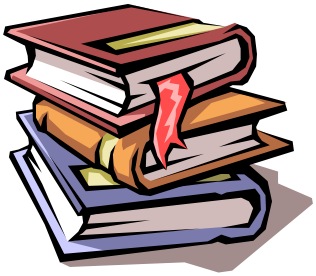
# Tailieumontoan.com

**Điện thoại (Zalo) 039.373.2038**



# ĐỀ CƯƠNG
# GIỮA KÌ 2 MÔN TOÁN LỚP 9

*Tài liệu sưu tầm, ngày 21 tháng 9 năm 2021*

# ĐỀ CƯƠNG GK2 TOÁN 9 VĂN YÊN

## NĂM HỌC 2020-2021.

## ĐỀ BÀI

**Dạng 1.1: Giải các hệ phương trình sau**

1) $\begin{cases} x-4y=3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{4} \\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}+1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+1)(y-1)=xy-1 \\ (x-3)(y-3)=xy-3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3 \\ \dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{y+5}=-5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} |x+5|-\dfrac{2}{\sqrt{y-2}}=4 \\ |x+5|+\dfrac{1}{\sqrt{y-2}}=3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1}-\dfrac{y-2}{y+2}=1 \\ \dfrac{3x-3}{2x+1}+\dfrac{2y-4}{y+2}=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2(x+2)-3(x-3y)=4 \\ 3(x+2)+(x-3y)=6 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2(x+y)+\sqrt{x+2}=7 \\ 5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=4 \\ 6\sqrt{x-1}-2\sqrt{y+2}=2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|1-2y|}=3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}-2\sqrt{y+1}=3 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{2x+3}}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{2y-5x}{3}+5=\dfrac{y+27}{4}-2x \\ \dfrac{x+1}{3}+y=\dfrac{6y-5x}{7} \end{cases}$

**Dạng 1.2: Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước.**

**Bài 1.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+my=2m-1 \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

b) Chứng minh hệ PT có nghiệm duy nhất với mọi $m$.

c) Với $(x;\ y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình, tìm hệ thức liên hệ giữa $x$, $y$ không phụ thuộc vào $m$.

d) Gọi $(x;\ y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm $m$ để

i) $\sqrt{2x+1}=y$

ii) $|x|=2|y|$

iii) Biểu thức $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

iv) $x-y<0$

**Bài 2.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+4y=m+2 \\ x+my=m \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=-3$

b) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất hệ phương trình, tìm hệ thức $x;y$ không phụ thuộc vào $m$.

c) Gọi $(x,y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm $m$ để

i) $x^2+y^2=2$

iii) Biểu thức $P=x-2y^2$ đạt giá trị lớn nhất

ii) $|1-x|+y=3$

iv) $x+y=\dfrac{2m}{m-4}$

**Dạng 2: Giải toán bằng cách lập hệ phương trình**

**Dạng 2.1 : Toán tìm số**

**Bài 1.** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng $19$ và tổng các bình phương của chúng bằng $185$.

**Bài 2.** Tìm hai số tự nhiên, biết tổng của chúng là $2216$ và nếu lấy số lớn chia cho $9$ thì được thương là số kia và dư là $56$.

**Bài 3.** Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng $13$. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là $25$. Tìm số đã cho.

**Bài 4.** Tổng ba lần chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là $14$. Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là $18$ đơn vị. Tìm số có hai chữ số đó.

**Dạng 2.2. Toán làm chung, làm riêng**

**Bài 1.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau $1$ giờ $20$ giờ sẽ đầy bể. Nếu để vòi $1$hảy một mình trong $10$ phút, khóa lại rồi mở tiếp vòi $2$ chảy trong $12$ phút thì cả hai vòi chảy được $\dfrac{2}{15}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảu một mình đầy bể ?

**Bài 2.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ làm chung và dự kiến hoàn thành sau 6 giờ. Trên thực tế, sau 2 giờ hai tổ làm chung, tổ II bị điều đi làm việc khác, tổ I hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

**Bài 3.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình mà đầy bể?

**Dạng 2.3: Toán chuyển động**

**Bài 1.** Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến nơi sơm hơn dự định 3 giờ; còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB?

**Bài 2.** Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108km và ngược dòng 63km. Một lần khác cũng trong 7 giờ ca nô xuôi dòng 81km và ngược dòng 84km.Tính vận tốc nước chảy và vận tốc canô lúc nước yên lặng?

**Bài 3.** Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường đường dài 640km. Hỏi vận tốc của tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5km?

**Bài 4.** Hai người khách du lịch xuất phát đồng thời từ hai thành phố cách nhau $38km$. Họ đi ngược chiều và gặp nhau sau $4$ giờ. Hỏi vận tốc của mỗi người, biết rằng đến khi gặp nhau, người thứ nhất đi được nhiều hơn người thứ hai $2km$.

**Dạng 2.4. Toán liên quan tới yếu tố hình học**

**Bài 1.** Một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm $2m$ và tăng chiều rộng $3m$ thì diện tích tăng $100m^2$. Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2m$ thì diện tích giảm $68m^2$. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

**Bài 2.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $720m^2$, nếu tăng chiều dài thêm $6m$ và giảm chiều rộng đi $4m$ thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

**Bài 3.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $90m$. Nếu giảm chiều rộng đi $4m$ và giảm chiều dài $20\%$ thì chu vi mảnh đất giảm đi $18m$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu?

**Bài 4.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $28m$ và độ dài đường chéo bằng $10m$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

**Dạng 2.5. Toán phần trăm**

**Câu 1.** Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Trên thực tế, xí nghiệp 1 vượt mức 12%, xí nghiệp 2 vượt mức 10% do đó cả hai xí nghiệp làm tổng cộng 400 dụng cụ. Tính số dụng cụ của mỗi xí nghiệp phải làm.

**Câu 2.** Hai trường A, B có 210 học sinh thi đỗ vào lớp 10 đạt tỉ lệ trúng tuyển 84%. Biết số học sinh đỗ của trường A chiếm 80%, số học sinh đỗ của trường B chiếm 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

**Câu 3.** Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ 2, tổ 1 vượt mức 25%, tổ 2 giảm mức 18% nên trong tuần này cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ quần áo. Hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu bộ quần áo?

**Dạng 3. Hàm số $y=ax^2\,(a\neq 0)$. Phương trình bậc hai một ẩn**

**Câu 1.** Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là Parabol $(P)$ và hàm số $y=x+2$ có đồ thị là đường thẳng $(d)$.

a) Chứng minh $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Hãy xác định tọa độ các giao điểm $A,B$ của $(P)$ và $(d)$.

c) Tính diện tích của tam giác $OAB$ ($O$ là gốc tọa độ).

**Bài 2:** Cho hàm số $y=ax^2\,(a\neq 0)$ có đồ thị là Parabol (P)

a) Xác định $a$ biết Parabol (P) đi qua điểm $M(-1;1)$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y=ax^2$ với $a$ vừa tìm được ở câu trên.

c) Cho đường thẳng $(d): y=2x+3$. Tìm tọa độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ với hệ số $a$ tìm được.

d) Tính diện tích tam giác $AOB$ với $A,B$ là các giao điểm của $(d)$ và $(P)$

**Bài 3:** Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị là Parabol $(P)$ và hàm số $y=x-2$ có đồ thị là đường thẳng $(d)$. Gọi $A,B$ là giao điểm của $(d)$ và $(P)$. Tính diện tích tam giác $AOB$

**Bài 4:** Cho hàm số $y=ax^2\,(a\neq 0)$ có đồ thị là Parabol (P) và đường thẳng $(d): y=-2x+3$

a) Xác định hệ số $a$ biết rằng $(P)$ đi qua điểm $(-2;4)$

b) Gọi $A,B$ là hai giao điểm của $(P),(d)$, $H,K$ lần lượt là hình chiếu của $A,B$ trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác $AHKB$.

**Câu 5.** Giải phương trình bậc hai

a) $2x^2-3x-5=0$ b) $x^2-6x+8=0$

c) $9x^2-12x+4=0$ d) $-3x^2+4x-4=0$

**Câu 6.** Cho phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-3=0$ ($m$ là tham số)

a) Giải phương trình với $m=2$.

b) Tìm điều kiện của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

**Câu 7.** Cho phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-m-6=0$ ($m$ là tham số)

a) Giải phương trình với $m=-5$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của $m$.

**Câu 8.** Cho phương trình $mx^2-2(m-1)x+m-3=0$ ($m$ là tham số).

Tìm các giá trị của $m$ để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm d) Có nghiệm.

**Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+3$.

a) Chứng tỏ $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tọa độ các giao điểm $A,B$ của Parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ khi $m=2$. Tính diện tích $\Delta AOB$.

