AHK$

Hơn nữa, ta có: $\widehat{AHK}=\widehat{HCK}$ (cùng chắn cung HK của nửa đường tròn $\left(O_2\right)$

Do đó $\widehat{AIK}=\widehat{HCK}\Rightarrow$ tứ giác $BIKC$ là tứ giác nội tiếp

c) Ta có:

$\widehat{O_1IK}=\widehat{O_1IH}+\widehat{HIK}=\widehat{O_1HI}+\widehat{HAK}=\widehat{BCA}+\widehat{HAK}=90^0$

Tương tự ta cũng có: $\widehat{O_2KI}=90^0$.

Từ đó ta có: IK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$

QUẢNG NAM

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $\left(O\right), A$ là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ đường thẳng d vuông góc với OA tại $A,$ lấy điểm M tùy ý trên d (M khác A). Vẽ hai tiếp tuyến MB, MC của đường tròn $\left(O\right)$(B, C là hai tiếp điểm; B và M khác phía với đường thẳng OA)

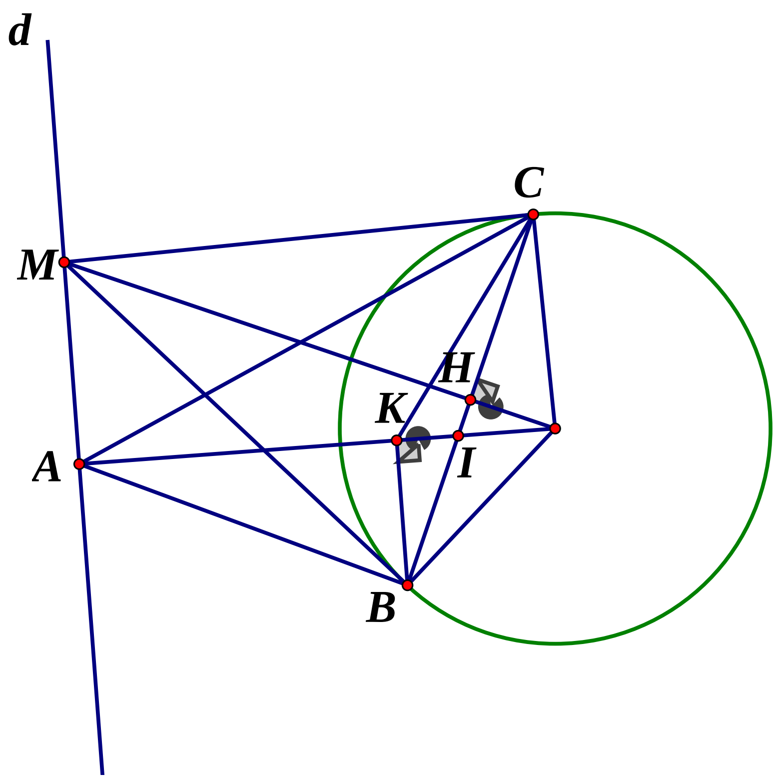
a) Chứng minh tứ giác $MBOC$ nội tiếp trong đường tròn

b) Hạ BK vuông góc với OA tại $K,$ gọi H là giao điểm của BC và OM. Chứng minh $KA.OH=KB.HB$

c) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên d thì đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh tứ giác $MBOC$ nội tiếp

Vì MB, MC là hai tiếp tuyến nên $\widehat{OCM} = \widehat{OBM} = 90^0$

Tứ giác $MCOB$ có $\widehat{OCM} + \widehat{OBM} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow MCOB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $KA.HO = KB.HB$

Ta có: MB, MC là hai tiếp tuyến của (O)$\Rightarrow MB = MC$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow M \in$ đường trung trực của $BC\,(1)$

Có $OB = OC = R \Rightarrow O$ thuộc trung trực của BC (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OM \perp BC$ tại H$\Rightarrow \widehat{BHO} = 90^0$

Vì tứ giác $MBOC$ nội tiếp trong đường tròn (câu a)

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_1}$ (cùng chắn cung OB)

Mà ΔBOC cân tại O (vì $OB = OC$)$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}\,(4)$(tính chất tam giác cân)

Ta có: $\widehat{MAO} = 90^0 (do\, d \perp OA$ tại A)

$\widehat{MBO} = 90^0 (do\ MB$ là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$

Xét tứ giác $MAOB$ có hai đỉnh A và B kề nhau cùng nhìn OM dưới một góc 90^0)

$\Rightarrow MAOB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cùng chắn cung OB) (5)

Từ $(3),(4),(5) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

Xét ΔKBA và ΔHOB có:

$\widehat{BKA} = \widehat{BHO} = 90^0 \left(do\, BK \perp OA, BC \perp OM\right); \widehat{A_1} = \widehat{B_1}(cmt)$

$$\Rightarrow \Delta KBA \sim \Delta HOB(g.g) \Rightarrow \frac{KA}{HB} = \frac{KB}{HO} \Rightarrow KA.HO = KB.HB(dfcm)$$

c) **Chứng minh rằng khi M thay đổi trên d thì đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định**

Gọi giao điểm của OA và BC là I

Xét ΔOMA và ΔOIH có: $\widehat{O}$ chung; $\widehat{A} = \widehat{H} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta OMA \sim \Delta OIH(g.g) \Rightarrow \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OI}{OH} \Rightarrow OM.OH = OI.OA = OB^2 = R^2$ (hệ thức lượng)

$\Rightarrow OI = \dfrac{R^2}{OA}$. Do (O), điểm A cố định suy ra OA là khoảng cách từ O đến d không đổi, R không đổi nên OI không đổi, I thuộc OA cố định, do đó I là điểm cố định.

QUẢNG NGÃI

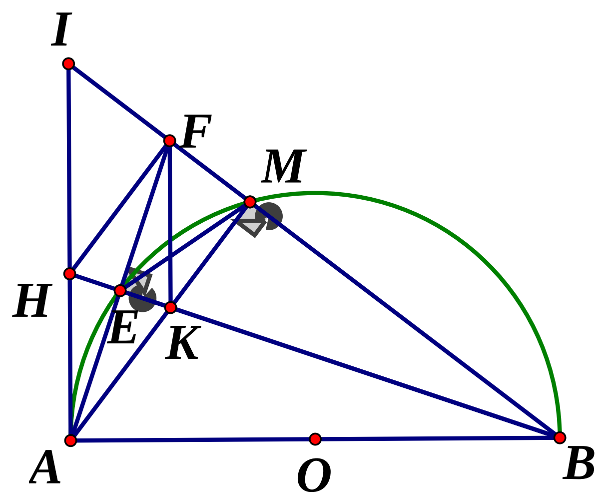
Bài 4. (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm $O,$ đường kính AB và điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn đó $\left(M \neq A, M \neq B\right)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến $Ax.$ Tia BM cắt Ax tại I, tia phân giác của góc $\widehat{IAM}$ cắt nửa đường tròn tại E và cắt tia BM tại F. Tia BE cắt AM tại K và cắt Ax tại H

a) Chứng minh tứ giác $EFMK$ nội tiếp đường tròn
b) Chứng minh ΔABF là tam giác cân
c) Chứng minh tứ giác $AFKH$ là hình thoi
d) Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $AKFI$ nội tiếp được đường tròn.

ĐÁP ÁN

Bài 4.



a) **Chứng minh tứ giác $EFMK$ nội tiếp đường tròn**

Xét đường tròn (O) ta có:

$\widehat{AEB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{FEK}=90^0$

$\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow FMK=90^0$

Tứ giác $EFMK$ có $\widehat{FEK}+\widehat{FMK}=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

Vậy tứ giác $EFMK$ nội tiếp đường tròn (đpcm)

b) **Chứng minh ΔABF là tam giác cân**

Tứ giác $AEMB$ nội tiếp nên $\widehat{EAM}=\widehat{EBM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EM}$)

Mà AF là tia phân giác của $\widehat{IAM}$ nên $\widehat{IAF}=\widehat{FAM}=\widehat{EAM}\Rightarrow \widehat{EBM}=\widehat{FAI}$

Mà $\widehat{FAI}+\widehat{FAB}=\widehat{IAB}=90^0; \widehat{EBM}+\widehat{EFB}=90^0$

Nên $\widehat{FAB}=\widehat{EFB}=\widehat{AFB}$

Tam giác ABF có $\widehat{FAB}=\widehat{AFB}$ nên ΔABF cân tại B

c) **Chứng minh tứ giác $AKFH$ là hình thoi**

Tam giác ABF cân tại B (cmt) nên BE vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến

Nên E là trung điểm AF

Tam giác AHK có AE vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔAHK cân tại A

$\Rightarrow AE$ cũng là đường trung tuyến $\Delta AHK \Rightarrow E$ là trung điểm HK

Tứ giác $AKFH$ có hai đường chéo, AF, HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên là hình bình hành, mà $HK\perp AF$ nên tứ giác $AKFH$ là hình thoi $(dfcm)$

d) Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $AFKI$ nội tiếp được đường tròn

$AKFH$ là hình thoi nên $FK//AH \Rightarrow FK//AI$ nên tứ giác $AKFI$ là hình thang

Để tứ giác $AKFI$ là tứ giác nội tiếp thì $\widehat{AKF}+\widehat{AIF}=180^0$

Mà $\widehat{AKF}+\widehat{KAI}=180^0$ (kề bù) nên $\widehat{AIF}=\widehat{KAI}$ hay $\widehat{AIM}=\widehat{MAI}$

Do đó tam giác AMI vuông cân nên $\widehat{MAI}=45^0 \Rightarrow \widehat{MAB}=45^0$

$\Rightarrow sd\,cung\,\widehat{MB}=2\widehat{MAB}=2.45^0=90^0 \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AB.

