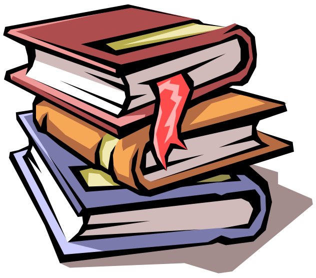
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CÁC CHUYÊN ĐỀ
HÌNH HỌC TOÁN 9

(Liệu hệ tài liệu word môn toán SĐT (zalo) : 039.373.2038

Tài liệu sưu tầm, ngày 27 tháng 5 năm 2022

CHỦ ĐỀ 1: HỆ THỨC LIÊN HỆ TRONG Δ VUÔNG

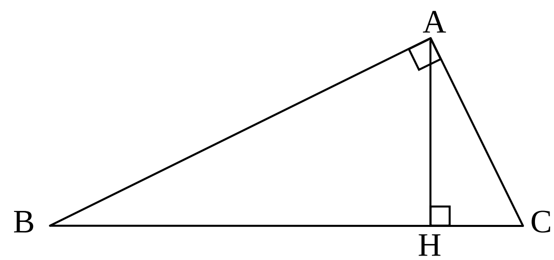
Cạnh góc vuông – Cạnh huyền – Đường cao – Hình chiếu cạnh góc vuông

Cạnh huyền: BC

Cạnh góc vuông AB, có hình chiếu lên cạnh huyền là BH

Cạnh góc vuông AC, có hình chiếu lên cạnh huyền là CH

Đường cao AH.



1/ Hệ thức: Cạnh góc vuông – cạnh huyền (Định lý Pitago).

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

2/ Hệ thức: Cạnh góc vuông – cạnh huyền – hình chiếu của cạnh góc vuông

$AB^2 = BC \,.\, BH$ $\qquad\qquad$ $AC^2 = BC \,.\, CH$

Trong tam giác vuông, bình phương độ dài mỗi cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền.

3/ Hệ thức: Đường cao – hình chiếu của cạnh góc vuông.

$AH^2 = BH \,.\, CH$

Trong tam giác vuông, bình phương độ dài đường cao bằng tích độ dài hình chiếu của hai canh góc vuông lên cạnh huyền.

4/ Hệ thức: Đường cao – cạnh góc vuông.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Trong tam giác vuông, nghịch đảo bình phương độ dài đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

4/ Hệ thức: Đường cao – cạnh góc vuông – cạnh huyền.

$AB \,.\, AC = BC \,.\, AH$

Trong tam giác vuông, tích độ dài hai cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với đường cao tương ứng.

CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: Tính độ dài CẠNH – ĐƯỜNG CAO – HÌNH CHIẾU trong tam giác vuông.

I/ Phương pháp.

Đây là những bài toán chúng ta sẽ tính toán trực tiếp trong một tam giác vuông cho trước. Để giải bài toán này ta làm như sau:

- Xác định bài yêu cầu tính: "cạnh góc vuông" hay "đường cao" hay "hình chiếu của cạnh góc vuông"?

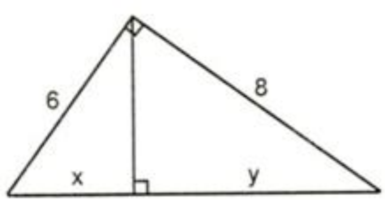
- Kiểm tra bài đã cho dữ kiện nào.

- Xác định hệ thức liên hệ giữa cái đã cho và cái cần tính.

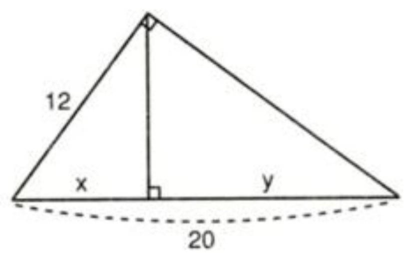
II/ Bài tập vận dụng.

*** Bài tập cho trước hình vẽ:**

Bài 1: (Trang 68 SGK – Toán 9): Tìm x và y trong mỗi hình sau:

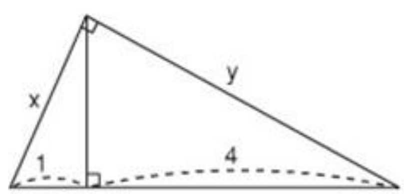


a)

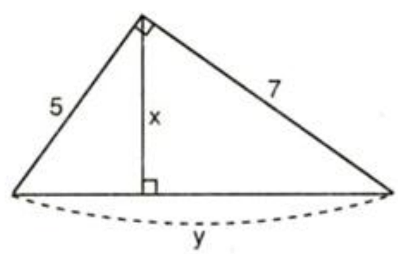


b)

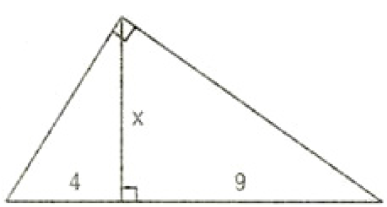
Bài 2: (Trang 68, 69 SGK – Toán 9): Tìm x và y trong hình sau:



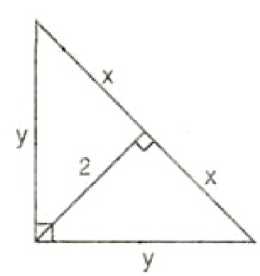
a)



b)



c)



d)

*** Bài tập không cho hình vẽ.**

Bài 3.

a) Biết tỉ số các cạnh góc vuông của một tam giác vuông là 5:6 ; cạnh huyền 122cm. Tính độ dài hình chiếu của mỗi cạnh góc vuông lên cạnh huyền.

a) Biết tỉ số các cạnh góc vuông của một tam giác vuông là 3:7 ; đường cao ứng với cạnh huyền là 12cm. Tính độ dài hình chiếu của mỗi cạnh góc vuông lên cạnh huyền.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết AB = 4cm, AC = 7,5cm. Tính HB, HC.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết AB = 15cm, HC = 16cm. Tính BC, AC, AH.

Bài 6. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết AH = 12cm, BC = 25cm. Tính AB, AC.

Bài 7. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết AB = 6cm, BH = 3cm. Tính AH, AC, CH.

Bài 8. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích ΔABC biết AH = 12cm, BH = 9cm.

Bài 9. Cho tam giác vuông, biết tỉ số giữa các cạnh góc vuông là $\frac{5}{12}$, cạnh huyền là 26. Tính độ dài các cạnh góc vuông và hình chiếu các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Bài 10. Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC}=\frac{5}{7}$. Đường cao AH = 15cm. Tính HB, HC.

Bài 11. Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH, tính chu vi ΔABC biết AH = 14cm, $\frac{HB}{HC}=\frac{1}{4}$.

DẠNG 2: Tam giác vuông liên quan tới các đường: phân giác, trung tuyến, trung trực.

I/ Phương pháp.

- *Trong tam giác vuông, các hệ thức của tam giác vuông vẫn được áp dụng.*

- *Chú ý:*

+ Đường phân giác => Tỉ lệ đoạn thẳng theo tính chất đường phân giác

+ Đường trung tuyến liên quan tới trung điểm

+ Đường trung trực thì liên quan tới vuông góc tại trung điểm.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 12cm, AC = 16cm, phân giác AD, đường cao AH. Tính HD, HB, HC.

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A, phân giác AD, $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}$, BC = 20. Tính AB, AC.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, phân giác AD, gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên AB và AC. Biết BD = 3, DC = 4. Chứng minh ADEF là hình vuông, tính diện tích của nó?

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, góc B > C. Trong góc $\widehat{ABC}$ kẻ tia Bx tạo với BA một góc bằng góc $\widehat{C}$. Tia Bx cắt AC tại M. Gọi E là hình chiếu của M lên BC. Phân giác góc $\widehat{MEC}$ cắt MC tại D. Biết $\frac{MD}{DC} = \frac{3}{4}$ và MC = 15cm.

a) Tính ME, CE.

b) Chứng minh $AB^2 = AM.AC$

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 24, AC = 32. Đường trung trực BC cắt AC, BC theo thứ tự tại D và E. Tính DE?

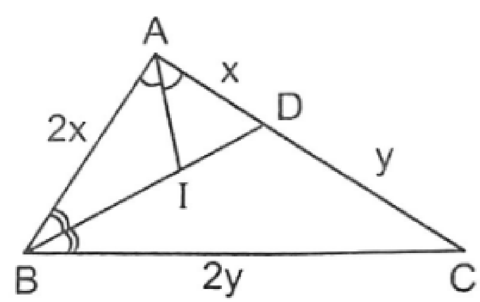
Bài 6. Trong một tam giác vuông tỉ số giữa đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông là 40:41. Tính tỉ số độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó?

Bài 7. Trong một tam giác vuông, phân giác của góc nhọn chia cạnh đối diện thành hai phần tỉ lệ với 4:5 và 3:5. Biết chu vi tam giác bằng 72. Tính các cạnh của tam giác đó?