**Dạng 4: Góc với đường tròn.**

**Câu 1.** Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm $A$ cố định ngoài đường tròn. Qua $A$ kẻ hai tiếp tuyến $AM,AN$ tới đường tròn ($M,N$ là hai tiếp điểm). Một đường thẳng $d$ đi qua $A$ cắt đường tròn $(O;R)$ tại $B$ và $C$ $(AB<AC)$. Gọi $I$ là trung điểm $BC$.

a) Chứng minh năm điểm $A,M,N,O,I$ thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AM^2=AB.AC$.

c) Đường thẳng qua $B$ song song với $AM$ cắt $MN$ tại $E$. Chứng minh $IE//MC$.

d) Chứng minh khi $d$ thay đổi quay quanh điểm $A$ thì trọng tâm $G$ của tam giác $MBC$ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và điểm $M$ thuộc cạnh $AC$. Vẽ đường tròn tâm $O$ đường kính $MC$ cắt $BC$ tại $E$. Nối $BM$ cắt đường tròn $(O)$ tại $N$, $AN$ cắt đường tròn $(O)$ tại $D$. Lấy $I$ đối xứng với $M$ qua $A$, $K$ đối xứng với $M$ qua $E$.

a) Chứng minh $BANC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CA$ là tia phân giác của $\widehat{BCD}$.

c) Chứng minh $ABED$ là hình thang.

d) Tìm vị trí $M$ để đường tròn ngoại tiếp tam giác $BIK$ có bán kính nhỏ nhất.

**Câu 4.** Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn điều kiện $xy=1$ và $x>y$. Chứng minh rằng $A=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}$

**Câu 5.** Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\dfrac{y}{\sqrt{y^2+3}}+\dfrac{z}{\sqrt{z^2+3}}$

**HẾT**

**UBND QUẬN HÀ ĐÔNG**

**TRƯỜNG THCS VĂN YÊN**

# ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ II

**NĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN 9**

**Dạng 1.1: Giải các hệ phương trình sau**

1) $\begin{cases}x-4y=3\\2x-y=4\end{cases}$.

2) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{4}\\\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}+1\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x+1)(y-1)=xy-1\\(x-3)(y-3)=xy-3\end{cases}$

4) $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3\\\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{y+5}=-5\end{cases}$

5) $\begin{cases}|x+5|-\dfrac{2}{\sqrt{y-2}}=4\\|x+5|+\dfrac{1}{\sqrt{y-2}}=3\end{cases}$

6) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2x+1}-\dfrac{y-2}{y+2}=1\\\dfrac{3x-3}{2x+1}+\dfrac{2y-4}{y+2}=3\end{cases}$

7) $\begin{cases}2(x+2)-3(x-3y)=4\\3(x+2)+(x-3y)=6\end{cases}$

8) $\begin{cases}2(x+y)+\sqrt{x+2}=7\\5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}$

9) $\begin{cases}2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=4\\6\sqrt{x-1}-2\sqrt{y+2}=2\end{cases}$

10) $\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|1-2y|}=3\end{cases}$

11) $\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}-2\sqrt{y+1}=3\\\dfrac{2x}{\sqrt{2x+3}}+\sqrt{y+1}=4\end{cases}$

12) $\begin{cases}\dfrac{2y-5x}{3}+5=\dfrac{y+27}{4}-2x\\\dfrac{x+1}{3}+y=\dfrac{6y-5x}{7}\end{cases}$

**Lời giải**

1) $\begin{cases} x-4y=3 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8y=6 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ -7y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\dfrac{2}{7}=4 \\ y=\dfrac{-2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{7} \\ y=\dfrac{-2}{7} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{-2}{7}\right)$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{4} \\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)=x-y \\ 5x=3y+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-x+y=0 \\ 5x-3y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ 5x-3y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ 6x=15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{15}{6} \\ \dfrac{15}{6}+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{-5}{6} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{-5}{6}\right)$.

3) $\begin{cases} (x+1)(y-1)=xy-1 \\ (x-3)(y-3)=xy-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-x+y-1=xy-1 \\ xy-3x-3y+9=xy-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -3x-3y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ -3x-3x=-12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ -3x-3x=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ -6x=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(2;2)$.

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3 \\ \dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{y+5}=-5 \end{cases}$

Điều kiện $x\neq\dfrac{1}{2}; y\neq -5$

$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3 \\ \dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{y+5}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3 \\ \dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{4}{y+5}=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3 \\ \dfrac{7}{2x-1}=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=-1 \\ \dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -1+\dfrac{4}{y+5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{4}{y+5}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{(thoả mãn)} \\ y=-4 \text{(thoả mãn)} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0;-4)$.

5) $\begin{cases} |x+5|-\dfrac{2}{\sqrt{y}-2}=4 \\ |x+5|+\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}=3 \end{cases}$ Điều kiện $y \ge 0; y \ne 4$

$\begin{cases} |x+5|-\dfrac{2}{\sqrt{y}-2}=4 \\ |x+5|+\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+5|+\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}=3 \\ \dfrac{-3}{\sqrt{y}-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+5|+\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}=3 \\ \sqrt{y}-2=\dfrac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+5|+\dfrac{1}{\frac{5}{3}-2}=3 \\ y=\dfrac{25}{9} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+5|-3=3 \\ y=\dfrac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+5|=9 \\ y=\dfrac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-14 \end{array}\right. \\ y=\dfrac{25}{9}\left(\text{thoa man}\right) \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y) \in \left\{\left(4;\dfrac{25}{9}\right),\left(-14;\dfrac{25}{9}\right)\right\}$.

6) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1}-\dfrac{y-2}{y+2}=1 \\ \dfrac{3x-3}{2x+1}+\dfrac{2y-4}{y+2}=3 \end{cases}$ Điều kiện $x \ne \dfrac{-1}{2}; y \ne -2$

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1}-\dfrac{y-2}{y+2}=1 \\ \dfrac{3x-3}{2x+1}+\dfrac{2y-4}{y+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1}-\dfrac{y-2}{y+2}=1 \\ \dfrac{3(x-1)}{2x+1}+\dfrac{2(y-2)}{y+2}=3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{x-1}{2x+1} \\ b=\dfrac{y-2}{y+2} \end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a-b=1 \\ 3a+2b=3 \end{cases}$

$\begin{cases} a-b=1 \\ 3a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b=3 \\ 3a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ 5b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1}=1 \\ \dfrac{y-2}{y+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=x-1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\left(\text{thoa man}\right) \\ y=2\left(\text{thoa man}\right) \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(-2;2)$.

$$7)\begin{cases}2(x+2)-3(x-3y)=4\\3(x+2)+(x-3y)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x+2)-3(x-3y)=4\\9(x+2)+3(x-3y)=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11(x+2)=22\\3(x+2)+(x-3y)=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=2\\3(x+2)+(x-3y)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\3.2-3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0;0)$.

$$8)\begin{cases}2(x+y)+\sqrt{x+2}=7\\5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}$$ Điều kiện $x\ge -2$

$$\begin{cases}2(x+y)+\sqrt{x+2}=7\\5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x+y)+2\sqrt{x+2}=14\\5(x+y)-2\sqrt{x+2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9(x+y)=18\\2(x+y)+\sqrt{x+2}=7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\2.2+\sqrt{x+2}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\\sqrt{x+2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7(\text{thoa man})\\y=-5\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(7;-5)$.

$$9)\begin{cases}2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=4\\6\sqrt{x-1}-2\sqrt{y+2}=2\end{cases}$$ Điều kiện $x\ge 1; y\ge -2$

$$\begin{cases}2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=4\\6\sqrt{x-1}-2\sqrt{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\sqrt{x-1}+2\sqrt{y+2}=8\\6\sqrt{x-1}-2\sqrt{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10\sqrt{x-1}=10\\2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\2+\sqrt{y+2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\\sqrt{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(\text{thoa man})\\y=2(\text{thoa man})\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(2;2)$.

$$10)\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|1-2y|}=3\end{cases}$$ Điều kiện $x\ge 0; x\ne 9; y\ne \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|1-2y|}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=5\\\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}=2\\\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-3=\dfrac{4}{2}=2\\\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{1}{|2y-1|}=3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10 \\ \dfrac{4}{5-3}-\dfrac{1}{|2y-1|}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ \dfrac{1}{|2y-1|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ |2y-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10\,(\text{thoa man}) \\ \left[\begin{array}{l} y=1\,(\text{thoa man}) \\ y=-1\,(\text{thoa man}) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)\in\{(10;1),(10;-1)\}$.

11) $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}-2\sqrt{y+1}=3 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{2x+3}}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$ Điều kiện $x>\dfrac{-3}{2}; y\ge -1$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}-2\sqrt{y+1}=3 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{2x+3}}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{2x+3}}-4\sqrt{y+1}=6 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{2x+3}}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}-2\sqrt{y+1}=3 \\ -5\sqrt{y+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}-2\sqrt{y+1}=3 \\ \sqrt{y+1}=\dfrac{-2}{5}\,(\text{vo ly}) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

12) $\begin{cases} \dfrac{2y-5x}{3}+5=\dfrac{y+27}{4}-2x \\ \dfrac{x+1}{3}+y=\dfrac{6y-5x}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2y-5x)+60=3(y+27)-24x \\ 7(x+1)+21y=3(6y-5x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y-20x+60=3y+81-24x \\ 7x+7+21y=18y-15x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=21 \\ 22x+3y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+15y=63 \\ 110x+15y=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 98x=-98 \\ 4x+5y=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(-1;5)$.