QUẢNG NINH

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$ và A là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn $(O)(B,C$ là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O), AD cắt đường tròn tại điểm thứ hai là E

a) Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp

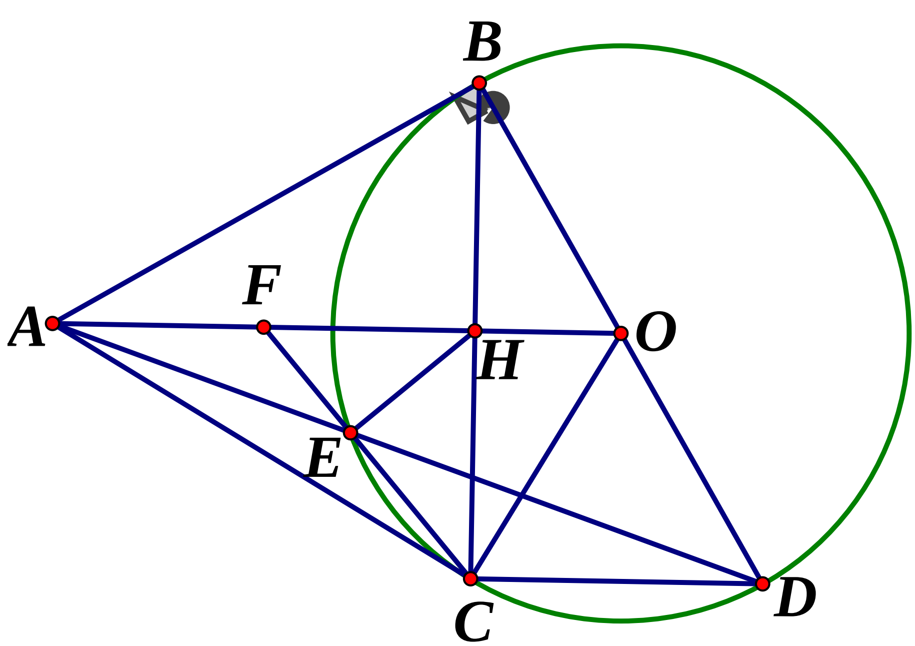
b) Tính độ dài AH, biết $R=3cm, AB=4cm$

c) Chứng minh $AE.AD=AH.AO$

d) Tia CE cắt AH tại F. Chứng tỏ F là trung điểm của AH

ĐÁP ÁN

Câu 4.



a) Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp

Xét đường tròn (O) có AB, AC là các tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0; \widehat{ACO} = 90^0$

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b) Tính độ dài AH biết $R = 3cm, AB = 4cm$

Xét đường tròn (O) có AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

Suy ra $AB = AC$ (tính chất) mà $OB = OC = R \Rightarrow AO$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC

Do đó $OA \perp BC$ tại H

Xét tam giác ABO vuông tại $B,$ theo định lý Pytago ta có:

$AO^2 = AB^2 + OB^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow OA = \sqrt{25} = 5cm$

Xét ΔABO vuông tại B có BH là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $AB^2 = AH.AO \Leftrightarrow AH = \dfrac{AB^2}{AO} = \dfrac{4^2}{5} = 3,2(cm)$ Vậy $AH = 3,2cm$

c) Xét ΔABO vuông tại B có BH là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $AB^2 = AH.AO(1)$

Xét ΔAEB và ΔABD có: $\widehat{BAE}$ chung; $\widehat{ABE} = \widehat{BDE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

$\Rightarrow \Delta AEB \sim \Delta ABD(g-g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AE.AD = AB^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $AE.AD = AH.AO$

d) **Chứng tỏ F là trung điểm của AH**

Xét đường tròn (O) có $\widehat{BCD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow BC \perp CD$

Lại có: $AO \perp BC \Rightarrow CD // AO \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{OAD}$ (so le trong)

Xét (O) có $\widehat{ACE} = \widehat{EDC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$)

Suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{FAE}\left(= \widehat{CDE}\right)$

Xét ΔAFE và ΔCFA có: $\widehat{AFE}$ chung; $\widehat{ACE} = \widehat{FAE}(cmt) \Rightarrow \Delta AFE \sim \Delta CFA(g-g)$

$\Leftarrow \dfrac{AF}{CF} = \dfrac{FE}{FA} \Rightarrow FA^2 = FC.FE(*)$

Theo câu b ta có: $AE.AD = AH.AO \Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{AO}{AD}$

$\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta AOD(c-g-c) \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ADO}$

Suy ra tứ giác $EHOD$ là tứ giác nội tiếp (góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{BOA}$ (cùng phụ với $\widehat{AOD}$)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{CED} = \widehat{CBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

Lại có: $\widehat{BOH} + \widehat{HBO} = 90^0$ (do ΔBHO vuông tại H)

Nên $\widehat{EHD} + \widehat{CED} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HEC} = 90^0$ hay $EH \perp FC$

Xét tam giác HFC vuông tại H có HE là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $FH^2 = FE.FC(**)$

Từ (*) và (**) suy ra $FA^2 = FH^2 \Leftrightarrow FA = FH \Rightarrow F$ là trung điểm AH

QUẢNG TRỊ

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB \neq AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao BD và CE $(D \in AC, E \in AB)$ của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm thứ hai của CE và đường tròn (O). Chứng minh rằng:

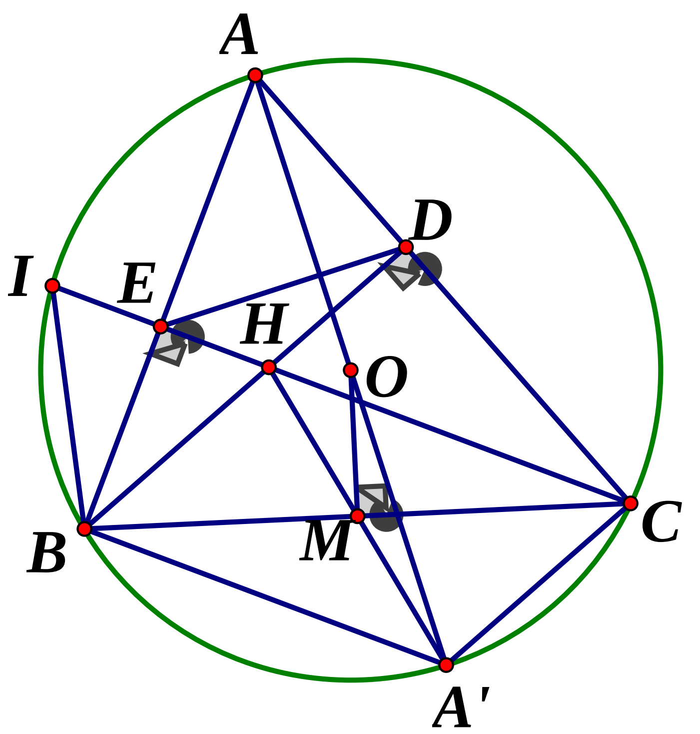
a) $AEHD$ là tứ giác nội tiếp

b) $\widehat{AHB} = \widehat{AIB}$

c) $AH^2 + BC^2 = 4R^2$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Ta có: $\angle ADH + \angle AEH = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $AEHD$ nội tiếp

b) Ta có : $\widehat{AIC} = \widehat{ABC}$ (tứ giác $AIBC$ nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\angle BEC = \angle BDC = 90^0 (gt) \Rightarrow BEDC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EDA}$ (góc trong tại 1 đỉnh bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện)