Bài 8. Trong một tam giác vuông, phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành hai phần có độ dài 1cm và 3cm. Hỏi đường cao tương ứng với cạnh huyền chia cạnh huyền theo tỉ số nào?

Bài 9. Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của góc A cắt BD ở I. Biết IB = $10\sqrt{5}$ cm, ID = $5\sqrt{5}$ cm, tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn



Tính chất phân giác: $\frac{AB}{AD} = \frac{BI}{ID} = 2$; $\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} = 2$

Đặt AD = x, CD = y => AB = 2x ; BC = 2y

Δ_vADB có $BD^2 = AB^2 + AD^2$ => x

Δ_vABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ => y

Từ đó => AB, AB => $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC$

DẠNG 3: Nhận biết tam giác vuông rồi dùng hệ thức tam giác vuông để tính.

I/ Phương pháp.

- Tính bình phương các cạnh của tam giác, nếu tổng bình phương hai cạnh bằng bình phương cạnh còn lại => tam giác đó vuông.

- Áp dụng các hệ thức của tam giác vuông để tính.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho ΔABC biết BC = 7.5cm, AC = 4.5cm, AB = 6cm.

a) ΔABC là tam giác gì? Tính đường cao AH của ΔABC.

b) Tính độ dài các cạnh BH, HC.

Bài 2. Cho ΔABC biết BC = 50cm, AC = 14cm, AB = 48cm. Tính độ dài phân giác góc C?

DẠNG 4: Kết hợp tỉ số đồng dạng và hệ thức lượng để tìm dộ dài đoạn thẳng.

I/ Phương pháp.

- Có thể gọi ẩn độ dài các đoạn thẳng cần tính.

- Từ tam giác đồng dạng => Tỉ số độ dài => liên hệ giữa các ẩn độ dài (1)

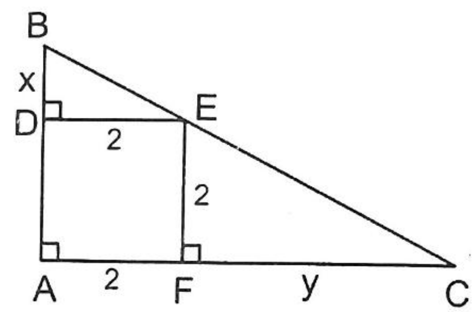
- Từ hệ thức lượng => Liên hệ giữa các ẩn độ dài (2)

- Từ (1) và (2), giải hệ tìm ra các ẩn độ dài.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = $5\sqrt{2}$ cm. Hình vuông ADEF cạnh 2cm có D thuộc AB, E thuộc BC, F thuộc AC. Tính các độ dài AC, AB.

Hướng dẫn



Đặt x = BD, y = FC. ΔBDE ~ ΔEFC => $\frac{x}{2} = \frac{2}{y}$

Lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ => $(2 + x)^2 + (2 + y)^2 = 50$

Từ hai phương trình trên giải tìm được x, y

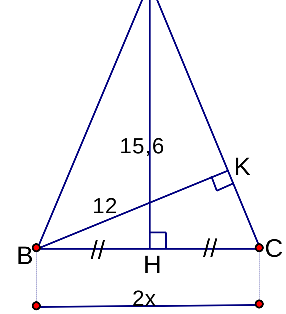
=> AC, AB

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao ứng với cạnh đáy có độ dài 15,6cm, đường cao ứng với cạnh bên dài 12cm. Tính độ dài cạnh đáy BC.

Hướng dẫn

Đặt BC = 2x, từ tính chất của tam giác cân ta suy ra CH = x

Áp dụng định lí Pitago tính được AC = $\sqrt{15,6^2 + x^2}$



Từ ΔKBC $\backsim$ ΔHAC

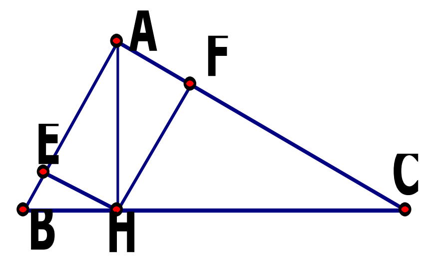
$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{KB}{AH} \text{ hay } \frac{2x}{\sqrt{15,6^2 + x^2}} = \frac{12}{15,6}$$

Đưa về phương trình $15,6^2 + x^2 = 6,76x^2 \Rightarrow x$

Bài 3: Cho ΔABC vuông tại A. Đường cao AH, kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC.

a) Chứng minh $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$

b) Chứng minh BC . BE . CF = AH^3



Hướng dẫn

a) Trong ΔAHB có $HB^2 = BE . BA$ (1) ;

ΔAHC có $HC^2 = CF . CA$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\frac{HB^2}{HC^2} = \frac{BE}{FC} . \frac{AB}{AC}$. (1)

Trong ΔABC có: $AB^2 = BH . BC$ và $AC^2 = HC . BC$

⇨ $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Leftrightarrow \left(\frac{HB}{HC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4$ (2)

Từ (1) và (2). Ta có : $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

b) $\Delta ABC \backsim \Delta EBH \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BC}$.

Thay $BH = \frac{AB^2}{BC} \to BE = \frac{AB^3}{BC^2}$ (3)

Tương tự ta cũng có $CF = \frac{AC^3}{BC^2}$ (4) .

Từ (3) và (4) Ta có : BE .CF = $\frac{AB^3.AC^3}{BC^4}$.

Mà AB. AC = BC . AH nên BC . BE . CF = $\frac{AB^3}{BC^2} \cdot \frac{AC^3}{BC^2} \cdot BC = \left(\frac{AB \cdot AC}{BC}\right)^3$ = AH^3

DẠNG 5: Kẻ thêm đường phụ để tạo yếu tố đặc biệt có liên quan.

I/ Phương pháp.

- Yếu tố đặc biệt thường gặp khi kẻ thêm hình:

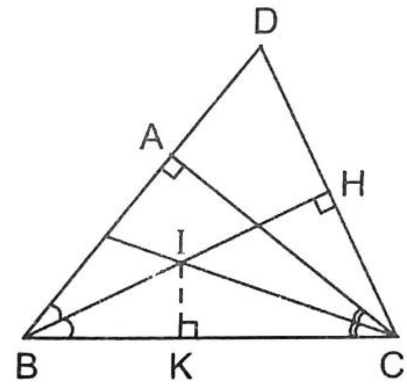
+ Tam giác cân (đều) có chứa cạnh cần tính.

+ Tam giác vuông có chứa cạnh đã biết và cạnh cần tính.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết AB = 5cm, IC = 6cm. Tính độ dài BC.

Bài 2: Tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết IB = $\sqrt{5}$ cm, IC = $\sqrt{10}$ cm. Tính các độ dài AB, AC.



Hướng dẫn bài 1, bài 2 chung một hình vẽ.

Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với BI tại H và cắt AB tại D

Bài 1: Có ΔCBD cân tại B => BC = BD

Góc HIC = góc IBC + góc ICB = 45^o (góc ngoài tại I)

⇨ Tính được HC => Tính được DC = 2HC =

Gọi x = BC = BD => AD = x – 5

Ta có: $AC^2 = x^2 - 25$ và $DC^2 = AD^2 + AC^2$ => x =

Bài 2: Có ΔCBD cân tại B => HC = HD

Góc HIC = góc IBC + góc ICB = 45^o (góc ngoài tại I)

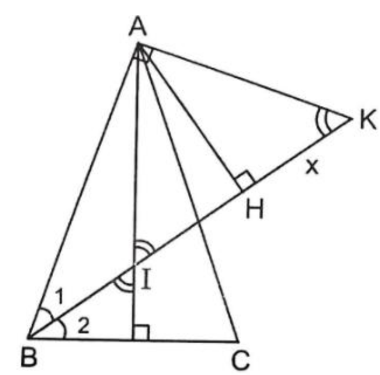
⇨ Tính được HC = HI = HD => Tính được DC = 2HC và BH = IB + HI

ΔDHB ~ ΔDAC => Tính được $\dfrac{DA}{AC}$ => AC theo AD

Có $AC^2 + AD^2 = CD^2$ => AC =

Có $BC^2 = BH^2 + HC^2 = BA^2 + AC^2$ => AB =

Bài 3: Tam giác ABC cân tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác của góc A và góc B. Biết IA = $2\sqrt{5}$ cm, IB = 3cm. Tính độ dài AB.



Hướng dẫn

Ở bài này: Nếu kẻ AH ⊥ phân giác BI tại H thì ΔAHI không phải là Δ cân như bài 1, bài 2 ở trên, Nhưng nếu kẻ đường vuông góc với AB tại A và cắt BI tại K thì ΔIAK cân tại A.

ΔIAK cân tại A => AK = AI = $2\sqrt{5}$

Đặt x = HK => IK = 2HK = 2x => BK = BI + IK = 3 + 2x

$\Delta_v AKB$ có $AK^2 = KH.KB$ => x.(3 + 2x) = 20 => x => BH và BK

$AB^2 = BH.KB =$

DẠNG 6: Các bài toán về tứ giác có dùng hệ thức của tam giác vuông để tính toán, chứng minh.