**Dạng 1.2: Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước.**

**Bài 3.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+my=2m-1 \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

b) Chứng minh hệ PT có nghiệm duy nhất với mọi $m$.

c) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình, tìm hệ thức liên hệ giữa $x$, $y$ không phụ thuộc vào $m$.

d) Gọi $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm $m$ để

i) $\sqrt{2x+1}=y$

ii) $|x|=2|y|$

iii) Biểu thức $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

iv) $x-y<0$

**Lời giải**

Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x+my=2m-1\\ mx-y=m^2-2\end{cases}\quad (I)$

a) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

Thay $m=1$ vào hệ $(I)$ ta được

$$\begin{cases}(1+1)x+1.y=2.1-1\\ 1.x-y=1^2-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\ x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=0\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$

Vậy với $m=1$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$.

b) Chứng minh hệ PT có nghiệm duy nhất với mọi $m$.

$$\begin{cases}(m+1)x+my=2m-1\\ mx-y=m^2-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=mx-m^2+2\\ (m+1)x+m\left(mx-m^2+2\right)=2m-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m+1\right)x+m^2x-m^3+2m=2m-1\\ y=mx-m^2+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m^2+m+1\right)x=m^3-2m+2m-1\\ y=mx-m^2+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m^2+m+1\right)x=m^3-1\\ y=mx-m^2+2\end{cases}$$ (vì $m^2+m+1>0$ với mọi $m$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=m-1\\ y=m\left(m-1\right)-m^2+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=m-1\\ y=-m+2\end{cases}$$

Vậy hệ PT có nghiệm duy nhất với mọi $m$.

c) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình, tìm hệ thức liên hệ giữa $x$, $y$ không phụ thuộc vào $m$.

Với mọi $m$ hệ PT có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=m-1\\ y=-m+2\end{cases}$.

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được: $x+y=1$

Vậy với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình hệ thức liên hệ giữa $x$, $y$ không phụ thuộc vào $m$ là $x+y=1$.

d) Gọi $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm $m$ để

i) $\sqrt{2x+1}=y$

Với mọi $m$ hệ PT có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=m-1\\ y=-m+2\end{cases}$. Thay vào (i) ta được:

$$-m+2=\sqrt{2m-2+1}$$

$\Leftrightarrow -m+2=\sqrt{2m-1}\ (1)$ ĐK $m\ge\frac{1}{2}$.

Với $\frac{1}{2}\le m\le 2$ bình phương hai vế của $(1)$ ta được

$m^2-4m+4=2m-1$

$\Leftrightarrow m^2-6m+5=0$

$\Leftrightarrow m^2-m-5m+5=0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ m-5=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \text{ (Thoả mãn)} \\ m=5 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy với $m=1$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;\ y)$ thỏa mãn $\sqrt{2x+1}=y$.

ii) $|x|=2|y|$

Với mọi $m$ hệ PT có nghiệm duy nhất $\left\{\begin{array}{l} x=m-1 \\ y=-m+2 \end{array}\right.$. Thay vào (ii) ta được:

$|m-1|=2|-m+2|$

$\Leftrightarrow (m-1)^2=(-2m+4)^2$

$\Leftrightarrow (m-1)^2-(-2m+4)^2=0$

$\Leftrightarrow (m-1-2m+4)(m-1+2m-4)=0$

$\Leftrightarrow (-m+3)(3m-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m+3=0 \\ 3m-5=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\frac{5}{3} \end{array}\right.$

Vậy với $m=3$ hoặc $m=\frac{5}{3}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;\ y)$ thỏa mãn $\sqrt{2x+1}=y$.

iii) Biểu thức $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Với mọi $m$ hệ PT có nghiệm duy nhất $\left\{\begin{array}{l} x=m-1 \\ y=-m+2 \end{array}\right.$. Thay vào $P$ ta được:

$P=(m-1)(-m+2)=-m^2+m+2m-2$

$=-m^2+3m-2=-\left(m^2-2.\frac{3}{2}m+\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{4}=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

Ta có $-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$ với mọi $m$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow m-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$.

Vậy với $m=\frac{3}{2}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;\ y)$ thỏa mãn $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$.

iv) $x-y<0$

Với mọi $m$ hệ PT có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=m-1\\y=-m+2\end{cases}$. Thay vào (iv) ta được:

$m-1-(-m+2)<0$

$\Leftrightarrow m-1+m-2<0$

$\Leftrightarrow 2m-3<0$

$\Leftrightarrow 2m<3$

$\Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$

Vậy với $m<\frac{3}{2}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;\ y)$ thỏa mãn $x-y<0$.

**Bài 4.** Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx+4y=m+2\\x+my=m\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=-3$

b) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất hệ phương trình, tìm hệ thức $x;y$ không phụ thuộc vào $m$.

c) Gọi $(x,y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm $m$ để

i) $x^2+y^2=2$

ii) $|1-x|+y=3$

iii) Biểu thức $P=x-2y^2$ đạt giá trị lớn nhất

iv) $x+y=\frac{2m}{m-4}$

**Lời giải**

a) Giải hệ phương trình với $m=-3$

Thay $m=-3$ vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases}-3x+4y=-1\\x-3y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+4y=-1\\3x-9y=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+4y=-1\\-5y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x-3.2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=3\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;2)$

b) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất hệ phương trình, tìm hệ thức $x;y$ không phụ thuộc vào $m$.

Ta có: $\begin{cases} mx+4y=m+2 \\ x+my=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m-my \quad (1) \\ m.(m-my)+4y=m+2 \quad (2) \end{cases}$

Xét phương trình $(2)$:

$m.(m-my)+4y=m+2 \Leftrightarrow m^2-m^2y+4y=m+2$

$\Leftrightarrow (m^2-4)y=m^2-m-2$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

$(m^2-4)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$

Khi đó, $y=\dfrac{m+1}{m+2}$

Thay $y=\dfrac{m+1}{m+2}$ vào $(1)$ ta được: $x=m-\dfrac{m.(m+1)}{m+2}=\dfrac{m}{m+2}$

Vậy $\begin{cases} x=\dfrac{m}{m+2} \\ y=\dfrac{m+1}{m+2} \end{cases}$

Ta có: $2y-x=\dfrac{2.(m+1)}{m+2}-\dfrac{m}{m+2}=1$

Vậy hệ thức liên hệ giữa $x;y$ không phụ thuộc vào m là: $2y-x=1$.

c) Gọi $(x,y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm $m$ để

i) $x^2+y^2=2$

ii) $|1-x|+y=3$

iii) Biểu thức $P=x-2y^2$ đạt giá trị lớn nhất

iv) $x+y=\dfrac{2m}{m-4}$

i) $x^2+y^2=2$

Ta có: $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{(m+2)^2}+\dfrac{(m+1)^2}{(m+2)^2}=2 \Leftrightarrow \dfrac{2m^2+2m+1}{(m+2)^2}=2 \Leftrightarrow 2m^2+2m+1=2.(m+2)^2$

$\Leftrightarrow -6m=7 \Leftrightarrow m=\dfrac{-7}{6}$

ii) $|1-x|+y=3 \Leftrightarrow \left|1-\dfrac{m}{m+2}\right|+\dfrac{m+1}{m+2}=3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2}{m+2}\right|+\dfrac{m+1}{m+2}=3$ (*)

TH1: nếu $m>-2$

PT (*) trở thành: $\frac{2}{m+2}+\frac{m+1}{m+2}=3\Leftrightarrow\frac{m+3}{m+2}=3\Leftrightarrow m+3=3m+6\Leftrightarrow 2m=-3\Leftrightarrow m=\frac{-3}{2}(tm)$

TH1: nếu $m<-2$

PT (*) trở thành: $\frac{-2}{m+2}+\frac{m+1}{m+2}=3\Leftrightarrow\frac{m-1}{m+2}=3\Leftrightarrow m-1=3m+6\Leftrightarrow 2m=-7\Leftrightarrow m=\frac{-7}{2}(tm)$

Vậy $m=\frac{-7}{2}$ hoặc $m=\frac{-3}{2}$

iii) Biểu thức $P=x-2y^2$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có: vì $2y-x=1\Rightarrow x=2y-1$

Thay $x=2y-1$ vào $P=x-2y^2$ ta được $P=(2y-1)-y^2=2y-1-y^2=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{2}$

Suy ra, GTLN của $P=\frac{-1}{2}$ khi $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\frac{m+1}{m+2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2.(m+1)=m+2\Leftrightarrow m=0$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

iv) $x+y=\frac{2m}{m-4}$

$x+y=\frac{2m}{m-4}\Leftrightarrow\frac{m}{m+2}+\frac{m+1}{m+2}=\frac{2m}{m-4}$

$\Leftrightarrow\frac{2m+1}{m+2}=\frac{2m}{m-4}$

$\Leftrightarrow(2m+1).(m-4)=2m.(m+2)$

$\Leftrightarrow 2m^2-7m-4=2m^2+4m$

$\Leftrightarrow -11m=4$

$\Leftrightarrow m=\frac{-4}{11}$

Vậy $m=\frac{-4}{11}$ là giá trị cần tìm.