$\Rightarrow \widehat{EIA} = \widehat{AHE}$ (1)

Mặt khác $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (do tứ giác $AEHD$ nội tiếp)

Tương tự ta có: $\widehat{BIC} = \widehat{BAC}$ ($AIBC$ là tứ giác nội tiếp)

$\widehat{BAC} = \widehat{DHC}$ ($HEAD$ là tứ giác nội tiếp); $\widehat{DHC} = \widehat{IHB}$ (đối đỉnh)

Nên $\widehat{BIC} = \widehat{IHB} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIB} = \widehat{AHB}$

c) Kẻ đường kính AOA', chứng minh được $BHCA'$ là hình bình hành nên HA' đi qua trung điểm M của BC $\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}AH$ mà $BM = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta OMI$ vuông tại I

($OM \perp BC$ - tính chất đường kính dây cung)

Áp dụng định lý Pytago và các biến đổi ta có:

$BC^2 = (2BM)^2 = 4BM^2 = 4(BO^2 - OM^2) = 4R^2 - 4OM^2$

Mà $AH^2 = (2OM)^2 = 4OM^2$

$\Rightarrow AH^2 + BC^2 = 4OM^2 + 4R^2 - 4OM^2 = 4R^2$

SÓC TRĂNG

Bài 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm AC và O là trung điểm của MC. Vẽ đường tròn tâm O, bán kính OC. Kẻ BM cắt (O) tại D, đường thẳng AD cắt (O) tại E

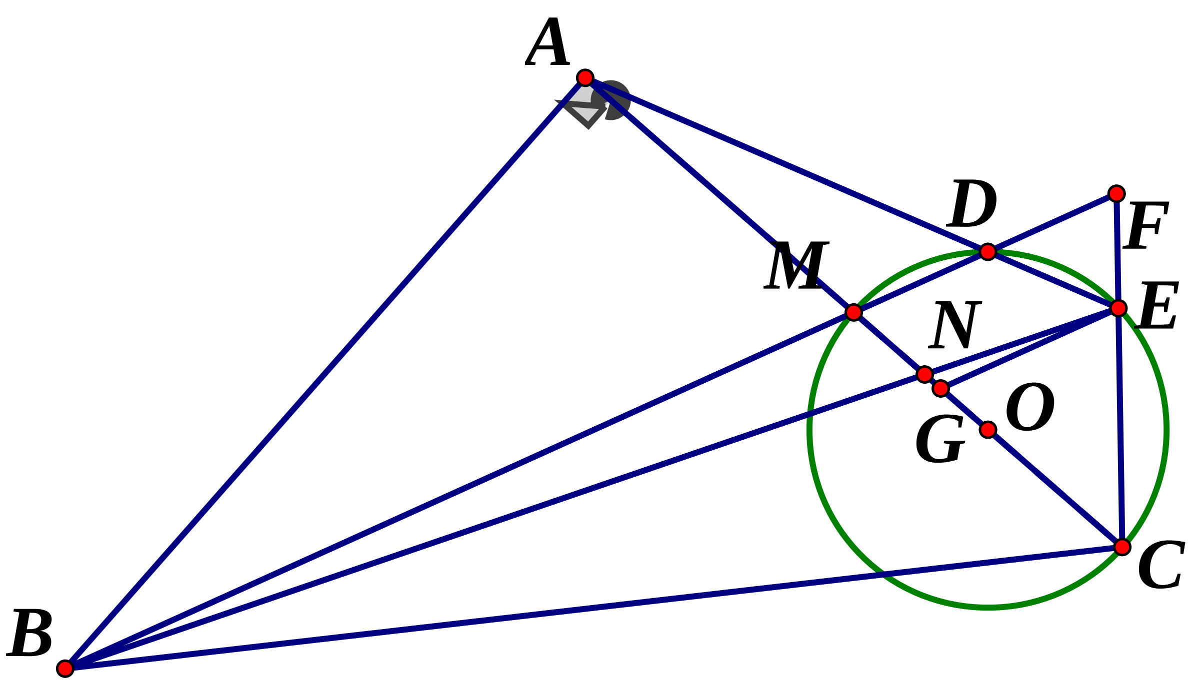
a) Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\Delta MAB \sim \Delta MDC$ và tính tích $MB.MD$ theo AC

c) Gọi F là giao điểm của CE với BD và N là giao điểm của BE với AC
Chứng minh $MB.NE.CF = MF.NB.CE$

ĐÁP ÁN

Bài 5.



a) **Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp**

Ta có: $\widehat{MDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau)

b) Chứng minh $\Delta MAB \sim \Delta MDC$ và tính tích $MB.MD$ theo AC

Xét ΔMAB và ΔMDC có:

$\angle AMB = \angle DMC$ (đối đỉnh); $\widehat{MAB} = \angle MDC = 90^0 \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MDC(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MB}{MC}$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow MB.MD = MA.MC$

Mà M là trung điểm AC nên $MA = MC = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow MA.MC = \dfrac{1}{2}AC.\dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{4}AC^2$

Vậy $MB.MD = \dfrac{1}{4}AC^2$

c) Chứng minh $MB.NE.CF = MF.NB.CE$

Kẻ $EG//BF(G \in AC) \Rightarrow \dfrac{NB}{NE} = \dfrac{MB}{EG}(1)$ và $\dfrac{CE}{CF} = \dfrac{EG}{MF}(2)$ (định lý Ta – let)

Nhân hai vế của (1) và (2) ta được:

$\dfrac{NB}{NE}.\dfrac{CE}{CF} = \dfrac{MB}{EG}.\dfrac{EG}{MF} \Rightarrow \dfrac{NB}{NE}.\dfrac{CE}{CF} = \dfrac{MB}{MF}$

$\Leftrightarrow MB.NE.CF = MF.NB.CE(dfcm)$

SƠN LA

Câu 6. (3,0 điểm) Từ điểm A bên ngoài đường tròn tâm O vẽ các cát tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC

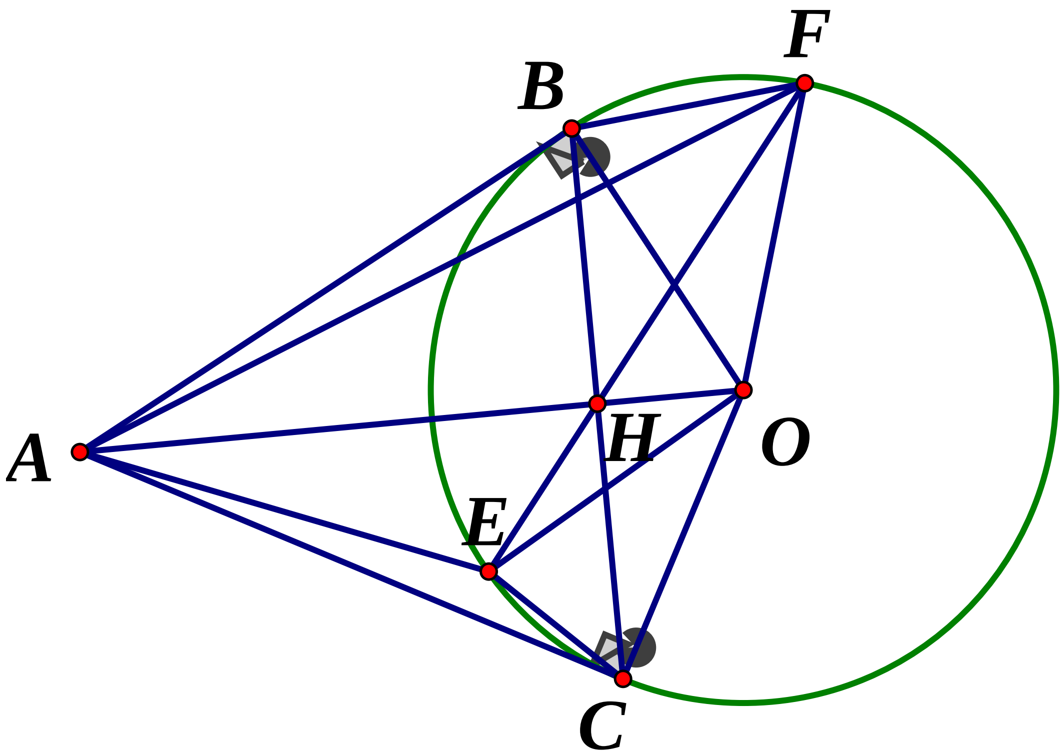
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp được đường tròn .