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD, qua A kẻ đường vuông góc với BD tại H. Biết AB = 20, AH = 12. Tính chu vi hình chữ nhật ABCD.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD, $A = D = 90^o$, AB = 15cm, áp dụng các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O, tính:

a) OB, OD, AC

c) Diện tích hình vuông ABCD.

Bài 3. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết AB = 45cm, cạnh đáy CD = 10cm, BC = 37cm. Tính chiều cao và diện tích hình thang.

Bài 4. Cho hình thang ABCD có chu vi là 52cm, đáy nhỏ AB bằng cạnh bên AD và BC, đáy lớn DC = 22cm. Tính chiều cao hình thang.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Chứng minh: $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$

Bài 6. Cho hình thang ABCD có $B = C = 90^o$. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết AB = $3\sqrt{5}$ cm, HA = 3cm. Chứng minh:

a) HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8

b) $\dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2}$

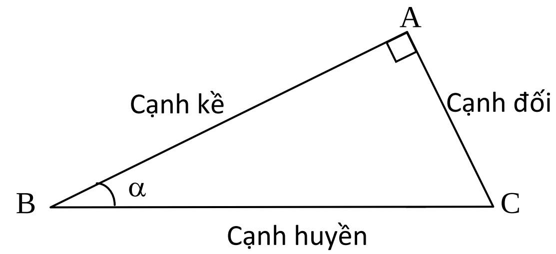
CHỦ ĐỀ 2: TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG.

Xét góc nhọn α trong tam giác vuông ABC

Cạnh AB **kề** với góc α

Cạnh AC **đối** diện góc α

Cạnh **huyền** BC.



1/ Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

***** Có bốn tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông:

$$\sin\alpha = \frac{doi}{huyen} \qquad \cos\alpha = \frac{ke}{huyen}$$

$$tg\alpha = \frac{doi}{ke} \qquad cotg = \frac{ke}{doi}$$

* **Chú ý:**

- Tỉ số lượng giác của góc nhọn luôn dương.

- Muốn có tỉ số lượng giác của góc nhọn α phải tạo ra tam giác vuông chứa góc nhọn α

- Nếu biết một góc nhọn và một cạnh của tam giác vuông sẽ tính được góc nhọn và cạnh còn lại theo tỉ số lượng giác.

2/ Hệ thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác góc nhọn.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$tg\alpha \,.\, cotg\alpha = 1 \qquad cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

GIÁ TRỊ LG GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT

	30^0	45^0	60^0
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3/ Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

***** Gọi α và β là hai góc phụ nhau trong tam giác vuông. Ta có: $\alpha + \beta = 90^o$

$\sin\alpha = \cos\beta$ $\qquad$ $\cos\alpha = \sin\beta$

$tg\alpha = cotg\beta$ $\qquad$ $cotg\alpha = tg\beta$

* **Chú ý**

$1^o = 60'$ $\qquad$ $90^o = 89^o60'$

CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: Tính cạnh và góc nhọn chưa biết trong tam giác vuông.

I/ Phương pháp.

- Nếu biết góc và cần tính cạnh: Xác định cạnh cần tìm là ***cạnh đối*** *hay* ***cạnh kề*** *của góc nhọn hay* ***cạnh huyền*** *từ đó lựa chọn dùng tỉ số lượng giác nào của góc nhọn để tính.*

*- Nếu biết cạnh và cần tính góc: Dùng tỉ số lượng giác của góc nhọn liên quan tới cạnh đã biết (**kề** hoặc **đối** hoặc **huyền**) và góc nhọn cần tính.*

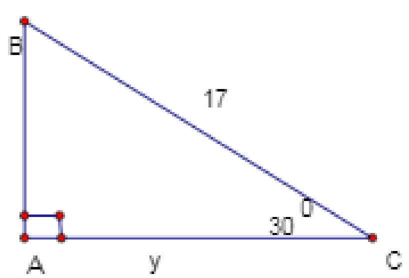
- Có thể vận dụng kết hợp hệ thức liên hệ "cạnh góc vuông, cạnh huyền và đường cao" trong tam giác vuông để tính cạnh.

II/ Bài tập vận dụng.

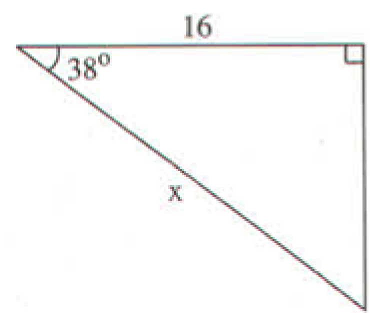
Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Góc B bằng 30^o , BC = 10cm. Hãy tính cạnh AB?

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Góc B bằng α, biết tgα = $\frac{3}{4}$, AB = 8cm. Hãy tính cạnh AC và BC?

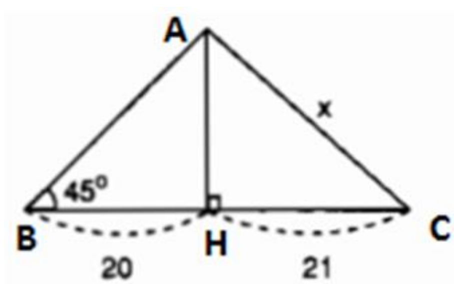
Bài 3: Tính giá trị x ; y trong hình. Biết $tg47^o = 1,072$ và $\cos 38^o = 0,788$.



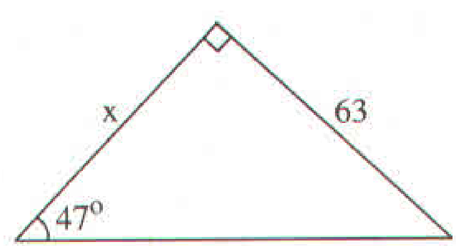
a)



b)



c)



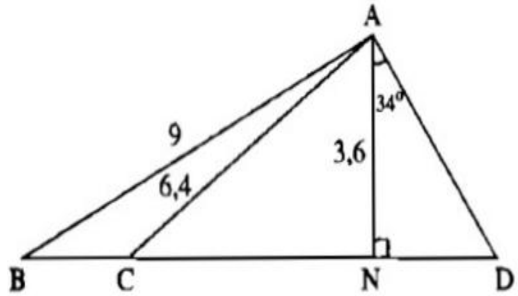
d)

Bài 4: (SBT toán 9 – trang 107) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH. Tính sinB và sinC trong mỗi trường hợp sau:

a) AB = 13 ; BH = 5.

b) BH = 3 ; CH = 4.

Bài 5: (SBT toán 9 – trang 111) Cho hình vẽ. Biết AB = 9cm; AC = 6,4cm ; AN = 36cm ; góc AND bằng 90^o ; góc DAN bằng 34^o. Hãy tính: CN ; góc ABN ; góc CAN và AD?

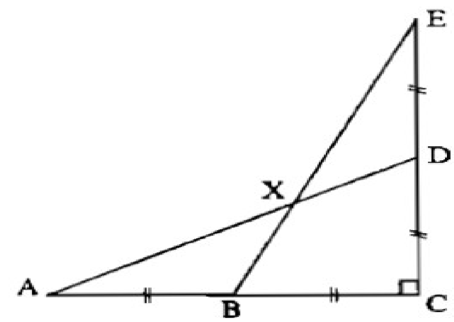


Bài 6: (SBT toán 9 – trang 111) Cho hình vẽ bên. Biết AB = BC = CD = DE = 2cm. Hãy tính:

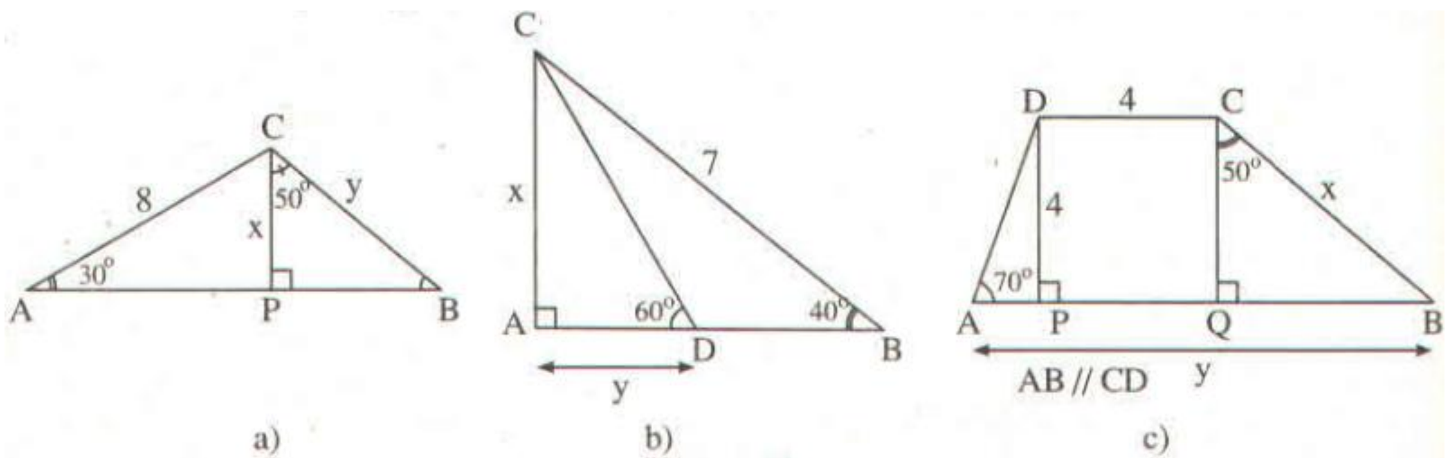
a) AD ; BE

b) góc DAC

c) góc BXD



Bài 7: (SBT toán 9 – trang 114) Tìm x ; y trong các hình sau:



DẠNG 2: Tính cạnh và góc nhọn chưa biết trong tam giác thường.