**Dạng 2: Giải toán bằng cách lập hệ phương trình**

**Dạng 2.1 : Toán tìm số**

**Bài 1.** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 19 và tổng các bình phương của chúng bằng 185.

**Lời giải:**

Gọi hai số đã cho lần lượt là $a,b(a,b\in N;a,b<19)$

Vì tổng hai số bằng 19 nên ta có phương trình : $a+b=19(1)$

Tổng bình phương của chúng bằng $185$ nên ta có phương trình : $a^2+b^2=185(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}a+b=19\\a^2+b^2=185\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=19-a\\a^2+(19-a)^2=185\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a=8\\b=11\end{cases}(TM)\right.\left.\begin{cases}a=11\\b=8\end{cases}(TM)\right.$$ Vậy....

**Bài 2.** Tìm hai số tự nhiên, biết tổng của chúng là $2216$ và nếu lấy số lớn chia cho $9$ thì được thương là số kia và dư là $56$.

**Lời giải:**

Gọi hai số đã cho lần lượt là $a,b(a,b\in N;a,b<2216)$, giả sử $a>b$

Vì tổng hai số bằng $2216$ nên ta có phương trình : $a+b=2216(1)$

Nếu lấy số lớn chia cho $9$ thì được thương là số kia và dư là $56$, nên ta có phương trình :

$a=9b+56(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}a+b=2216\\a=9b+56\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9b+56+b=2216\\a=9b+56\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2000\\b=216\end{cases}(TM)$$ Vậy....

**Bài 3.** Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng $13$. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là $25$. Tìm số đã cho.

**Lời giải:**

Gọi số có hai số đã cho là $\overline{ab}(a,b\in N;0<a\le 9;0\le b\le 9)$.

Vì tổng hai chữ số bằng $13$ nên ta có phương trình : $a+b=13(1)$

Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là $25$ nên ta có phương trình :

$ab+25=\overline{ab}\Leftrightarrow ab+25=10a+b\Leftrightarrow ab+25=(a+b)+9a(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}a+b=13\\ab+25=(a+b)+9a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=13-a\\a(13-a)+25=13+9a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=13-a\\a^2-4a-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=13-a\\\left[\begin{array}{l}a=6(TM)\\a=-2(KTM)\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=7\end{cases}(tm)$$

Vậy số đã cho là $67$.

**Bài 4.** Tổng ba lần chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là $14$. Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là $18$ đơn vị. Tìm số có hai chữ số đó.

**Lời giải :**

Gọi số có hai chữ số đã cho là $\overline{ab}\left(a,b\in N;0<a;b\le 9\right)$.

Vì tổng ba lần chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là $14$. nên ta có phương trình : $3b+2a=14\left(1\right)$

Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là $18$ đơn vị nên ta có phương trình :

$\overline{ba}+18=\overline{ab}\Leftrightarrow 10b+a+18=10a+b\Leftrightarrow -9a+9b=-18\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}2a+3b=14\\-9a+9b=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}(\text{TM})$$

Vậy số đã cho là $42$.

**Dạng 2.2. Toán làm chung, làm riêng**

**Bài 1.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau $1$ giờ $20$ giờ sẽ đầy bể. Nếu để vòi $1$ chảy một mình trong $10$ phút, khóa lại rồi mở tiếp vòi $2$ chảy trong $12$ phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{2}{15}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể ?

**Lời giải :**

Gọi $x,y\left(h\right)$ lần lượt là thời gian vòi $1$và vòi $2$ chảy một mình đầy bể ( $x;y>\frac{4}{3}$).

Vậy trong mỗi giờ chảy một mình, vòi $1$chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi $2$ chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Đổi $1$ giờ $20$ giờ $=\frac{4}{3}$giờ ; $10$ phút $=\frac{1}{6}$giờ ; $12$ phút $=\frac{1}{5}$giờ.

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau $1$ giờ $20$ giờ sẽ đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{4}{3}.\frac{1}{x}+\frac{4}{3}.\frac{1}{y}=1\left(1\right)$

Nếu để vòi $1$ chảy một mình trong $10$ phút, khóa lại rồi mở tiếp vòi $2$ chảy trong $12$ phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{2}{15}$bể nên ta có phương trình :

$\frac{1}{6}.\frac{1}{x}+\frac{1}{5}.\frac{1}{y}=\frac{2}{15}\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}\frac{4}{3}.\frac{1}{x}+\frac{4}{3}.\frac{1}{y}=1\\\frac{1}{6}.\frac{1}{x}+\frac{1}{5}.\frac{1}{y}=\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\\\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}\left(tm\right)$$

Vậy nếu chảy một mình thì vòi $1$ cần chảy trong $2$ giờ, vòi $2$ cần chảy trong $4$ giờ.

**Bài 2.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ làm chung và dự kiến hoàn thành sau 6 giờ. Trên thực tế, sau 2 giờ hai tổ làm chung, tổ II bị điều đi làm việc khác, tổ I hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

**Lời giải**

Gọi thời gian để tổ 1 làm một mình xong công việc là $x\left(x>6,h\right)$

Thời gian để tổ 2 làm một mình xong công việc là $y\left(y>6,h\right)$

Mỗi giờ tổ 1 làm được $\frac{1}{x}\left(công\ việc\right)$

Mỗi giờ tổ 2 làm được $\frac{1}{y}\left(công\ việc\right)$

Do hai tổ làm chung và dự kiến hoàn thành sau 6 giờ nên mỗi giờ hai tổ làm được $\frac{1}{6}\left(công\ việc\right)$ nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}(1)$$

Do trên thực tế, sau 2 giờ hai tổ làm chung thì làm được $2.\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ công việc thì tổ II bị điều đi làm việc khác, tổ I hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{3}+\frac{10}{x}=1(2)$$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}+\frac{10}{x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{10}{x}=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ x=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{15}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ x=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\\ x=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=15(TM)\\ y=10(TM)\end{cases}$$

Vậy thời gian để tổ 1 làm một mình xong công việc là 15h

Thời gian để tổ 2 làm một mình xong công việc là 10h.

**Bài 3.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình mà đầy bể?

**Lời giải**

Đổi 2 giờ 55 phút $=\frac{35}{12}$h

Gọi thời gian để vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là: $x\left(x>\frac{35}{12},h\right)$

Thời gian để vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là $y\left(y>\frac{35}{12},h\right)$

Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}(bể)$

Mỗi giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}(bể)$

Do hai vòi cùng chảy vào một bể không nước thì sau $\frac{35}{12}h$ đầy bể nên mỗi giờ hai vòi cùng chảy được $\frac{12}{35}$ bể nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{12}{35}(1)$$

Do thời gian để vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2h nên ta có phương trình:

$$y-x=2(2)$$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}y-x=2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{12}{35}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{12}{35}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ \frac{35(x+2)}{35x(x+2)}+\frac{35x}{35x(x+2)}=\frac{12x(x+2)}{35x(x+2)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ 35x+70+35x=12x^2+24x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ 12x^2-46x-70=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ (12x+14).(x-5)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ \left[\begin{array}{l}12x+14=0\\ x-5=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{7}{6}(KTM)\\ x=5(TM)\end{array}\right.\end{cases}\begin{cases}x=5(TM)\\ y=7(TM)\end{cases}$$

Vậy thời gian để vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 5h

Thời gian để vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 7h.

## Dạng 2.3: Toán chuyển động

**Bài 1.** Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến nơi sơm hơn dự định 3 giờ; còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB?

**Lời giải**

Gọi Vận tốc ban đầu của ô tô là: $x(x>0;km/h)$

Thời gian ô tô dự định đi là: $y(y>0,h)$

Độ dài quãng đường AB là: $xy(km)$

Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ nên ta có phương trình:

$$(x+10).(y-3)=xy(1)$$

Nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nới chậm mất 5 giờ nên ta có phương trình:

$$(x-10).(y+5)=xy(2)$$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+10).(y-3)=xy\\(x-10).(y+5)=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-3x+10y-30=xy\\xy+5x-10y-50=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-10y=30\\5x-10y=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10y=3x-30\\5x-(3x-30)=50\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10y=3x-30\\2x=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10y=3x-30\\x=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=9(TM)\\x=40(TM)\end{cases}$$

Vậy :

Vận tốc ban đầu của ô tô là: 40km/h

Thời gian ô tô dự định đi là: 9h

Độ dài quãng đường AB là: $40.9=360(km)$

**Bài 2.** Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108km và ngược dòng 63km. Một lần khác cũng trong 7 giờ ca nô xuôi dòng 81km và ngược dòng 84km.Tính vận tốc nước chảy và vận tốc canô lúc nước yên lặng?