b) Tính diện tích tam giác ABC trong trường hợp bán kính đường tròn (O) bằng R và $AO = 3R$

c) Dây cung EF thay đổi nhưng luôn đi qua H. Chứng minh AO là tia phân giác của góc $\angle EAF$

ĐÁP ÁN

Câu 6.



a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp được đường tròn

Ta có: AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp OB \\ AC \perp OC \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$$

Xét tứ giác $ABOC$ có: $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp

b) Tính diện tích tam giác ABC

Ta có: $OB = OC = R \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC

$AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)$\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow AO \perp BC = \{H\}$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của BC (tính chất đường kính dây cung)

Áp dụng định lý Pytago vào ΔABO vuông tại B ta có:

$$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R$$

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔABO vuông tại B, đường cao BH ta có:

$BH=\dfrac{OB.AB}{AO}=\dfrac{2\sqrt{2}R.R}{3R}=\dfrac{2\sqrt{2}R}{3}$

$AH=\dfrac{AB^2}{AO}=\dfrac{8R^2}{3R}=\dfrac{8R}{3}\Rightarrow BC=2BH=\dfrac{4\sqrt{2}R}{3}$

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{8R}{3}.\dfrac{4\sqrt{2}R}{3}=\dfrac{16\sqrt{2}R^2}{9}(dvdt)$

Vậy khi $OA=3R$ thì $S_{ABC}=\dfrac{16\sqrt{2}R^2}{9}(dvdt)$

c) Chứng minh AO là tia phân giác của $\angle EAF$

Ta có : $ABOC$ là tứ giác nội tiếp (theo câu a)

$\Rightarrow 4$ điểm A,B,O,C cùng thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow HA.HO=HB.HC\,(1)$

Ta có 4 điểm E,B,F,C cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow HE.HF=HB.HC$ (phương tích) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HA.HO=HE.HF\Rightarrow\dfrac{HA}{HE}=\dfrac{HF}{HO}$

Xét ΔHEO và ΔHAF có:

$\dfrac{HA}{HE}=\dfrac{HF}{HO}(cmt);\widehat{EHO}=\widehat{AHF}$ (đối đỉnh)$\Rightarrow\Delta HEO\sim\Delta HAF\,(c.g.c)$

$\Rightarrow\widehat{HEO}=\widehat{HAF}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow\widehat{FEO}=\widehat{CAF}\Rightarrow AEOF$ là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp A, E cùng nhìn cạnh OF dưới các góc bằng nhau)

Xét đường tròn ngoại tiếp $AEOF$ có $\overset{\frown}{OE}=\overset{\frown}{OF}$ (vì $OE=OF$)$\Rightarrow\widehat{EAO}=\widehat{FAO}$

$\Rightarrow AO$ là tia phân giác của $\widehat{EAF}\,(dfcm)$

TÂY NINH

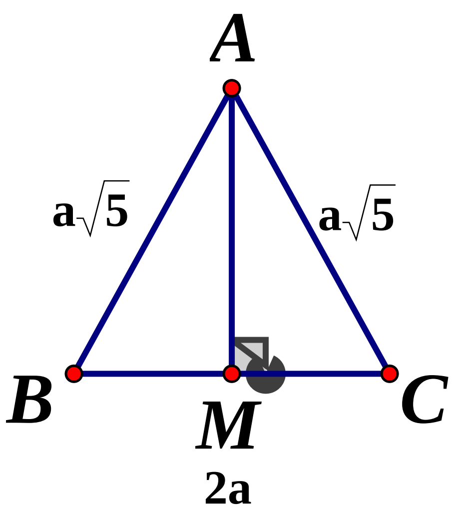
Câu 5.(1,0 điểm) Cho tam giác cân $ABC.$ Biết $AB=AC=a\sqrt{5},BC=2a.$ Gọi M là trung điểm $BC,$ tính theo a độ đoạn thẳng AM

Câu 9.(1,0 điểm) Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng $2020.$ Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm trên cạnh AD sao cho $AN=2ND.$ Hai đoạn CM và BN cắt nhau tại K. Tính diện tích của tam giác KBC

Câu 10.(1,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^0$ và đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Trên cạnh AC lấy D sao cho $AD = AB.$ Gọi I là trung điểm $BD,$ đường thẳng HI cắt AC tại E. Tính $\widehat{AEH}$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



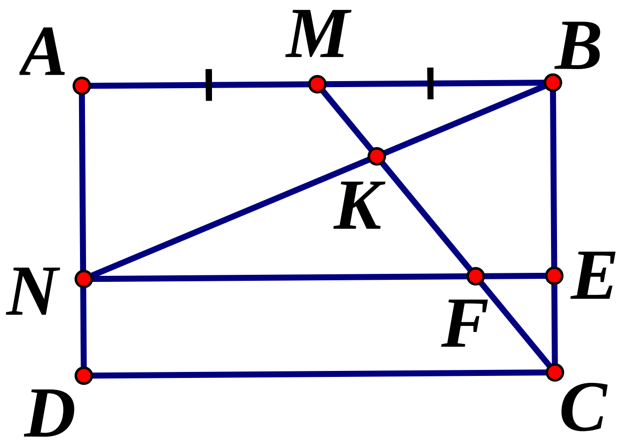
ΔABC cân mà $MB = MC \Rightarrow AM \perp BC$

$\Rightarrow BM = MC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

Xét ΔAMC vuông tại M, áp dụng định lý Pytago ta có:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \Rightarrow AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = 2a$$

Câu 9.



Kẻ $NE//DC\left(E\in BC\right);NE\cap MC=F\Rightarrow \frac{MK}{KF}=\frac{MB}{NF}$

Có: $\frac{EF}{MB}=\frac{EC}{BC}=\frac{ND}{AD}=\frac{1}{3}$

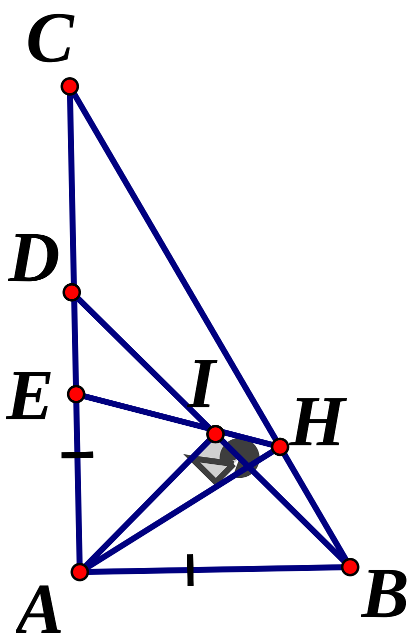
$\Rightarrow \frac{EF}{AB}=\frac{1}{6}\Rightarrow \frac{EF}{NE}=\frac{1}{6}\Rightarrow \frac{NE}{NF}=\frac{5}{6}\Rightarrow \frac{NF}{AB}=\frac{5}{6}\Rightarrow \frac{NF}{MB}=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{MK}{KF}=\frac{3}{5}\Rightarrow \frac{MK}{MF}=\frac{3}{8}$

Mà $\frac{MF}{MC}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{MK}{MC}=\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{KC}{MC}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow S_{KBC}=\frac{3}{4}.S_{BMC}=\frac{3}{4}.\frac{1}{4}S_{ABCD}\Rightarrow S_{KBC}=\frac{3}{16}.2020=378,75$

Câu 10.