I/ Phương pháp.

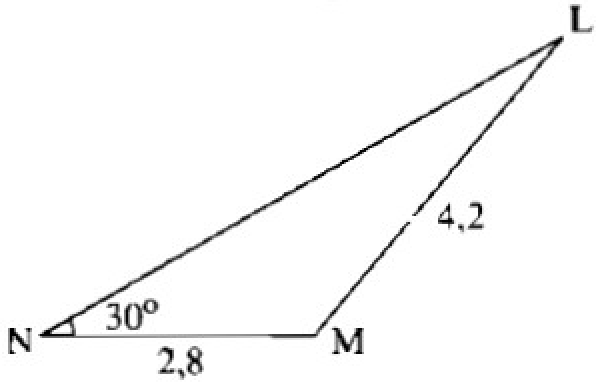
- Nếu tam giác đã cho là tam giác thường, ta phải dựng thêm đường cao của tam giác để có được tam giác vuông.

- Đường cao dựng sao cho tam giác vuông tạo ra phải chứa yếu tố góc nhọn và một cạnh đã biết.

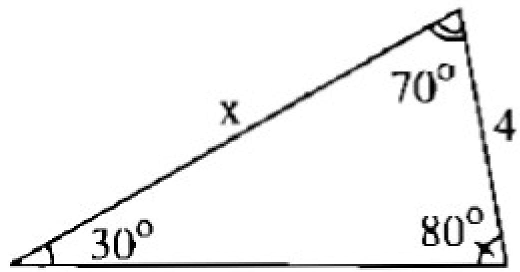
- Áp dụng tỉ số lượng giác góc nhọn tương ứng trong tam giác vuông vừa tạo.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: (SBT toán 9 – trang 108) Tính sinL trong Hình 1 ở dưới. Biết sin30^o = 0,5.



Hình 1



Hình 2

Bài 2: (SBT toán 9 – trang 108). Tính x trong Hình 2 ở trên.

Bài 3: (SBT toán 9 – trang 115) Cho Hình 3. Hãy tính

a) Độ dài cạnh BC

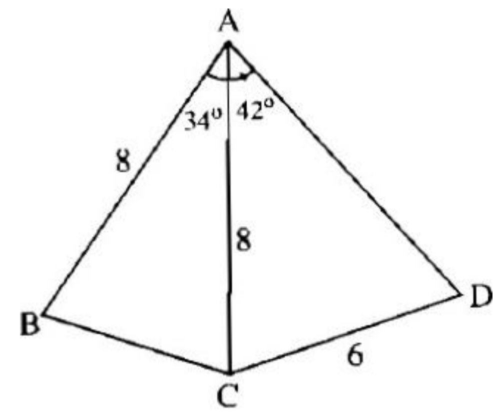
b) góc ADC

c) Khoảng cách từ điểm B đến cạnh AD

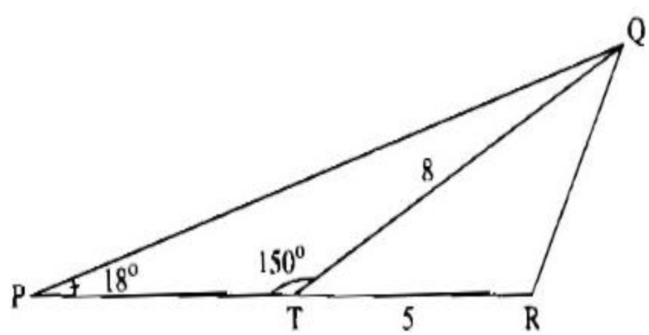
Bài 4: (SBT toán 9 – trang 113) Cho Hình 4. Hãy tính

a) Độ dài cạnh PT

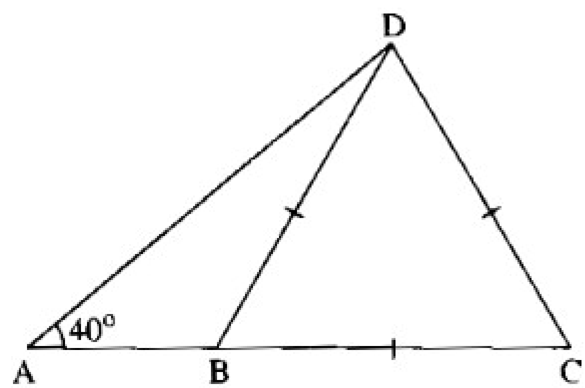
b) Diện tích tam giác PQR



Hình 3



Hình 4



Hình 5

Bài 5: (SBT toán 9 – trang 115). Cho Hình 5, tam giác BCD là tam giác đều cạnh 5cm và góc DAB bằng 40^o. Hãy tính AD và AB.

Bài 6: (SBT toán 9 – trang 115) Cho tam giác ABC có BC = 12cm, góc B bằng 60^o; góc C bằng 40^o. Tính:

a) Đường cao CH và cạnh AC.

b) Diện tích tam giác ABC.

Bài 7: Hình bình hành ABCD có AB = 20cm và BD = 15cm, góc tạo bởi hai cạnh AB và BD là 110^o. Tính diện tích hình bình hành ABCD.

Bài 8: Hình thang cân ABCD (AB // DC). Biết AB = 15cm và DC = 20cm. Góc ở đáy bằng 75^o. Tính diện tích hình thang cân ABCD.

DẠNG 3: Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

I/ Phương pháp.

** Nếu α và β là hai góc phụ nhau ($\alpha + \beta = 90^o$):*

$\sin\alpha = \cos\beta$ $\cos\alpha = \sin\beta$

$tg\alpha = cotg\beta$ $cotg\alpha = tg\beta$

* ***Chú ý:*** $1^o = 60'$ $90^o = 89^o60'$

Ví dụ: Góc $20^o35'$ phụ với góc $69^o25'$ vì $20^o35' + 69^o25' = 89^o60'$

* ***Vận dụng***:

- Xác định tỉ số lượng giác của góc nhọn nhỏ hơn 45^o khi biết tỉ số lượng giác của góc lớn hơn 45^o (hoặc ngược lại).

- Rút gọn (hoặc tính) các biểu thức liên quan tới góc phụ nhau.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Đổi tỉ số lượng giác của các góc nhọn sau đây thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45^o.

$\sin 82^o$; $\cos 47^o$; $\sin 48^o$; $\cos 55^o$; $\sin 47^o20'$; $tg 62^o$; $cotg 82^o45'$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Biết AB = 21cm, AC = 28cm, BC = 35cm.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông;

b) Tính sinB, sinC.

Bài 4: Đơn giản biểu thức: $A = \sin(90^o - x)\sin(180^o - x)$

$$B = \cos(90^o - x)\cos(180^o - x)$$

Bài 5: Tính kết quả của biểu thức

a) $A = \sin^2 10^o + \sin^2 20^o + \sin^2 30^o + \sin^2 80^o + \sin^2 70^o + \sin^2 60^o$.

b) $B = \cos^2 12^o + \cos^2 78^o + \cos^2 1^o + \cos^2 89^o$

c) $C = \sin^2 3^o + \sin^2 15^o + \sin^2 75^o + \sin^2 87^o$.

d) $D = \cos 45^o.\cos^2 23^o + \sin 45^o.\cos^2 67^o$.

e) E = $\frac{\text{tg}64^{o}}{\text{cotg}26^{o}} - 1$

DẠNG 4: Chứng minh đẳng thức. Rút gọn biểu thức theo góc α.

I/ Phương pháp.

Vận dụng các hệ thức liên hệ sau để biến đổi một vế đẳng thức cho bằng vế còn lại (rút gọn biểu thức)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\text{tg}\alpha \,.\, \text{cotg}\alpha = 1$ $\qquad$ $\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

HỆ THỨC MỞ RỘNG:

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha$ $\qquad$ $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \text{cotg}^2\alpha$

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$

b) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x.\cos x$

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

d) $\sin x\cos x(1 + \text{tg}x)(1 + \text{cotg}x) = 1 + 2\sin x \,.\, \cos x$.