**Lời giải**

Gọi vận tốc ca nô lúc nước yên lặng là: $x(x>y>0;km/h)$

Vận tốc nước chảy là: $y(x>y>0;km/h)$

Vận tốc của ca nô khi đi xuôi dòng là: $x+y(km/h)$

Vận tốc của ca nô khi đi ngược dòng là: $x-y(km/h)$

Trong 7 giờ ca nô đi xuôi dòng 108km và ngược dòng 63km nên ta có phương trình:

$$\frac{108}{x+y}+\frac{63}{x-y}=7(1)$$

Trong 7h ca nô đi xuôi dòng 81km và ngược dòng 84km nên ta có phương trình:

$$\frac{81}{x+y}+\frac{84}{x-y}=7(2)$$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{108}{x+y}+\dfrac{63}{x-y}=7\\\dfrac{81}{x+y}+\dfrac{84}{x-y}=7\end{cases}$$ Điều kiện: $\begin{cases}x\neq y\\x\neq -y\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=\dfrac{1}{x+y}\\b=\dfrac{1}{x-y}\end{cases}(a\neq 0;b\neq 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 108a+63b=7 \\ 81a+84b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 432a+252b=28 \\ 243a+252b=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 189a=7 \\ 81a+84b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{27} \\ 81.\dfrac{1}{27}+84b=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{27}(TM) \\ b=\dfrac{1}{21}(TM) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{27} \\ \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=27 \\ x-y=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=48 \\ x-y=21 \end{cases} \begin{cases} x=24(TM) \\ y=3(TM) \end{cases}$$

Vậy :

Vận tốc ca nô lúc nước yên lặng là: 24km/h

Vận tốc nước chảy là: 3km/h.

**Bài 3.** Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường đường dài 640km. Hỏi vận tốc của tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5km?

**Lời giải**

Gọi :

Vận tốc của tàu hỏa là: $x\left(x>y>0;km/h\right)$

Vận tốc của ô tô là: $y\left(x>y>0;km/h\right)$

Do vận tốc của tàu hỏa nhanh hơn vận tốc của ô tô là 5km/h nên ta có phương trình:

$$x-y=5(1)$$

Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ nên quãng đường là $4x$ km , sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ nên quãng đường đi được là $7y$ km ; mà cả quãng đường dài 640km nên ta có phương trình:

$$7x+4y=640(2)$$

Từ $(1)$ và $(2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y=5 \\ 7x+4y=640 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+5 \\ 7(y+5)+4y=640 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+5 \\ 11y=605 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+5 \\ y=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=60(TM) \\ y=55(TM) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của tàu hỏa là: 60km/h

Vận tốc của ô tô là 55 km/h

**Bài 4**. Hai người khách du lịch xuất phát đồng thời từ hai thành phố cách nhau $38km$. Họ đi ngược chiều và gặp nhau sau $4$ giờ. Hỏi vận tốc của mỗi người, biết rằng đến khi gặp nhau, người thứ nhất đi được nhiều hơn người thứ hai $2km$.

**Lời giải**

Gọi vận tốc người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là $a,b\left(km/h\right)\left(a>b>0\right)$.

Sau $4$ giờ người thứ nhất đi được quãng đường là $4a\left(km\right)$.

Sau $4$ giờ người thứ hai đi được quãng đường là $4b\left(km\right)$.

Vì sau $4$ giờ họ gặp nhau nên $4a+4b=38$ $(1)$.

Đến khi gặp nhau, người thứ nhất đi được nhiều hơn người thứ hai $2km$ nên $4a-4b=2$ $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có:

$$\begin{cases}4a+4b=38\\4a-4b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8a=40\\b=\dfrac{4a-2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=4,5\end{cases}(km/h)(tm)$$

Vậy vận tốc người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là $5km/h$ và $4,5km/h$.

**Dạng 2.4. Toán liên quan tới yếu tố hình học**

**Bài 1.** Một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm $2m$ và tăng chiều rộng $3m$ thì diện tích tăng $100m^2$. Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2m$ thì diện tích giảm $68m^2$. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

**Lời giải**

Gọi chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là $x,y(m)(x>y>2)$.

Nếu tăng chiều dài thêm $2m$ và tăng chiều rộng $3m$ thì diện tích tăng $100m^2$ nên $(x+2)(y+3)-xy=100$ $(1)$.

Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2m$ thì diện tích giảm $68m^2$ nên $xy-(x-2)(y-2)=68$ $(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có:

$$\begin{cases}(x+2)(y+3)-xy=100\\xy-(x-2)(y-2)=68\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+3x+2y+6-xy=100\\xy-(xy-2x-2y+4)=68\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=94\\2x+2y=72\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=22\\y=\dfrac{72-2x}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=22\\y=14\end{cases}(m)(tm)$$

Diện tích hình chữ nhật là: $22.14=308(m^2)$

Vậy diện tích cần tìm là $308m^2$.

**Bài 2.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $720m^2$, nếu tăng chiều dài thêm $6m$ và giảm chiều rộng đi $4m$ thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

**Lời giải**

Gọi chiều dài và chiều rộng mảnh vườn lần lượt là $x,y(m)(x>y>4)$.

Mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $720m^2$ nên $xy=720$ $(1)$.

Nếu tăng chiều dài thêm $6m$ và giảm chiều rộng đi $4m$ thì diện tích mảnh vườn không đổi nên $(x+6)(y-4)-xy=0$ $(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có:

$$\begin{cases}xy=720\\(x+6)(y-4)-xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=720\\-4x+6y-24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{720}{y}\\-2x+3y-12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow-2.\frac{720}{y}+3y-12=0\Leftrightarrow3y^2-12y-1440=0$$

$\Leftrightarrow 3y^2-1728-12y+288=0 \Leftrightarrow 3\left(y^2-576\right)-12\left(y-24\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(y-24\right)\left(y+24\right)-12\left(y-24\right)=0 \Leftrightarrow \left(y-24\right)\left(3y+72-12\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(y-24\right)\left(3y+60\right)=0 \Leftrightarrow y=24$ (vì $3y+60>0\forall y>4$) $\Leftrightarrow x=30$ (TM)

Vậy kích thước của mảnh vườn là $30m$ và $24m$.

**Bài 3.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $90m$. Nếu giảm chiều rộng đi $4m$ và giảm chiều dài $20\%$ thì chu vi mảnh đất giảm đi $18m$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu?

**Lời giải**

Gọi chiều dài và chiều rộng mảnh đất lần lượt là $x,y\left(m\right)\left(45>x>y>4\right)$.

Mảnh đất có chu vi $90m$ nên $2\left(x+y\right)=90 \Leftrightarrow x+y=45$.

Nếu giảm chiều rộng đi $4m$ và giảm chiều dài $20\%$ thì chu vi mảnh đất giảm đi $18m$ nên $2\left(x+y\right)-2\left(80\%x+y-4\right)=18 \Leftrightarrow 0,4x=10 \Leftrightarrow x=25 \Leftrightarrow y=20\left(m\right)\left(tm\right)$.

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh đất ban đầu lần lượt là $25m$ và $20m$.

**Bài 4.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $28m$ và độ dài đường chéo bằng $10m$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

**Lời giải**

Gọi chiều dài và chiều rộng mảnh đất lần lượt là $x,y\left(m\right)\left(y<x<10\right)$.

Mảnh đất có chu vi $28m$ nên $2\left(x+y\right)=28 \Leftrightarrow x+y=14 \Leftrightarrow x=14-y\ \left(1\right)$.

Mảnh đất có độ dài đường chéo bằng $10m$ nên $x^2+y^2=100$ (định lý Pi – ta – go) $\left(2\right)$.

Thay $\left(1\right)$ vào $\left(2\right)$ ta có:

$\left(14-y\right)^2+y^2=100 \Leftrightarrow 2y^2-28y+196=100 \Leftrightarrow y^2-14y+48=0$

$\Leftrightarrow y^2-14y+49=1 \Leftrightarrow \left(y-7\right)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-7=1 \Leftrightarrow y=8 \Leftrightarrow x=6\left(ktm\right) \\ y-7=-1 \Leftrightarrow y=6 \Leftrightarrow x=8\left(tm\right) \end{array}\right.$

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là $8m$ và $6m$.

**Dạng 2.5. Toán phần trăm**

**Câu 10.** Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Trên thực tế, xí nghiệp 1 vượt mức 12%, xí nghiệp 2 vượt mức 10% do đó cả hai xí nghiệp làm tổng cộng 400 dụng cụ. Tính số dụng cụ của mỗi xí nghiệp phải làm.