Xét ΔABD vuông tại A mà $AB = AD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông cân tại A

Lại có: I là trung điểm của BD

$\Rightarrow$ *Trong* ΔABD có AI là đường trung tuyến, đồng thười AI cũng là đường cao

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0$ mà $\widehat{AHB} = 90^0$ (AH là đường cao) $\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AHB} = 90^0$

Xét tứ giác $AIHB$ có 2 đỉnh H và I kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc vuông

Nên tứ giác $AIHB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{ABI} = 45^0$ (cùng chắn cung AI)

Mà $\widehat{AHC} = 90^0 (AH \perp BC) \Rightarrow \widehat{AHI} + \widehat{EHC} = \widehat{AHC}$

$\Rightarrow \widehat{EHC} = \widehat{AHC} - \widehat{AHI} = 90^0 - 45^0 = 45^0 \ (1)$

ΔABC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$ (hai góc phụ nhau)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{ABC} = 90^0 - 60^0 = 30^0$ hay $\widehat{ECH} = 30^0$ (2)

Ta có: $\widehat{AEH}$ là góc ngoài của $\Delta EHC \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{EHC} + \widehat{ECH}$ (3)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow \widehat{AEH} = 45^0 + 30^0 = 75^0$

THỪA THIÊN HUẾ

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC sao cho $\widehat{BCM}$ nhọn (M không trùng A và C). Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC và AC. Gọi P là trung điểm của AB, Q là trung điểm của FE. Chứng minh rằng :

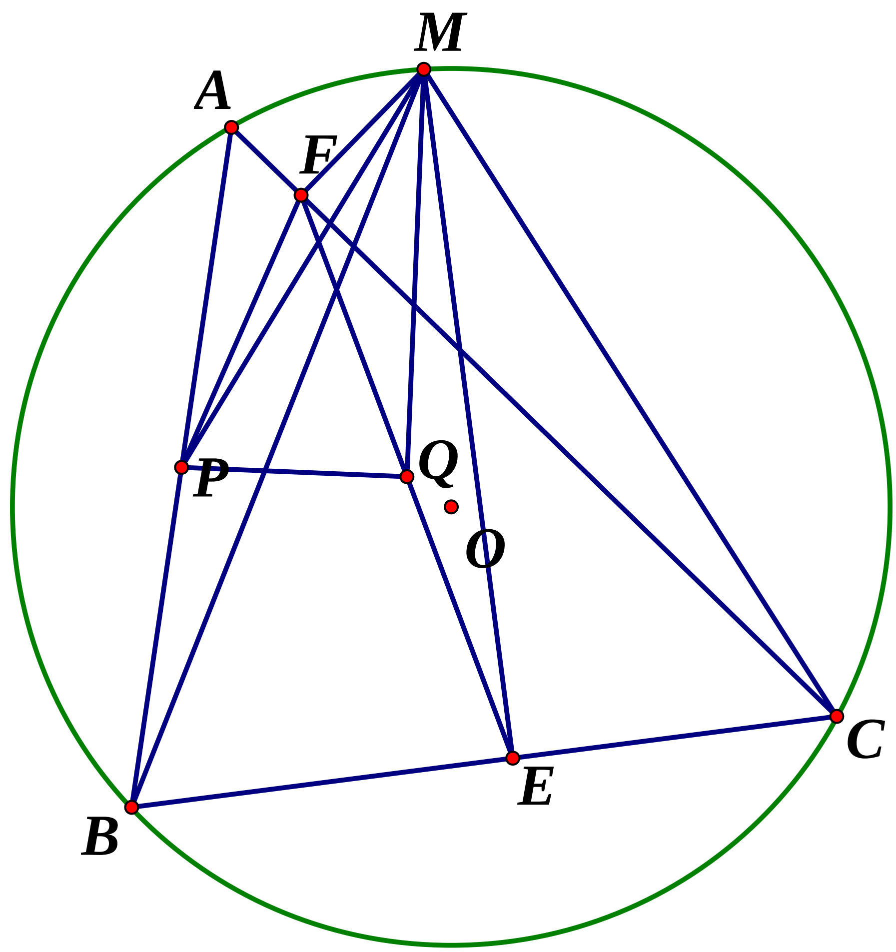
a) Tứ giác $MFEC$ nội tiếp

b) Tam giác FEM và tam giác ABM đồng dạng

c) $MA.MQ = MP.MF$ và $\widehat{PQM} = 90^0$

ĐÁP ÁN

Câu 5.



a) Tứ giác $MFEC$ là tứ giác nội tiếp

Ta có: $MF \perp AC \Rightarrow \widehat{MFC} = 90^0$, $ME \perp BC \Rightarrow \widehat{MEC} = 90^0$

Tứ giác $MFEC$ có $\widehat{MFC} = \widehat{MEC} = 90^0$ nên là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau).

b) Tam giác FEM và tam giác ABM đồng dạng

Theo câu a, tứ giác $MFEC$ nội tiếp nên $\widehat{EFM}+\widehat{ECM}=180^0\,(1)$

Tứ giác $ABCM$ nội tiếp nên $\widehat{BAM}+\widehat{BCM}=180^0\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAM}=\widehat{EFM}$ (cùng bù với $\widehat{BCM}$)

$\widehat{FEM}=\widehat{FCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FM}$)(3)

$\widehat{FCM}=\widehat{ABM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)(4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{FEM}=\widehat{ABM}$

Xét ΔFEM và ΔABM có:

$\widehat{BAM}=\widehat{EFM}\,(cmt);\widehat{FEM}=\widehat{ABM}\,(cmt)\Rightarrow \Delta FEM\sim\Delta ABM\,(g.g)\,(dfcm)$

c) $MA.MQ=MP.MF$ **và** $\angle PMQ=90^0$

Từ câu b ta có: $\Delta FEM\sim\Delta ABM\Rightarrow \dfrac{FE}{AB}=\dfrac{MF}{MA}$(các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow \dfrac{2FQ}{2AP}=\dfrac{MF}{MA}\Rightarrow\dfrac{FQ}{AP}=\dfrac{MF}{MA}\Rightarrow\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{FM}{FQ}$

Xét ΔMAP và ΔMFQ có:

$\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{FM}{FQ};\widehat{MAP}=\widehat{MFQ}\,(cmt)\Rightarrow\Delta MAP\sim\Delta MFQ\,(c.g.c)$

$\Rightarrow\dfrac{MA}{MF}=\dfrac{MP}{MQ}$(2 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)$\Rightarrow MA.MQ=MP.MF\,(dfcm)$

Lại có: $\Delta MAP\sim\Delta MFQ(cmt)\Rightarrow\widehat{AMP}=\widehat{FMQ}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow\widehat{M_1}+\widehat{M_2}=\widehat{M_2}+\widehat{M_3}+\widehat{M_4}\Rightarrow\widehat{M_1}=\widehat{M_3}+\widehat{M_4}\Rightarrow\widehat{AMF}=\widehat{PMQ}$

Xét ΔMAF và ΔMPQ có:

$\widehat{AMF}=\widehat{PMQ}(cmt);\dfrac{MA}{MF}=\dfrac{MP}{MQ}(cmt)\Rightarrow\Delta MFA\sim\Delta MPQ(c.g.c)$

$\Rightarrow\widehat{MFA}=\widehat{MQP}$ (hai góc tương ứng) mà $\widehat{MFA}=90^0$ nên $\widehat{MQP}=90^0\,(dfcm)$

TIỀN GIANG

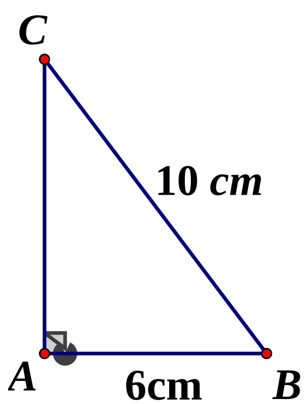
Bài V. (3 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại $A,$ biết $AB = 6cm, BC = 10cm.$ Tính giá trị của biểu thức $P = 5\sin B + 3$
2. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài tại $A,$ với $R > r.$ Kẻ BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn với $B \in (O), C \in (O'),$ tiếp tuyến chung trong tại A của hai đường tròn cắt BC tại M
   a) Chứng minh 4 điểm $O; B; M; A$ cùng thuộc một đường tròn
   b) Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của $O'M$ và $AC.$ Chứng minh tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật
   c) Chứng minh rằng tam giác MEF đồng dạng với tam giác $MO'O$
   d) Cho biết $R = 16cm$ và $r = 9cm.$ Tính diện tích tứ giác $OBCO'$

ĐÁP ÁN

Bài V.

1.