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{1+tg\alpha} + \frac{1}{1+\cot g\alpha} = 1$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$

c) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x + 2$

d) $\frac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 1 + 2\text{tg}^2\alpha$

f) Cho α, β là hai góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \sin^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} - \frac{1}{1+tg^2\beta}$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sin^6 x + 3\sin^4 x.\cos^2 x + 3\sin^2 x.\cos^4 x + \cos^6 x$

b) $B = (1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) - \sin^2\alpha$

Bài 4: Đơn giản các biểu thức:

$A = \cos y + \sin y \,.\, \mathrm{tg} y$ $\qquad$ $B = \sqrt{1+\cos b}\,.\,\sqrt{1-\cos b}$

$C = \sin a\sqrt{1+tg^2 a}$

Bài 5: (Nâng cao) Cho các góc α, β nhọn, α < β. Chứng minh rằng:

a) $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$

b) $\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$.

Bài 6: (Nâng cao) Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng:

a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ $\qquad$ b) $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Bài 7: (Nâng cao) Cho tam giác ABC nhọn có ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ (AB = c, BC = a, CA = b).

DẠNG 5: Biết một tỉ số lượng giác của góc α tính các tỉ số lượng giác còn lại.

I/ Phương pháp.

Vận dụng các hệ thức liên hệ sau để biến đổi một vế đẳng thức cho bằng vế còn lại (rút gọn biểu thức)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\mathrm{tg}\alpha \,.\, \mathrm{cotg}\alpha = 1$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

HỆ THỨC MỞ RỘNG:

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$ $\qquad$ $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha$

Chú ý: *Các tỉ số lượng giác góc nhọn luôn dương.*

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Biết rằng sinα = 0,6. Tính cosα và tgα.

Bài 2: Biết rằng cosα = 0,7. Tính sinα và tgα.

Bài 3: Biết rằng tgα = 0,8. Tính sinα và cosα.

Bài 4: Biết cosx = $\frac{1}{2}$, tính P = $3\sin^2x + 4\cos^2x$.

Bài 5:

a) Cho góc nhọn β mà sinβ = $\frac{1}{4}$. Tính cosβ và tgβ.

b) Cho góc α mà cosα = $-\frac{1}{3}$. Tính sinα, tgα và cotgα .

c) Cho tgx = $2\sqrt{2}$. Tính sinx và cosx.

Bài 6: Hãy tính sinα, tgα nếu:

a) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

Bài 7: Biết rằng $\sin 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính tỉ số lượng giác của góc 15^o .

Dạng 6: Tính khoảng cách - Tính chiều cao - Tính diện tích tam giác - Tính độ dài đoạn thẳng - C /m các hệ thức trong tam giác: Bằng cách áp dụng tỉ số LG góc nhọn.

Bài 1: Cho tam giác ABC có AB = 26cm, AC = 25cm, đường cao AH = 24cm. Tính cạnh BC.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân (AB = AC) và đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB và AC lần lượt ở B và C. Từ điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C) kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các đường thẳng BC, CA, AB.

a) Chứng minh các tứ giác MDBF, MBCE nội tiếp.

b) Chứng minh các tam giác DBM và ECM đồng dạng.

c) Cho góc BAC = 60^o và AB = 2, tính bán kính đường tròn tâm O.

Bài 3:

a) Cho tam giác ABC có A nhọn. Chứng minh rằng: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$.

Gợi ý : Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC.

BH = ABsinBAH; $S_{ABC} = \frac{1}{2}$BH.AC.

b) Cho tứ giác ABCD có AC cắt BD tại O và AOB nhọn. Chứng minh rằng:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin AOB$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$

b) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \le \frac{1}{AD^2}$.

Bài 5: Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên là AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết AD = 5a, AC = 12a.

a) Tính $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$

b) Tính chiều cao của hình thang ABCD.

Bài 6: Cho hình thang ABCD. Biết đáy AB = a và CD = 2a ; cạnh bên AD = a, góc A = 90^o

a) Chứng minh tgC = 1 ;

b) Tính tỉ số diện tích tam giác DBC và diện tích hình thang ABCD ;

c) Tính tỉ số diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác DBC.

Bài 7: Gọi AM, BN, CL là ba đường cao của tam giác ABC.

a) Chứng minh: Δ ANL ~ Δ ABC ;

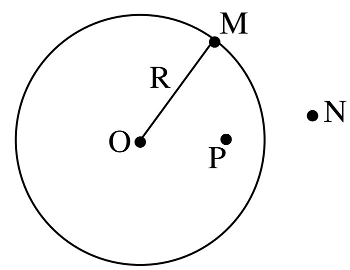
b) Chứng minh: AN.BL.CM = AB.BC.CA.cosAcosBcosC.

CHỦ ĐỀ 3: SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN.

ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN.

I/ SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN.

1. Định nghĩa đường tròn.



* Đường tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R.

* Kí hiệu: (O ; R) hoặc (O).

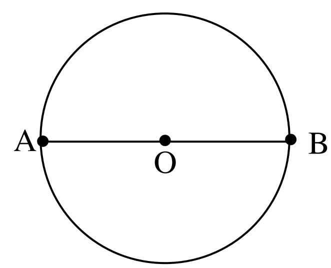
2. Điểm thuộc và không thuộc đường tròn.

* Điểm M ∈ (O ; R) hay M nằm trên đường tròn hay (O) đi qua M ⇔ OM = R.

* Điểm N nằm ngoài đường tròn ⇔ ON > R

* Điểm P nằm trong đường tròn ⇔ OP < R

3. Đường kính của đường tròn.



Đoạn thẳng nối hai điểm trên đường tròn và đi qua tâm O gọi là đường kính của đường tròn tâm O.

Tâm O của đường tròn là trung điểm của đường kính.

4. Cách xác định đường tròn.

Một đường tròn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.

5. Chú ý.

* Qua ba điểm không thẳng hàng A , B , C ta vẽ được một đường tròn duy nhất có tâm là giao điểm ba đường trung trực của ΔABC.

* Qua hai điểm A , B cho trước ta vẽ được vô số đường tròn có tâm nằm trên đường trung trực của đoạn AB.

* Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.

6. Tâm đối xứng và trục đối xứng của đường tròn.

* Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

* Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó

=> Một đường tròn chỉ có duy nhất một tâm đối xứng và có vô số trục đối xứng.

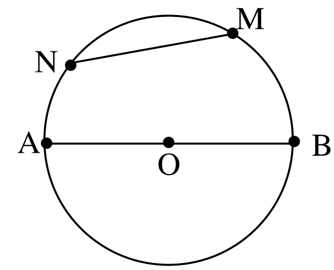
II/ ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN.

1. Dây của đường tròn.

Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trên đường tròn gọi là dây của đường tròn đó.

Ví dụ: Dây MN của (O)

Đường kính AB cũng được gọi là dây của (O).



2. So sánh độ dài đường kính và dây.

Định lý 1: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

3. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ 3

I/ PHƯƠNG PHÁP.

* Trong một đường tròn **đường kính** là dây lớn nhất.

* Trong một đường tròn:

+ Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

+ Đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

* Để chứng minh các điểm thuộc một đường tròn: **cần nhớ:**

+ Trong tam giác vuông trung điểm cạnh huyền là tâm vòng tròn ngoại tiếp

+ Trong tam giác đều , tâm vòng tròn ngoại tiếp là trọng tâm tam giác đó.

+ Trong tam giác thường:

- Tâm vòng tròn ngoại tiếp là giao điểm của 3 đường trung trực của 3 cạnh tam giác đó

- Tâm vòng tròn nội tiếp là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác đó

- Các đỉnh của hình chữa nhật cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.

- Các đỉnh của hình vuông cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.

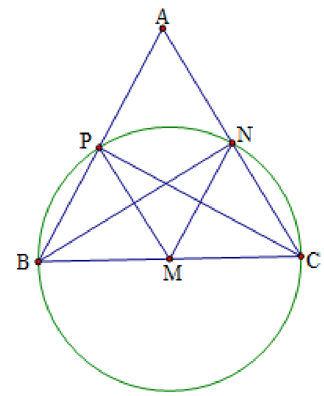
=> **PHƯƠNG PHÁP:** *Để chứng minh các điểm* $A_1, A_2, ..., A_n$ *cùng thuộc một đường tròn ta chứng minh các điểm* $A_1, A_2, ..., A_n$ *cách đều điểm* O *cho trước.*

II/ BÀI TẬP MẪU.

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó

Giải

Vì tam giác ABC đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao .



⇨ AM, BN, CP lần lượt vuông góc với BC, AC, AB.