**Lời giải**

Gọi số dụng cụ của xí nghiệp 1 phải làm theo kế hoạch là $x$ (dụng cụ) ($x\in\mathbb{N}^*$),

số dụng cụ xí nghiệp 2 phải làm theo kế hoạch là $y$ (dụng cụ) ($y\in\mathbb{N}^*$).

Theo bài ra ta có:

Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ nên $x+y=360(1)$.

Trên thực tế, xí nghiệp 1 vượt mức 12%, xí nghiệp 2 vượt mức 10% do đó cả hai xí nghiệp làm tổng cộng 400 dụng cụ nên $x+12\%x+y+10\%y=400\Leftrightarrow 1,12x+1,1y=400(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}x+y=360\\1,12x+1,1y=400\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=200\\y=160\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số dụng cụ của xí nghiệp 1 phải làm theo kế hoạch là 200 dụng cụ, số dụng cụ của xí nghiệp 2 phải làm theo kế hoạch là 160 dụng cụ.

**Câu 11.** Hai trường A, B có 210 học sinh thi đỗ vào lớp 10 đạt tỉ lệ trúng tuyển 84%. Biết số học sinh đỗ của trường A chiếm 80%, số học sinh đỗ của trường B chiếm 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

**Lời giải**

Gọi số học sinh dự thi của trường A là $x$ (em) ($x\in\mathbb{N}^*$),

số học sinh dự thi của trường B là $y$ (em) ($y\in\mathbb{N}^*$).

Theo bài ra ta có:

Hai trường A, B có 210 học sinh thi đỗ vào lớp 10 và số học sinh đỗ của trường A chiếm 80%, số học sinh đỗ của trường B chiếm 90% nên $0,8x+0,9y=210(1)$.

Tỉ lệ trúng tuyển của cả hai trường là 84% nên $(x+y).84\%=210\Leftrightarrow x+y=250(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}0,8x+0,9y=210\\x+y=250\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=150\\y=100\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số học sinh dự thi của trường A là 150 em, số học sinh dự thi của trường B là 100 em.

**Câu 12.** Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ 2, tổ 1 vượt mức 25%, tổ 2 giảm mức 18% nên trong tuần này cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ quần áo. Hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu bộ quần áo?

**Lời giải**

Gọi số bộ quần áo trong tuần đầu tổ 1 sản xuất được là $x$ (bộ) ($x\in\mathbb{N}^*$),

số bộ quần áo trong tuần đầu tổ 2 sản xuất được là $y$ (bộ) ($y\in\mathbb{N}^*$).

Theo bài ra ta có:

Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo nên $x+y=1500(1)$.

Sang tuần thứ 2, tổ 1 vượt mức 25%, tổ 2 giảm mức 18% nên trong tuần này cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ quần áo nên $x+25\%x+y-18\%y=1617\Leftrightarrow 1,25x+0,82y=1617(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}x+y=1500\\1,25x+0,82y=1617\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=900\\y=600\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy trong tuần đầu tổ 1 sản xuất được 900 bộ quần áo, tổ 2 sản xuất được 600 bộ quần áo.

**Dạng 3. Hàm số $y=ax^2\,(a\neq 0)$. Phương trình bậc hai một ẩn**

**Câu 1.** Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là Parabol $(P)$ và hàm số $y=x+2$ có đồ thị là đường thẳng $(d)$.

a) Chứng minh $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Hãy xác định tọa độ các giao điểm $A,B$ của $(P)$ và $(d)$.

c) Tính diện tích của tam giác $OAB$ ($O$ là gốc tọa độ).

**Lời giải**

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $(d)$: $x^2=x+2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\,(1)$.

Ta thấy (1) có $a.c=1.(-2)<0\Rightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt nên $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

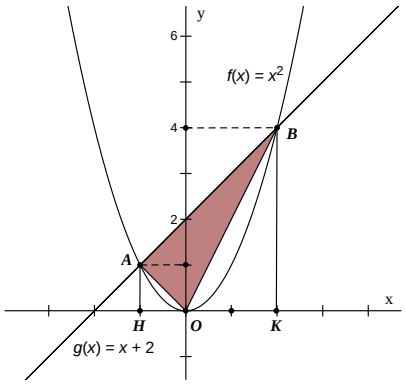
b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $(d)$: $x^2=x+2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\,(1)$.

Ta thấy (1) có $a-b+c=1-(-1)+(-2)=0\Rightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1;x_2=2$.

Với $x_1=-1\Rightarrow y_1=(-1)^2=1;\ x_2=2\Rightarrow y_2=(2)^2=4$.

Vậy $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm là $A(-1;1)$ và $B(2;4)$.

c)




Tam giác $OAB$ ($O$ là gốc tọa độ) có $A(-1;1)$ và $B(2;4)$.

Gọi $H,K$ lần lượt là hình chiếu của $A,B$ lên $Ox$ ta có :

$AH=1;BK=4;OH=1;OK=2;HK=3$.

$$S_{OAB}=S_{AHKB}-S_{OHA}-S_{OKB}=\frac{1}{2}\left((AH+BK).HK-OH.AH-OK.BK\right)$$

$$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}\left((1+4).3-1.1-2.4\right)=3$$ (đơn vị diện tích).

Vậy $S_{OAB}=3$ (đơn vị diện tích).

**Bài 2:** Cho hàm số $y=ax^2\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị là Parabol (P)

a) Xác định $a$ biết Parabol (P) đi qua điểm $M\left(-1;1\right)$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y=ax^2$ với $a$ vừa tìm được ở câu trên.

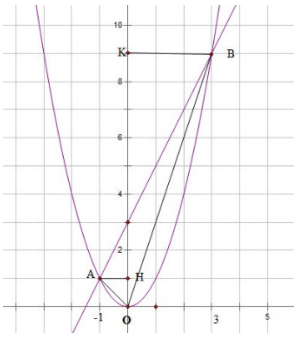
c) Cho đường thẳng $\left(d\right):y=2x+3$. Tìm tọa độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ với hệ số $a$ tìm được.

d) Tính diện tích tam giác $AOB$ với $A,B$ là các giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$

**Lời giải**

a) Parabol (P) đi qua điểm $M\left(-1;1\right)\Rightarrow 1=a.\left(-1\right)^2\Leftrightarrow a=1\Rightarrow\left(P\right):y=x^2$

b) Đồ thị hàm số $y=x^2$




c) Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$ là:

$$x^2=2x+3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow A\left(-1;1\right)\\x=3\Rightarrow y=9\Rightarrow B\left(3;9\right)\end{array}\right.$$

d) Tính diện tích tam giác $AOB$ với $A,B$ là các giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$

Gọi $C$ là giao điểm của đường thẳng $\left(d\right)$ với trục $Ox\Rightarrow C\left(0;3\right)\Rightarrow OC=3$ (đơn vị dài)

Kẻ $AH\perp Oy\Rightarrow H\left(0;1\right)\Rightarrow AH=1$ (đơn vị dài)

Kẻ $BK\perp Oy\Rightarrow K\left(0;9\right)\Rightarrow BK=3$ (đơn vị dài)

Ta có:

$$S_{OAB}=S_{OAC}+S_{OBC}=\frac{1}{2}AH.OC+\frac{1}{2}BK.OC=\frac{1}{2}.1.3+\frac{1}{2}.3.3=6\text{ (đơn vị diện tích)}$$

**Bài 3:** Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị là Parabol $\left(P\right)$ và hàm số $y=x-2$ có đồ thị là đường thẳng $\left(d\right)$. Gọi $A,B$ là giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$. Tính diện tích tam giác $AOB$

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ là:

$$-x^2 = x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A(1;-1) \\ x=-2 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow B(-2;-4) \end{array}\right.$$

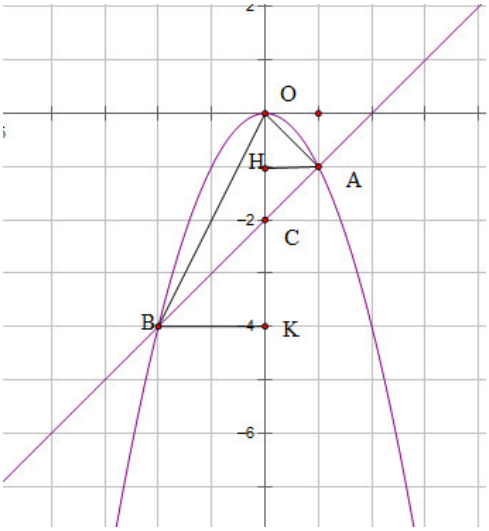
Gọi $C$ là giao điểm của đường thẳng $(d)$ với trục $Ox \Rightarrow C(0;-2) \Rightarrow OC = 2$ (đơn vị dài)

Kẻ $AH \perp Oy \Rightarrow H(0;-1) \Rightarrow AH = 1$ (đơn vị dài)

Kẻ $BK \perp Oy \Rightarrow K(0;-4) \Rightarrow BK = 2$ (đơn vị dài)

Ta có:

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{OBC} = \frac{1}{2}AH.OC + \frac{1}{2}BK.OC = \frac{1}{2}.1.2 + \frac{1}{2}.2.2 = 3 \text{ (đơn vị diện tích)}$$




**Bài 4:** Cho hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ có đồ thị là Parabol (P)và đường thẳng $(d): y = -2x+3$

a) Xác định hệ số $a$ biết rằng $(P)$ đi qua điểm $(-2;4)$

b) Gọi $A, B$ là hai giao điểm của $(P), (d)$, $H, K$ lần lượt là hình chiếu của $A, B$ trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác $AHKB$.