Áp dụng định lý $Pytago$ ta có:

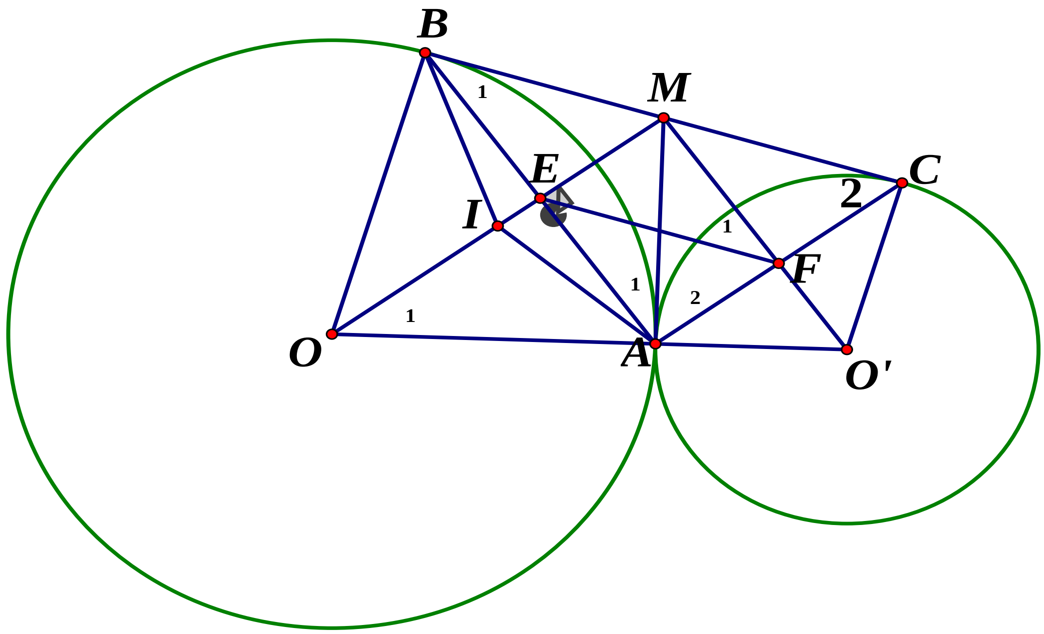
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 64$$

$$\Rightarrow AC = 8 \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow P = 5\sin B + 3 = 5.\frac{4}{5} + 3 = 7$$

Vậy $P = 7$

2.



a) Chứng minh bốn điểm O, B, M, A cùng thuộc một đường tròn

Gọi I là trung điểm của OM ta có:

$\widehat{OBM} = 90^0$ (BM là tiếp tuyến với (O) tại B) $\Rightarrow \Delta OBM$ vuông tại B

$\Rightarrow IO = IM = IB (1)$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền)

$\widehat{OAM} = 90^0$ (AM là tiếp tuyến với (O) tại A) $\Rightarrow \Delta OAM$ vuông tại A

$\Rightarrow IO = IM = IA (2)$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow IO = IM = IB = IA$

Vậy bốn điểm O, B, M, A cùng thuộc đường tròn tâm I đường kính OM $(dfcm)$

b) Chứng minh $AEMF$ là hình chữ nhật

Ta có: $OA = OB = R$

$MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow OM$ là đường trung trực của đoạn AB

$\Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow \widehat{MEA} = 90^0$

Tương tự $O'M \perp CA \Rightarrow \widehat{MFA} = 90^0$

$MA = MB \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1} (1)$

$MC = MA \Rightarrow \Delta MCA$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{C_2}$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=\widehat{B_1}+\widehat{C_2}\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{B_1}+\widehat{C_2}$

Mà $\widehat{BAC}+\widehat{B_1}+\widehat{C_2}=180^0$ (tổng 3 góc trong tam giác)

$\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{B_1}+\widehat{C_2}=90^0$

Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $(dfcm)$

c) Chứng minh $\Delta MEF\sim\Delta MO'O$

Theo câu b, tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{F_1}=\widehat{A_1}$ (3)

Mà tứ giác $OAMB$ nội tiếp (câu a) nên $\widehat{O_1}=\widehat{A_1}$(cùng chắn cung BM) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{F_1}=\widehat{O_1}$

Xét ΔMEF và $\Delta MO'O$ có: $\widehat{M}$ chung; $\widehat{F_1}=\widehat{O_1}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta MEF\sim\Delta MO'O(g-g)$

d) Tính diện tích tứ giác $OBCO'$

Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{EMF}=90^0\Rightarrow \Delta OMO'$ vuông tại M

MA là đường cao trong tam giác vuông OMO' nên:

$MA^2=AO.AO'=16.9=144\Rightarrow MA=12(cm)$

$\Rightarrow MA=MB=12(cm)\Rightarrow BC=24cm$

Ta có: $O'C\perp BC, OB\perp BC\Rightarrow OB//O'C$

Tứ giác $OBCO'$ có $OB//O'C$ và $\widehat{OBC}=90^0$ nên là hình thang vuông

$$\Rightarrow S_{OBCO'}=\frac{1}{2}(OB+O'C).BC=\frac{1}{2}.(16+9).24=300(cm^2)$$

Vậy $S_{OBCO'}=300cm^2$

TRÀ VINH

Đề 1.

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

1) Chứng minh tứ giác $BDHF$ nội tiếp đường tròn
2) BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N. Chứng minh $MN//EF$
3) Chứng minh H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác DEF

Đề 2

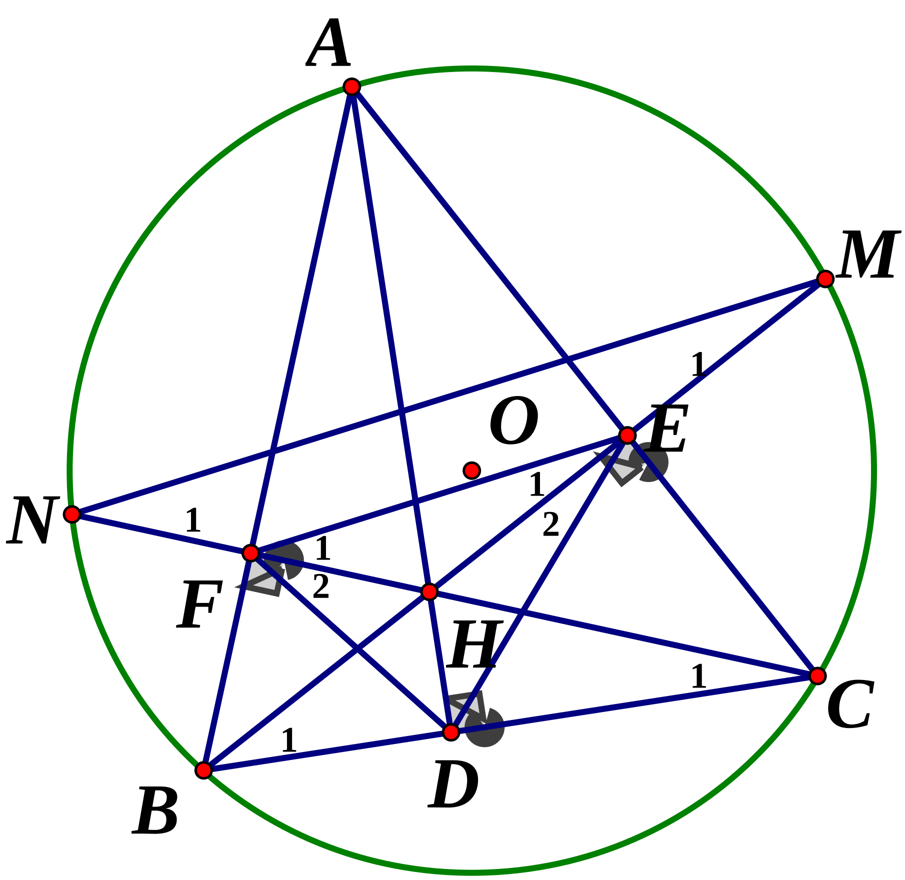
Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn $(A, B$ là hai tiếp điểm). Qua A vẽ đường thẳng song song với $MB,$ cắt đường tròn tại $E,$ đoạn thẳng ME cắt đường tròn tại $F.$ Hai đường thẳng AF và MB cắt nhau tại I.

Chứng minh

1) Tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn
2) $IB^2 = IF.IA$
3) $IM = IB$

ĐÁP ÁN

Đề 1.