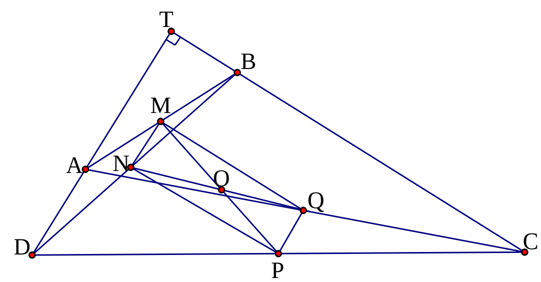
⇨ các tam giác BPC, BNC là tam giác vuông với BC là cạnh huyền

⇨ $MP = MN = MB = MC$

⇨ Các điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn Đường kính $BC = a$, tâm đường tròn là Trung điểm M của BC

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $C + D = 90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm đường tròn đó

Giải



Kéo dài AD, CB cắt nhau tại điểm T thì tam giác TCD vuông tại T.

+ Có MN là đường trung bình của tam giác ABD => $NM // AD$

+ MQ là đường trung bình của tam giác ABC => $MQ // BC$.

Mặt khác $AD \perp BC \Rightarrow MN \perp MQ$.

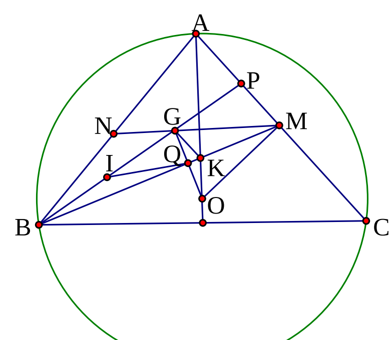
Chứng minh tương tự ta cũng có: $MN \perp NP$, $NP \perp PQ$.

Suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Hay các điểm M, N, P, Q thuộc một đường tròn có tâm là giao điểm O của hai đường chéo NQ, MP

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của AC; G là trọng tâm của tam giác ABM. Gọi Q là giao điểm của BM và GO. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BGQ

Giải



Vì tam giác ABC cân tại A nên tâm O của vòng tròn ngoại tiếp tam giác nằm trên đường trung trực của BC. Gọi K là giao điểm của AO và BM

Dựng các đường trung tuyến MN, BP của tam giác ABM cắt nhau tại trọng tâm G. Do $MN // BC \Rightarrow MN \perp AO$. Gọi K là giao điểm của BM và AO thì K là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $GK // AC$.

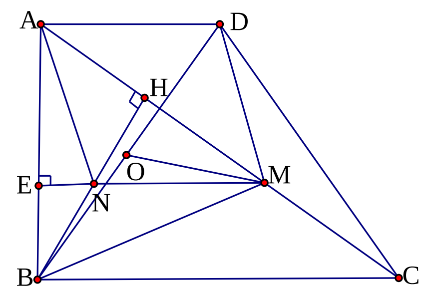
Mặt khác ta có $OM \perp AC$ suy ra $GK \perp OM$ hay K là trực tâm của tam giác $OMG \Rightarrow MK \perp OG$.

Như vậy tam giác BQG vuông tại Q.

Do đó tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác GQB là trung điểm I của BG.

Ví dụ 4. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $A = B = 90^0$. $BC = 2AD = 2a$, Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC; M là trung điểm của HC. Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM

Giải



Gọi N là trung điểm của BH thì MN là đường trung bình của tam giác HBC suy ra $MN \perp AB$, mặt khác $BH \perp AM$

=> N là trực tâm của tam giác ABM => $AN \perp BM$.

Do $MN // = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MN // = AD$ nên $ADMN$ là hình bình hành

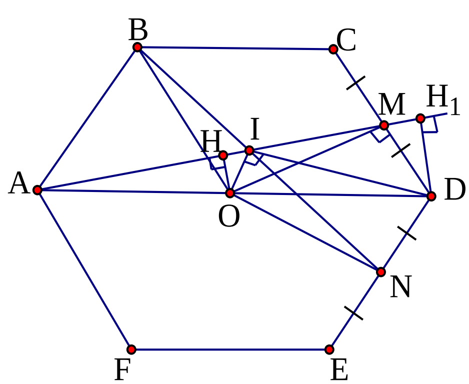
Suy ra $AN // DM$.

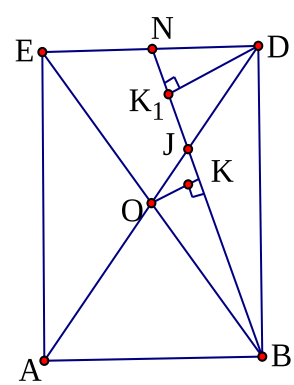
Từ đó ta có: $DM \perp BM$ hay tam giác DBM vuông tại M nên tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác DBM là trung điểm O của BD.

Ta có $R = MO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Gọi M, N là trung điểm của CD, DE. AM cắt BN tại I. Chứng minh rằng các điểm M, I, O, N, D nằm trên một đường tròn

Giải





$ABCDEF$ là lục giác đều => $OM \perp CD, ON \perp DE \Rightarrow M, N, C, D$ nằm trên đường tròn đường kính OD.

Vì tam giác $\Delta OBN = \Delta OAM$ nên điểm O cách đều AM, BN => OI là phân giác trong của góc AIN

Kẻ $\begin{cases} OH \perp AM \\ DH_1 \perp AM \end{cases} \Rightarrow DH_1 = 2OH$ (Do OH là đường trung bình của tam giác DAH_1

Kẻ $\begin{cases} OK \perp BN \\ DK_1 \perp BN \end{cases} \Rightarrow DK_1 = 2OK$ (Do $\dfrac{OK}{DK_1} = \dfrac{JO}{JD} = \dfrac{1}{2}$ với $J = AD \cap NB$)

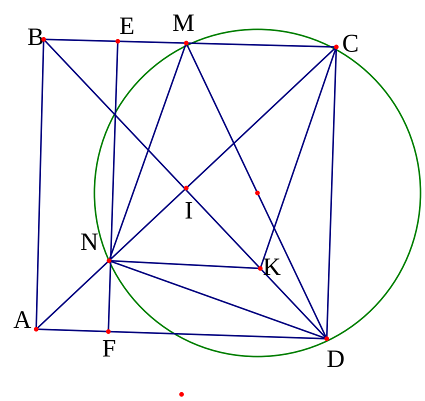
Do $OK = OH \Leftrightarrow DH_1 = DK_1$

=> D cách đều AM, BN hay ID là phân giác ngoài của $AIN \Rightarrow OID = 90^0$.

Vậy 5 điểm M, I, O, N, D cùng nằm trên một đường tròn đường kính OD.

Ví dụ 6. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm BC, N là điểm thuộc đường chéo AC sao cho $AN = \dfrac{1}{4}AC$. Chứng minh 4 điểm M, N, C, D nằm trên cùng một đường tròn

Giải



Ta thấy tứ giác $MCDN$ có $MCD = 90^0$ nên để chứng minh 4 điểm M, N, C, D cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh $MND = 90^0$

Cách 1: Kẻ đường thẳng qua N song song với AB cắt BC, AD tại E, F.

Xét $\Delta_{vuông} NEM$ và $\Delta_{vuông} DFN$ có $EM = NF = \dfrac{1}{4}AB, EN = DF = \dfrac{1}{4}AB$

=> $\Delta NEM = \Delta DFN$ => $NME = DNF, MNE = NDF \Rightarrow MNE + DNF = 90^0$ => ΔMND vuông tại N.

Suy ra 4 điểm M, N, C, D cùng nằm trên đường tròn đường kính MD

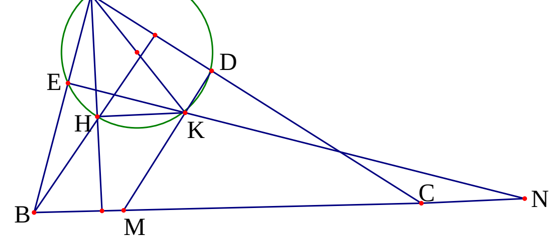
Cách 2: Gọi K là trung điểm của ID với I là giao điểm của hai đường chéo.

Dễ thấy $MCKN$ là hình bình hành nên suy ra $CK // MN$.

Mặt khác do $NK \perp CD, DK \perp CN \Rightarrow K$ là trực tâm của tam giác $CDN \Rightarrow CK \perp ND \Leftrightarrow MN \perp ND$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Lấy điểm M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên AC, AB. Chứng minh cácđiểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn

Giải



Giả sử MD cắt NE tại K. Ta có $HB // MK$ do cùng vuông góc với AC suy ra $HBC = KMN$ (góc đồng vị) .

Tương tự ta cũng có $HCB = KNM$ kết hợp với giả thiết $BC = MN \Rightarrow \Delta BHC = \Delta KMN \Leftrightarrow S_{\Delta BHC} = S_{\Delta KMN} \Rightarrow HK // BC$.

Mặt khác ta có $BC \perp HA$ nên $HK \perp HA$ hay H thuộc đường tròn đường tròn đường kính AK.

Dễ thấy $E, D \in (AK)$ nên cácđiểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

II/ BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

a) Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.

b) So sánh KH và BC.