**Lời giải**

a) Xác định hệ số $a$ biết rằng $(P)$ đi qua điểm $(-2;4)$

Vì $(P)$ đi qua điểm $(-2;4) \Rightarrow 4 = a.(-2)^2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow y = x^2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ là:

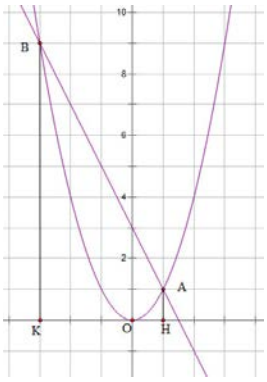
$$x^2=-2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow A(1;1)\\ x=-3\Rightarrow y=9\Rightarrow B(-3;9)\end{array}\right.$$

$H,K$ lần lượt là hình chiếu của $A,B$ trên trục hoành $\Rightarrow H(1;0)\Rightarrow AH=1$ (đơn vị dài)

$K(-3;0)\Rightarrow BK=9$ (đơn vị dài), $HK=4$ (đơn vị dài)

Ta có $AH//BK$ (cùng vuông góc với trục hoành) $\Rightarrow$ tứ giác $AHKB$ là hình thang

Suy ra $S_{AHKB}=\frac{1}{2}(AH+BK).HK=\frac{1}{2}.(1+9).4=20$ (đơn vị diện tích)




**Câu 5.** Giải phương trình bậc hai

a) $2x^2-3x-5=0$

b) $x^2-6x+8=0$

c) $9x^2-12x+4=0$

d) $-3x^2+4x-4=0$

**Lời giải**

a) Vì $a-b+c=2-(-3)+(-5)=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=-1;x_2=\frac{5}{2}$

Vậy: $S=\left\{-1;\frac{5}{2}\right\}$.

b) Ta có: $\Delta'=(-3)^2-1.8=1>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{1}=2$; $x_2=\frac{3+\sqrt{1}}{1}=4$.

Vậy: $S=\{2;4\}$.

c) Ta có: $\Delta'=(-6)^2-9.4=0$ nên phương trình có hai nghiệm kép: $x_1=x_2=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Vậy: $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

d) Ta có: $\Delta'=2^2-(-3)(-4)=-8<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 6.** Cho phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-3=0$ ($m$ là tham số)

a) Giải phương trình với $m=2$.

b) Tìm điều kiện của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

**Lời giải**

a) Với $m=2$ phương trình đã cho trở thành: $3x^2-4x-1=0$.

Ta có: $\Delta'=(-2)^2-3.(-1)=7>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3};\ x_2=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$.

Vậy với $m=2$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x_1=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3};\ x_2=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$.

b) Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq 0\\ m^2-(m+1)(m-3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\ 2m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\ m>-\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

Vậy để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $m>-\dfrac{3}{2}$ và $m\neq -1$.

**Câu 7.** Cho phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-m-6=0$ ($m$ là tham số)

a) Giải phương trình với $m=-5$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của $m$.

**Lời giải**

a) Với $m=-5$ phương trình đã cho trở thành: $x^2+11x+24=0$.

Ta có: $\Delta=(11)^2-4.24=25>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{-11-\sqrt{25}}{2}=-8;\ x_2=\dfrac{-11+\sqrt{25}}{2}=-3$.

Vậy với $m=-5$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x_1=-8;\ x_2=-3$.

b) Ta có $\Delta=(2m-1)^2-4.(m^2-m-6)=25>0$ với mọi giá trị của $m$.

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của $m$.

**Câu 8.** Cho phương trình $mx^2-2(m-1)x+m-3=0$ ($m$ là tham số).

Tìm các giá trị của $m$ để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt

b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm

d) Có nghiệm.

**Lời giải**

Với $m=0$ phương trình trở thành: $2x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Với $m\neq 0$ phương trình đã cho là phương trình bậc hai có: $\Delta'=(m-1)^2-m(m-3)=m+1$.

a) Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-1\end{cases}.$$

Vậy để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $m>-1$ và $m\neq 0$.

b) Để phương trình đã cho có nghiệm kép thì:

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm kép thì $m=-1$.

c) Với $m=0$ phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{3}{2}$.

Với $m \neq 0$ phương trình đã cho vô nghiệm khi: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Vậy để phương trình đã cho vô nghiệm thì $m<-1$.

d) Với $m=0$ phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{3}{2}$.

Với $m \neq 0$ phương trình đã cho có nghiệm khi: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Vì $m=0$ thỏa mãn $m \geq -1$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $m \geq -1$.

**Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+3$.

a) Chứng tỏ $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tọa độ các giao điểm $A, B$ của Parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ khi $m=2$. Tính diện tích $\Delta AOB$.

**Lời giải**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của Parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ là:

$x^2 = mx+3 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3 = 0$.

Ta có: $\Delta = m^2 + 12 > 0$ với mọi giá trị của $m$.

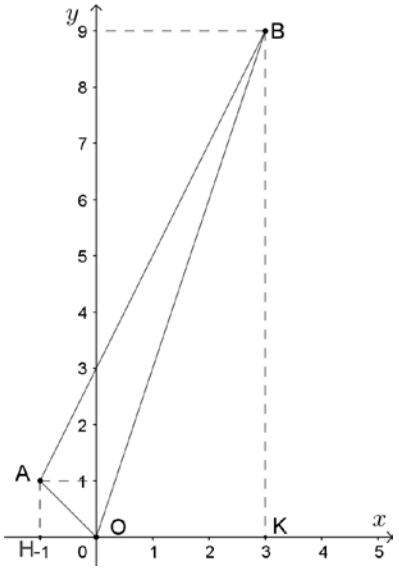
Do vậy phương trình hoành độ giao điểm của Parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ luôn có hai nghệm phân biệt nên $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Khi $m=2$ phương trình hoành độ giao điểm trở thành: $x^2-2x-3=0$.

Vì $a-b+c=1-(-2)+(-3)=0$ nên phương trình có nghiệm là: $x_1=-1; x_2=3$.

Với $x_1=-1 \Rightarrow y_1=x_1^2=1$ ta được $A(-1;1)$.

Với $x_2=3 \Rightarrow y_2=x_2^2=9$ ta được $B(3;9)$.




Ta có: $OH=|-1|=1$; $OK=|3|=3$; $AH=|1|=1$; $BK=|9|=9$.; $HK=HO+OK=1+3=4$

$S_{\Delta AHO}=\frac{1}{2}AH.HO=\frac{1}{2}.1.1=\frac{1}{2}$ (đvdt)

$S_{\Delta BKO}=\frac{1}{2}BK.KO=\frac{1}{2}.9.3=\frac{27}{2}$(đvdt)

$S_{AHBK}=\frac{1}{2}(AH+BK).HK.=\frac{1}{2}.(1+9).4=20$ (đvdt).

Vậy $S_{\Delta AOB}=S_{AHKB}-S_{\Delta AHO}-S_{BKO}=20-\frac{1}{2}-\frac{27}{2}=6$ (đvdt).

**Dạng 4: Góc với đường tròn.**

**Câu 1.** Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm $A$ cố định ngoài đường tròn. Qua $A$ kẻ hai tiếp tuyến $AM,AN$ tới đường tròn ($M,N$ là hai tiếp điểm). Một đường thẳng $d$ đi qua $A$ cắt đường tròn $(O;R)$ tại $B$ và $C$ $(AB<AC)$. Gọi $I$ là trung điểm $BC$.