1) **Chứng minh tứ giác** $BDHF$ **nội tiếp**

Ta có: $\begin{cases} AD \perp BC \Rightarrow \widehat{BFH} = 90^0 \\ CF \perp AB \Rightarrow \widehat{BDH} = 90^0 \end{cases}$

Xét tứ giác $BDHF$ có $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDHF$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $MN//EF$

Xét tứ giác $BCEF$ có: $\begin{cases} BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$

$\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau)$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$)

Lại có $\widehat{C_1} = \angle M_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BN) $\Rightarrow \angle M_1 = \angle E_1 \left(= \angle C_1\right)$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MN//EF\,(dfcm)$

3) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF

Xét tứ giác $CDHE$ có: $\begin{cases} AD \perp BC \\ BE \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{CDH} = \widehat{CEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CDH} + \widehat{CEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow CDHE$ là tứ giác nội tiếp

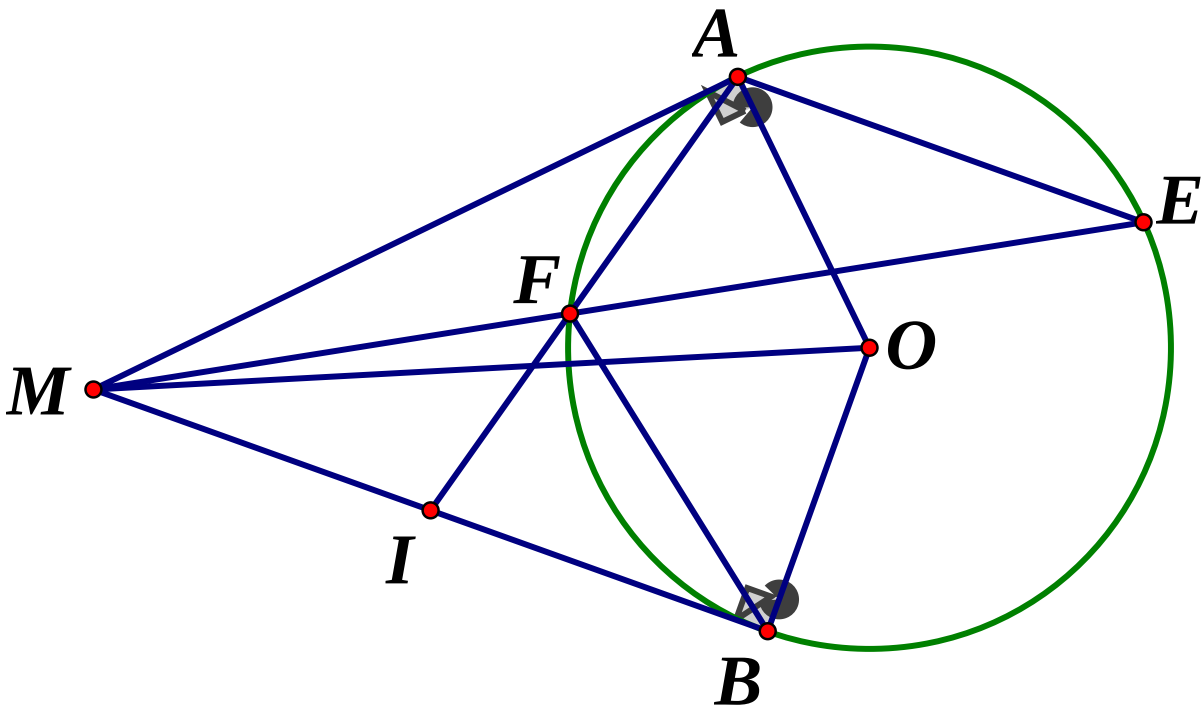
$\Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{C_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DH}$)

Lại có $\widehat{C_1} = \widehat{E_1}(cmt) \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2} \Rightarrow EH$ là tia phân giác của $\widehat{DEF}$ (1)

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có FH là phân giác của $\widehat{DFE}$ (2)

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $DEF\,(dfcm)$

Đề 2.



1) Tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn

Ta có MA, MB là các tiếp tuyến tại A, B của $(O) \Rightarrow \begin{cases} OA \perp MA \\ OB \perp MB \end{cases} \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$

Xét tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$, mà hai góc này đối diện nên $MAOB$ là tứ giác nôi tiếp

2) $IB^2 = IF.IA$

Xét ΔIBF và ΔIAB có: $\angle AIB$ chung

$\widehat{IAB} = \widehat{IBF}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$)

$\Rightarrow \Delta IBF \sim \Delta IAB (g-g) \Rightarrow \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IF.IA (dfcm)$

3) Chứng minh $IM = IB$

Ta có: $AE // MB (gt) \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{EMB}$ (hai góc so le trong)

Hay $\widehat{AEM} = \widehat{FMI}$

Lại có: $\widehat{AEI} = \widehat{MAI}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AF}$) $\Rightarrow \angle MAI = \angle IMF \left(= \angle AEM\right)$

Xét ΔMIF và ΔAIM có: $\widehat{MIA}$ chung; $\widehat{IMF} = \widehat{MAI} (cmt) \Rightarrow \Delta MIF \sim \Delta AIM (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{MI}{AI} = \frac{IF}{IM} \Rightarrow MI^2 = IA.IF$$

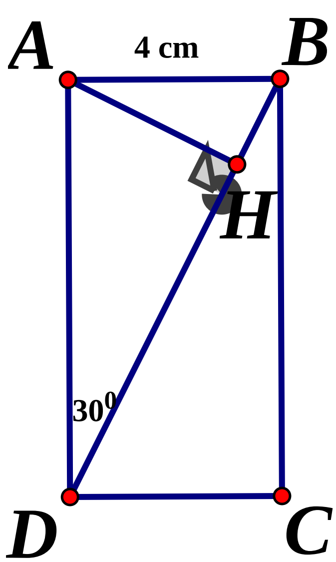
$$\Rightarrow MI^2 = IB^2 = IA.IF \Rightarrow MI = IB(dfcm)$$

TUYÊN QUANG

Câu 32.(1,0 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4(cm), \widehat{ADB} = 30^0$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A xuống đường thẳng BD. Tính độ dài đoạn thẳng BD và diện tích tam giác ABH

ĐÁP ÁN

Câu 32.



Xét tam giác vuông ABD có:

$$\sin\angle ADB = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{4}{\sin 30^0} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8(cm)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABD vuông tại A, ta có:

$$AB^2 = BH.BD \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BD} = \frac{4^2}{8} = 2(cm)$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABH ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}(cm)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2}AH.BH = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3}\left(cm^2\right)$$

Vậy $BD = 8cm, S_{\Delta ABH} = 2\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

VĨNH LONG

Bài 6. (2,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ đường thẳng d vuông góc với OA tại $M\left(M \neq O, A\right)$. Trên d lấy điểm N sao cho N nằm bên ngoài nửa đường tròn (O). Kẻ tiếp tuyến NE với nửa đường tròn $\left(O\right)$(E là tiếp điểm, E và A nằm cùng một phía đối với đường thẳng d)

a) Chứng minh tứ giác $OMEN$ nội tiếp được đường tròn

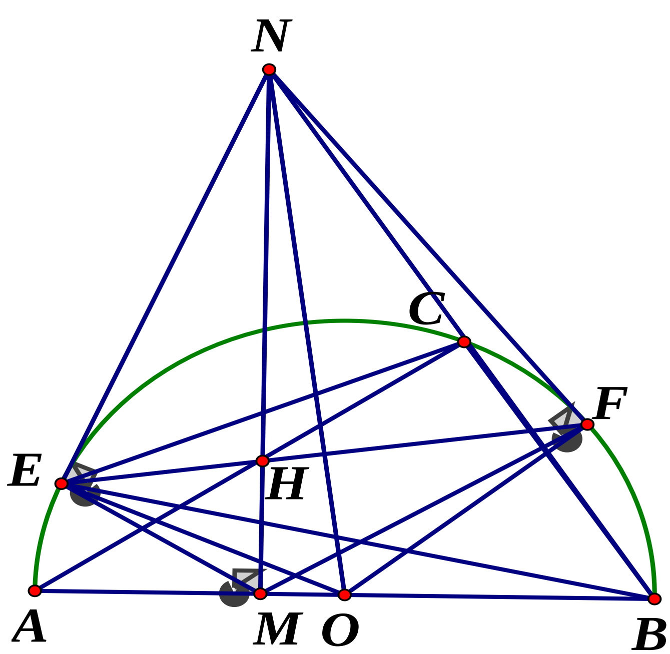
b) Nối NB cắt nửa đường tròn $\left(O\right)$ tại C. Chứng minh $NE^2 = NC.NB$

c) Gọi H là giao điểm của AC và d. F là giao điểm của tia EH và nửa đường tròn $\left(O\right)$

Chứng minh $\widehat{NEF} = \widehat{NOF}$

ĐÁP ÁN

Bài 6.



a) **Chứng minh tứ giác $OMEN$ nội tiếp**

Ta có: $d \perp OA \Rightarrow \widehat{NMO} = 90^0$

NE là tiếp tuyến của $\left(O\right)$ tại E nên $OE \perp NE \Rightarrow \widehat{NEO} = 90^0$

Tứ giác $OMEN$ có $\widehat{NMO}=\widehat{NEO}=90^0$ nên tứ giác $OMEN$ là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh kề cùng 1 cạnh cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau.(đpcm)

b) Chứng minh $NE^2=NC.NB$

Nối E với C, E với B

Xét ΔNEC và ΔNBE có: $\angle N$ chung; $\angle NBE=\angle NEC$ (cùng chắn $\overset\frown{EC}$)