Bài 2: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Vẽ (O) đường kính BC, nó cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D và E.

a) Chứng minh: $CD \perp AB$; $BE \perp AC$.

b) Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh: $AK \perp BC$.

Bài 3: Cho hình thoi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của DE, DC, BC, BE. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5: Hình thoi ABCD có $A = 60^o$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh 6 điểm E, B, F, G, D, H thuộc cùng một đường tròn.

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc đường (O). Đường tròn (I) đường kính OA cắt OC tại D. Vẽ $CH \perp AB$.

a) Chứng minh A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh OD = OH. Từ đó chỉ ra HD // AC.

Bài 7: Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD) có $C = D = 60^0$, CD = 2AD. Chứng minh các điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Bài 8: Cho (O) đường kính MN, I thuôc OM, K thuộc ON. Qua I, K vẽ các dây AB và CD vuông góc với MN

a) C/m MN là đường trung trực của AB và CD

b) C/m ABCD là hình thang cân

Bài 9: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là một điểm nằm trên AB (điểm M khác O). Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB. Lấy điểm E đối xứng với A qua M.

a) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?

b) Giả sử R = 6cm ; MA = 4cm. Tính CD.

c)* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh: $MH.MK = \dfrac{MC^3}{2R}$.

Bài 10: Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh CM = DN.

b) Giả sử $AOB = 90^0$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

Bài 11: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a) Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn 30^0. Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

Bài 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ BH vuông góc với AC. Trên AC, CD ta lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{DC}$. Chứng minh 4 điểm M, B, C, N nằm trên một đường tròn.

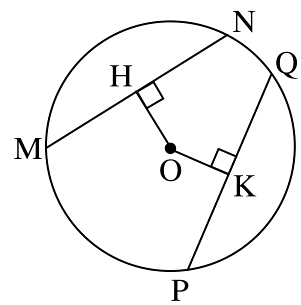
Gợi ý: $BCN = 90^0$, hãy chứng minh $BMN = 90^0$

CHUYÊN ĐỀ 4: DÂY – KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM TỚI DÂY.

1. Định lý 1: Trong một đường tròn:

a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.



Tóm tắt: Cho (O), hai dây MN và PQ. Kẻ OH ⊥ MN tại H, OK ⊥ PQ tại K.

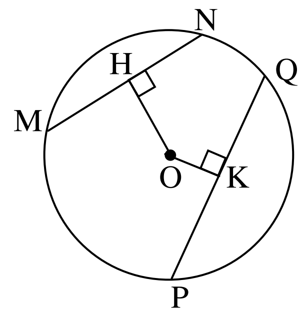
* Nếu MN = PQ => OH = OK

* Nếu OH = OK => MN = PQ

2. Định lý 2. Trong hai dây của một đường tròn:

a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.



Tóm tắt: Cho (O), hai dây MN và PQ. Kẻ OH ⊥ MN tại H, OK ⊥ PQ tại K.

* Nếu PQ > MN => OK < OH

* Nếu OK < OH => PQ > MN

BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ 4

Bài 1: Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ tia Ax cắt (O) tại B, c và tia Ay cắt (O) tại D, E sao cho xÂO > yÂO. So sánh các dây DE và BC.

Hướng dẫn

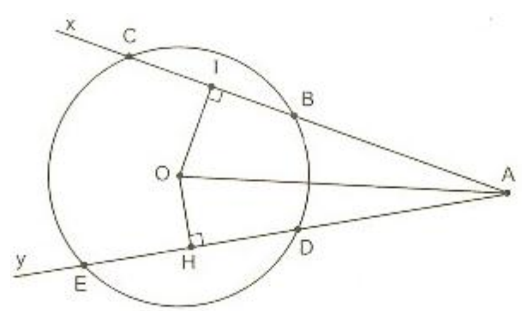
Kẻ OI ⊥ BC, OH ⊥ DE thì

OI = OA.sinOÂx

OH = OA.sinOÂy

Mà OÂx > OÂy nên sin OÂx > sin OÂy

=> OI > OH => BC < DE (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây).



Bài 1: Cho (O; 5cm), dây AB = 8cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho AI = 1cm. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh CD = AB.

Bài 2: Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại A. Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA. Hãy so sánh độ dài hai dây BC và EF ?

Bài 3: Cho (O), hai dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh: EH = EK và EA = EC.

Bài 4: Cho (O), hai dây AB, CD (AB < CD), các tia AB và CD cắt nhau tại K nằm bên ngoài đường tròn. Đường tròn (O; OK) cắt KA và KC tại M và N. Chứng minh: KM < KN.

Bài 5: Cho (O), hai dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại I nằm bên ngoài đường tròn. Chứng minh:

a) IO là phân giác góc AIC

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh: O, M, I, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6: Cho (O), các bán kính OA, OB. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Gọi C là giao điểm của AM và BN. Chứng minh:

a) OC là phân giác góc AOB.

b) OC vuông góc với AB.

Bài 7: Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh CM = DN.

b) Giả sử $AOB = 90^0$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

Bài 8: Cho tam giác ABC (AB < AC), kẻ hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm B, D, C, E cùng thuộc một đường tròn . xác định tâm I của đường tròn đó.

b) Chứng minh AB.AE = AC.AD

c) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh rằng: BHCK là hình bình hành.

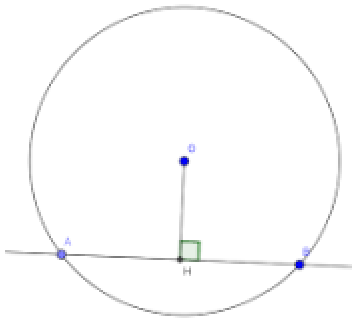
d) Xác định tâm O của đường tròn qua 4 điểm A, B, K, C.

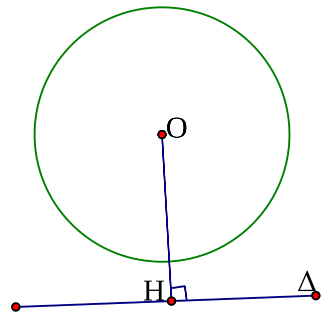
e) Chứng minh OI // AH.

CHỦ ĐỀ 5: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN.

A/ LÝ THUYẾT.

Gọi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng là OH





1. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt:

⇔ đường thẳng có hai điểm chung A, B với đường tròn (O) ⇔ $OH < R$

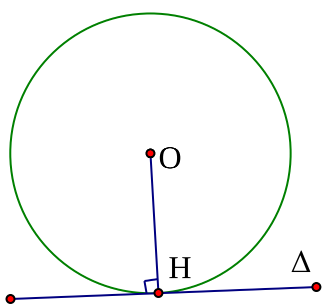
2. Đường thẳng Δ và đường tròn (O) không giao nhau.

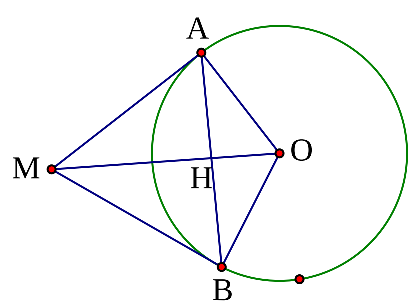
⇔ Đường thẳng Δ và đường tròn (O) không có điểm chung

⇔ $OH > R$

3. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.

⇔ đường thẳng Δ chỉ có một điểm chung H với đường tròn (O) ⇔ $OH = R$.





4. Tiếp tuyến của đường tròn.

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm H ⇔ Δ tiếp xúc với đường tròn tại H

Điểm H gọi là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (O). Ta có $OH = R$

* Nếu Δ là tiếp tuyến của (O) thì Δ vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm

* Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

+ Điểm đó cách đều hai tiếp điểm

+ Tia kẻ từ điểm đó đến tâm O là tia phân giác góc tạo bởi 2 tiếp tuyến

+Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

+ Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó thì vuông góc với đoạn thẳng nối hai tiếp điểm tại trung điểm của đoạn thẳng đó.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác

+ là đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh tam giác là

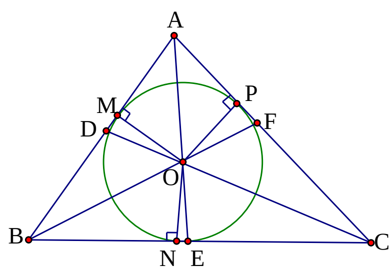
+ có tâm là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác

5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

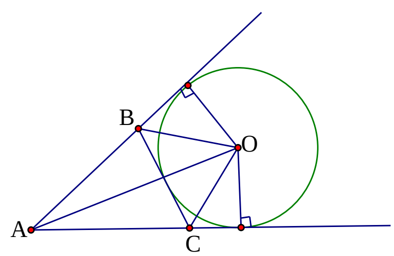
+ là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và phần kéo dài hai cạnh kia

+ Đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A có tâm là giao điểm của hai đường phân giác ngoài góc B và góc C

+ Mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.