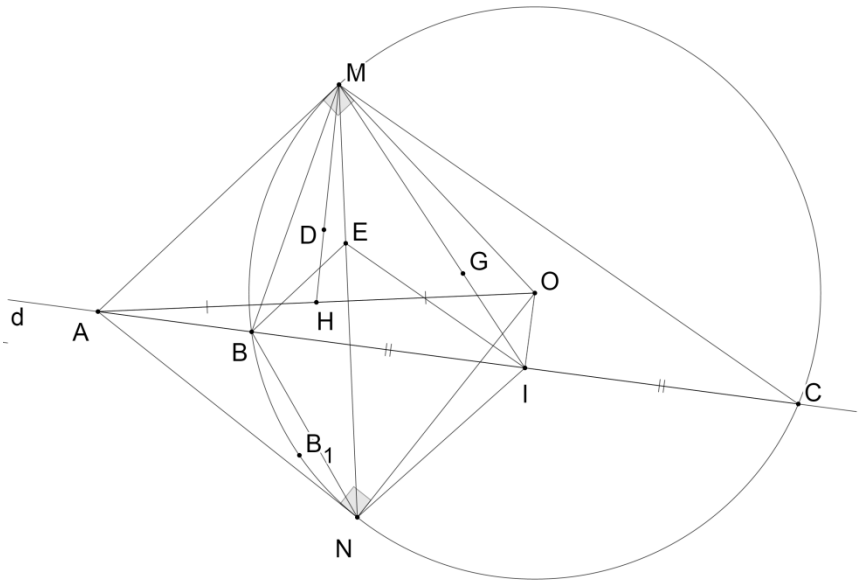
a) Chứng minh năm điểm $A,M,N,O,I$ thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AM^2=AB.AC$.

c) Đường thẳng qua $B$ song song với $AM$ cắt $MN$ tại $E$. Chứng minh $IE//MC$.

d) Chứng minh khi $d$ thay đổi quay quanh điểm $A$ thì trọng tâm $G$ của tam giác $MBC$ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

**Lời giải**




a) Ta có: $\widehat{AMO}+\widehat{ANO}=90°+90°=180°\Rightarrow AMON$ nội tiếp đường tròn (1)

Ta có: $I$ là trung điểm $BC\Rightarrow OI\perp BC\Rightarrow\widehat{AIO}=90°\Rightarrow\widehat{AMO}+\widehat{AIO}=90°+90°=180°$

$\Rightarrow AMOI$ nội tiếp đường tròn (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A,M,N,O,I$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét $\Delta AMB$ và $\Delta ACM$ có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{AMB}=\widehat{MCA}=\frac{1}{2}sđ\widehat{BM}\\ \widehat{BAM}\text{ chung}\end{array}\right\}\Delta AMB\#\Delta ACM$ (g.g) $\Rightarrow\frac{AM}{AC}=\frac{AB}{AM}\Rightarrow AM^2=AB.AC$

c) Ta có: $BE//AM \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{EBI}$ (2 góc đồng vị)

Ta có: $A, M, N, O, I$ cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{MAI} = \widehat{MNI} = \frac{1}{2}\widehat{MI}$

$\Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{ENI} \Rightarrow BEIN$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BEI} + \widehat{BNI} = 180° \Rightarrow \widehat{BEI} = 180° - \widehat{BNI} = 90° \Rightarrow BE \perp EI$

Mà $BE//AM$

$\Rightarrow EI \perp AM$

Mà $AM \perp AC$

$\Rightarrow EI//AM$

d) Gọi $H$ là trung điểm cạnh $OA$, $D$ là trọng tâm $\Delta AOM$

$\Rightarrow \frac{MD}{MH} = \frac{MG}{MI} = \frac{2}{3} \Rightarrow GD//IH \Rightarrow \frac{GD}{IH} = \frac{2}{3}$

Mà $\Delta OAI$ vuông tại $I$, $H$ là trung điểm cạnh $OA \Rightarrow HI = \frac{OA}{2}$

$\Rightarrow GD = \frac{2}{3}HI = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}OA = \frac{OA}{3}$

Mà $\Delta AOM$ cố định nên $D$ cố định, $OA$ cố định

Suy ra $G$ cố định thuộc đường tròn tâm $D$ bán kính $\frac{OA}{3}$.

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và điểm $M$ thuộc cạnh $AC$. Vẽ đường tròn tâm $O$ đường kính $MC$ cắt $BC$ tại $E$. Nối $BM$ cắt đường tròn $(O)$ tại $N$, $AN$ cắt đường tròn $(O)$ tại $D$. Lấy $I$ đối xứng với $M$ qua $A$, $K$ đối xứng với $M$ qua $E$.

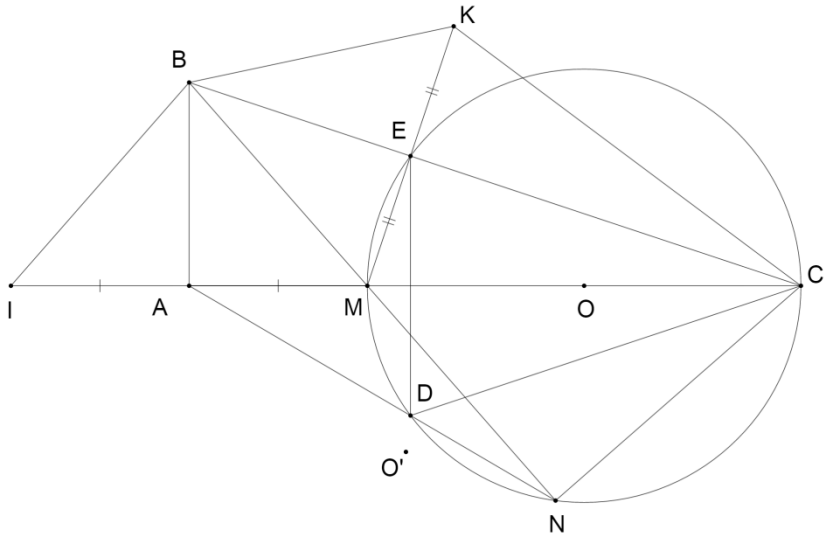
a) Chứng minh $BANC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CA$ là tia phân giác của $\widehat{BCD}$.

c) Chứng minh $ABED$ là hình thang.

d) Tìm vị trí $M$ để đường tròn ngoại tiếp tam giác $BIK$ có bán kính nhỏ nhất.

**Lời giải**




1) Ta có : $\widehat{BAC} = \widehat{BNC} = 90° \Rightarrow BANC$ nội tiếp đường tròn

2) $\left.\begin{array}{l}\widehat{BCA}=\widehat{BNA}=\dfrac{1}{2}\widehat{AB}\\ \widehat{BNA}=\widehat{ACD}=\dfrac{1}{2}\widehat{MD}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{BCA}=\widehat{ACD}\Rightarrow CA$ là tia phân giác của $\widehat{BCD}$

3) Ta có: $\widehat{ABC}+\widehat{ANC}=180^\circ$ ( $BANC$ là tứ giác nội tiếp)

Mà $\widehat{DEC}+\widehat{ANC}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{DEC}\Rightarrow AB//ED\Rightarrow ABED$ là hình thang

4) Ta có: $BC$ là đường trung trực $MK\Rightarrow\begin{cases}\widehat{BMK}=\widehat{BKM}\\ \widehat{KMC}=\widehat{MKC}\end{cases}$

Ta có: $AB$ là đường trung trực $IM\Rightarrow \widehat{BIM}=\widehat{BMI}$

Ta có: $\widehat{BIC}+\widehat{BKC}=\widehat{BMI}+\widehat{BKM}+\widehat{MKC}=\widehat{BMI}+\widehat{BMK}+\widehat{KMC}=180^\circ$

$\Rightarrow BICK$ nội tiếp đường tròn

Gọi $O'$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BIKC$

$\Rightarrow O'$ thuộc đường trung trực của $BC$

$\Rightarrow O'B$ nhỏ nhất khi $O'$ là trung điểm của $BC$

Mà $O'B=O'\text{C}=\text{O'K}$

$\Rightarrow \Delta KBC$ vuông tại $K$

$\Rightarrow \widehat{BKC}=\widehat{BMC}=90^\circ$

$\Rightarrow M\equiv A$

**Bài 4.** Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn điều kiện $xy=1$ và $x>y$. Chứng minh rằng $A=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}$

**Lời giải**

Ta có:

$$A=\frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y}$$

$$=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}$$

$$=x-y+\frac{2xy}{x-y}$$

$$=x-y+\frac{2}{x-y}\ (\text{do } xy=1)$$

Vì $x>y$

$\Rightarrow x-y>0$

$\Rightarrow \frac{2}{x-y} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$x-y+\frac{2}{x-y} \geq 2\sqrt{(x-y).\frac{2}{x-y}}$

$\Rightarrow A \geq 2\sqrt{2}$ (điều phải chứng minh)

**Bài 5.** Cho các số thực dương $x, y, z$ thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+3}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+3}}$

**Lời giải**

Ta có:

$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}$ (do $xy+yz+zx=3$)

$=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+y)+z(y+x)}}$

$=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$

$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+z}}$

$=\sqrt{\frac{x}{x+y}}.\sqrt{\frac{x}{x+z}}$

$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)$ (bất đẳng thức Cauchy)

Tương tự ta có:

$\frac{y}{\sqrt{y^2+3}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z}+\frac{y}{x+y}\right)$

$\frac{z}{\sqrt{z^2+3}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x+z}+\frac{z}{y+z}\right)$

Suy ra:

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{x+z}+\frac{z}{y+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{z}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{y+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{x+y}+\frac{x+z}{x+z}+\frac{y+z}{y+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.3=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Vậy $P_{\max}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$