$\Rightarrow \Delta NEC\sim\Delta NBE(g.g)\Rightarrow \dfrac{NE}{NB}=\dfrac{NC}{NE}$(các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Vậy $NE^2=NB.NC$

c) Chứng minh $\widehat{NEF}=\widehat{NOF}$

Xét ΔNCH và ΔNMB có:

$\widehat{N}$ chung; $\widehat{NCH}=\widehat{NMB}=90^0\Rightarrow \Delta NCH\sim\Delta NMB(g.g)\Rightarrow \dfrac{NC}{NM}=\dfrac{NH}{NB}$(hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow NC.NB=NH.NM$ mà

$NE^2=NB.NC(cmt)\Rightarrow NE^2=NH.NM\Rightarrow \dfrac{NE}{NM}=\dfrac{NH}{NE}$

Xét ΔNEH và ΔNME có:

$\widehat{N}\ chung;\dfrac{NE}{NM}=\dfrac{NH}{NE}(cmt)\Rightarrow \Delta NEH\sim\Delta NME(c.g.c)\Rightarrow \widehat{NHE}=\widehat{NEM}$ (góc tương ứng) (1)

Kẻ tiếp tuyến NF' với nửa đường tròn (O)

Do $NE=NF'$(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)$\Rightarrow NF'^2=NH.NM\Rightarrow \dfrac{NF'}{NH}=\dfrac{NM}{NF'}$

Xét $\Delta NF'H$ và $\Delta NMF'$ có: $\widehat{N}$ chung; $\dfrac{NF'}{NH}=\dfrac{NM}{NF'}(cmt)\Rightarrow \Delta NF'H\sim\Delta NMF'(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{NHF'}=\widehat{NF'M}$ (các góc tương ứng) (2)

Lại có tứ giác $OMEN$ nội tiếp (câu a) nên 4 điểm O,M,E,N cùng thuộc một đường tròn(3)

Tứ giác $OENF'$ có $\widehat{OEN}+\widehat{OF'N}=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp,do đó 4 điểm O,E,N,F' cùng thuộc một đường tròn (4)

Từ (3) và (4) suy ra 5 điểm O,M,E,N,F' cùng thuộc một dường tròn suy ra tứ giác $MENF'$ nội tiếp nên $\widehat{NEM}+\widehat{NF'M}=180^0\,(5)$

Từ (1), (2), (5) suy ra $\widehat{NHE}+\widehat{NHF'}=\widehat{NEM}+\widehat{NF'M}=180^0$

$\Rightarrow E, H, F'$ thẳng hàng hay F' là giao điểm của EH với nửa đường tròn (O)

$\Rightarrow F \equiv F' \Rightarrow$ Tứ giác $NEOF$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NEF} = \widehat{NOF}$ (cùng chắn cung NF)

VĨNH PHÚC

Câu 7. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O).Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến $(O)(B, C$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng đi qua O vuông góc với đường thẳng AD và cắt AD, BC lần lượt tại K, E. Gọi I là giao điểm của OA và BC.

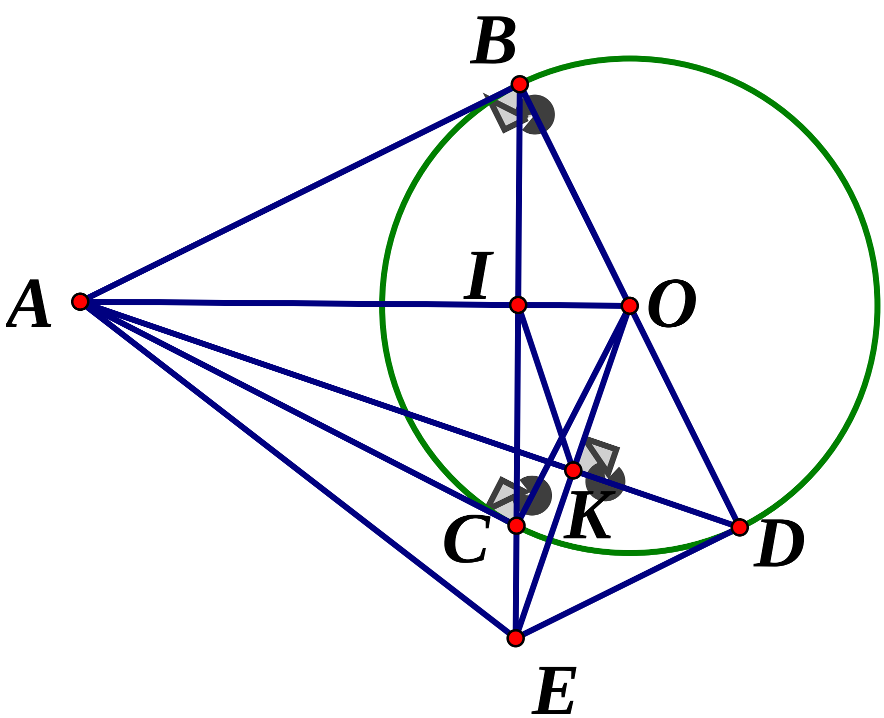
a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABOC, AIKE$ nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh rằng $OI.OA = OK.OE$

c) Biết $OA = 5cm$, đường tròn (O) có bán kính $R = 3cm$. Tính độ dài đoạn thẳng BE

ĐÁP ÁN

Câu 7.



a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABOC, AIKE$ nội tiếp đường tròn

Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^0$

$\Rightarrow \angle OBA + \angle OCA = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow OBAC$ là tứ giác nội tiếp

Vì $OB = OC\left(= R\right), AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow OA$ là trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$ tại I

Xét tứ giác $AIKE$ có : $\widehat{AIE} = \widehat{AKE} = 90^0$

$\Rightarrow AIKE$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau)

b) Chứng minh $OI.OA = OK.OE$

Vì $AIKE$ là tứ giác nội tiếp $\left(cmt\right) \Rightarrow \angle OIK = \angle OEA$ (góc và góc trong tại đỉnh đối diện). Xét ΔOIK và ΔOEA có:

$\angle AOE\ \ chung; \widehat{OIK} = \widehat{OEA}(cmt) \Rightarrow \Delta OIK \sim \Delta OEA(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{OI}{OE} = \frac{OK}{OA} \Rightarrow OI.OA = OK.OE(dfcm)$$

c) Tính độ dài đoạn thẳng BE

Vì OA là trung trực của $BC(cmt) \Rightarrow OA \perp BC$

Xét ΔOAB vuông tại B, đường cao BI ta có:

$OB^2 = OI.OA \Rightarrow OI = \dfrac{OB^2}{OA} = \dfrac{3^2}{5} = \dfrac{9}{5}\left(cm\right)$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Leftrightarrow BI^2 = OB^2 - OI^2 = 3^2 - \left(\dfrac{9}{5}\right)^2 = \dfrac{144}{25}$ (Định lý Pytago) $\Rightarrow BI = \sqrt{\dfrac{144}{25}} = 2,4(cm)$

Ta có BD là đường kính của $\left(O;3cm\right)$ nên $BD = 6cm$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông OAB ta có:

$$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AB = 4\left(cm\right)$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác ABD ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow AD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\left(cm\right)$$

Xét ΔODK và ΔADB có: $\widehat{ADB}$ chung; $\widehat{OKD} = \widehat{ABD} = 90^0$

$$\Rightarrow \Delta ODK \sim \Delta ADB(g.g) \Rightarrow \frac{OD}{OK} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow OK = \frac{OD.AB}{AD} = \frac{3.4}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}(cm)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAK ta có :

$$AK^2 = OA^2 - OK^2 = 5^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{289}{13} \Rightarrow AK = \frac{17}{\sqrt{13}}(cm)$$

Xét ΔOAK và ΔOBI có: $\angle IOK$ chung; $\angle OKA = \angle OIE = 90^0$

$\Rightarrow \Delta OAK \sim \Delta OEI(g.g) \Rightarrow \dfrac{OK}{AK} = \dfrac{OI}{EI}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$$\Rightarrow EI = \frac{AK.OI}{OK} = \frac{\frac{17}{\sqrt{13}}.\frac{9}{5}}{\frac{6}{\sqrt{13}}} = 5,1(cm)$$

Vậy $BE = BI + IE = 2,4 + 5,1 = 7,5(cm)$

YÊN BÁI (KHÔNG CÓ)

--END--

-NGUYỄN ĐÌNH PHÚC (TP.HCM)-