Đường tròn nội tiếp ΔABC



Đường tròn bàng tiếp trong góc A

B/ BÀI TẬP VỀ TIẾP TUYẾN

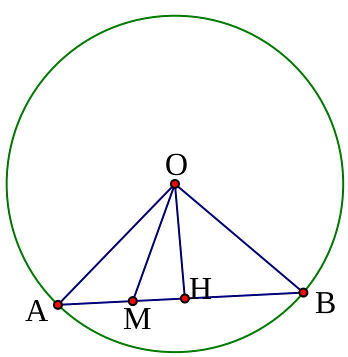
I/ Phương pháp: Xét (O, R) và đường thẳng d

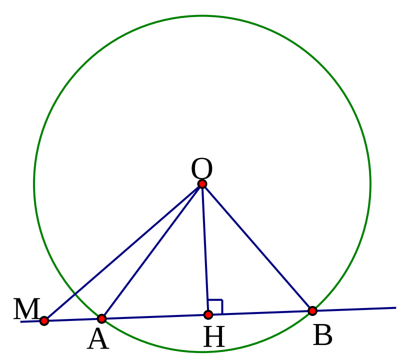
*** Bài toán về khoảng cách OH từ tâm O tới đường thẳng d khi d cắt (O) tại hai điểm.**

Xét $OH \perp AB \Rightarrow OH < R, HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}$. Theo định lý Pitago ta có: $OH^2 = MO^2 - MH^2$

Mặt khác ta cũng có: $OH^2 = R^2 - AH^2$

=> $MO^2 - MH^2 = R^2 - AH^2 \Leftrightarrow MH^2 - AH^2 = MO^2 - R^2 \Leftrightarrow (MH - AH)(MH + AH) = MO^2 - R^2$





CÁC KẾT QUẢ THU ĐƯỢC

+ Nếu M nằm ngoài đoạn AB thì $MA.MB = MO^2 - R^2$

+ Nếu M nằm trong đoạn AB thì $MA.MB = R^2 - MO^2$

+ Mối liên hệ khoảng cách và dây cung: $R^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4}$

*** Để chứng minh một đường thẳng d là tiếp tuyến (tiếp xúc) với đường tròn (O, R):**

+ **Cách 1:** Chứng minh khoảng cách từ O đến d bằng R. Hay nói cách khác ta vẽ OH $\perp$ d, chứng minh OH = R.

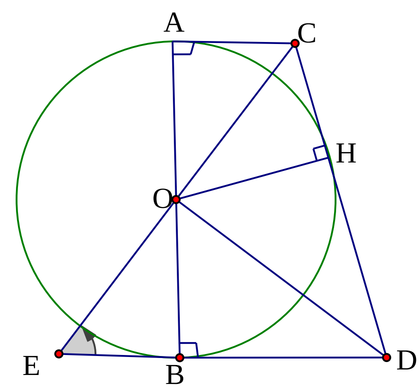
+ **Cách 2:** Nếu biết d và (O) có một giao điểm là A, ta chỉ cần chứng minh OA $\perp$ d.

+ **Cách 3:** Sử dụng phương pháp trùng khít (Cách này sẽ được đề cập trong phần **góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây)**

II/ BÀI TẬP MẪU.

Ví dụ 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ $(A = B = 90^0)$ có O là trung điểm của AB và góc $COD = 90^0$. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB

Giải



Kéo dài OC cắt BD tại E vì $COD = 90^0$ suy ra $EOD = 90^0$.

Vì COD nên xét $\Delta_{vuông} COD$ và $\Delta_{vuông} EOD$ ta có

OD chung

$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow OC = OD$.

$\Rightarrow \Delta COD = \Delta\Delta EOD$ => $DC = DE$ => ΔECD cân tại D.

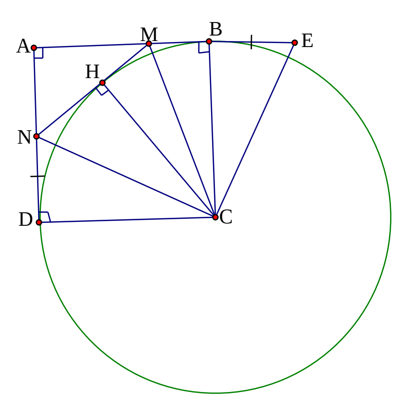
Kẻ $OH \perp CD$ thì $\Delta OBD = \Delta OHD \Rightarrow OH = OB$

mà $OB = OA \Rightarrow OH = OB = OA$ hay A, H, B thuộc đường tròn (O).

Do đó CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N là hai điểm trên các cạnh AB, AD sao cho chu vi tam giác AMN bằng $2a$. Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định

Giải



Trên tia đối của BA ta lấy điểm E sao cho $BE = ND$.

Ta có $\Delta BCE = \Delta DCN \Rightarrow CN = CE$.

Theo giả thiết ta có:

$MN + AM + AN = AB + AD = AM + MB + AN + DN = AM + AN + MB + BE$

Suy ra $MN = MB + BE = ME$.

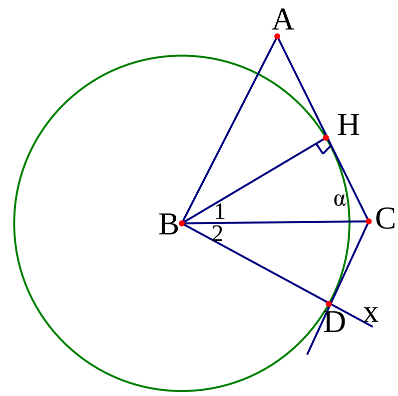
Từ đó ta suy ra $\Delta MNC = \Delta MEC \Rightarrow CMN = CMB$.

Kẻ $CH \perp MN \Rightarrow$ $CH = CB = CD = a$.

Vậy D, H, B thuộc đường tròn tâm C bán kính $CB = a$ suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm C bán kính bằng a.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A đường cao BH. Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ $Bx \perp BA$ cắt đường tròn tâm B bán kính BH tại D. Chứng minh CD là tiếp tuyến của (B)

Giải



Vì tam giác ABC cân tại A nên ta có: $B = C = \alpha$.

Vì $Bx \perp BA \Rightarrow B_2 + \alpha = 90^0$.

Mặt khác ta cũng có $B_1 + \alpha = 90^0 \Rightarrow B_1 = B_2$.

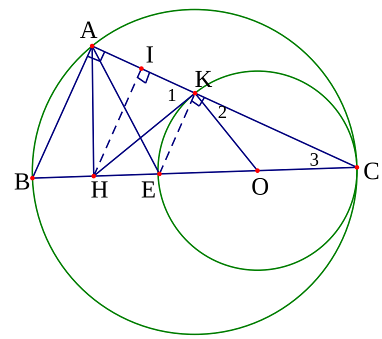
Hai tam giác BHC và ΔBDC có BC chung, $B_1 = B_2$, $BH = BD = R$

suy ra $\Delta BHC = \Delta BDC (c.g.c)$ suy ra $BHC = \Delta BDC = 90^0$.

Nói cách khác CD là tiếp tuyến của đường tròn (B)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn tâm O đường kính EC cắt AC tại K. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Giải



Vì tam giác EKC có một cạnh EC là đường kính của (O) nên $EKC = 90^0$.

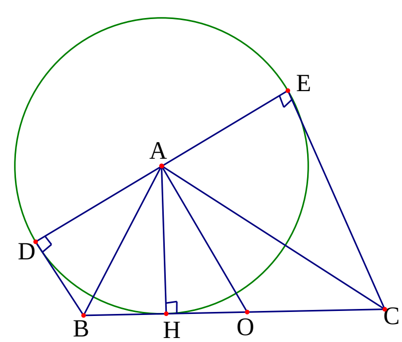
Kẻ $HI \perp AC \Rightarrow BA // HI // EK$ suy ra $AI = IK$ từ đó ta có tam giác AHK cân tại H.

Do đó $K_1 = B$ (cùng phụ với góc hai góc bằng nhau là BAH, IHK)

Mặt khác ta cũng có: $K_2 = C_3$ (do tam giác KOC cân tại O).

Mà $B + C_3 = 90^0 \Rightarrow K_1 + K_2 = 90^0$ suy ra $HKO = 90^0$ hay HK là tiếp tuyến của (O).

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) (D, E là các tiếp điểm khác H). Chứng minh DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC



Giải

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhu có: $DAB = HAB, CAH = CAE$.

Suy ra $DAB + CAE = HAB + CAH = BAC = 90^0$

hay $DAB + CAE + HAB + CAH = 180^0 \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng.

Gọi O là trung điểm của BC thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mặt khác $AD = AE$ nên OA là đường trung bình của hình thang vuông $BDEC$

Suy ra $OA \perp DE$ tại A. Nói cách khác DE là tiếp tuyến của đường tròn (O). Đường kính BC

III/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) . Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại D.Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với phân giác góc ODC, đường này cắt CD tại M. Chứng minh rằng đường thẳng d qua M song song với AB luôn tiếp xúc với (O) khi C thay đổi.

Bài 2: Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và F. BF và CE cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm AI. Chứng minh: MF là tiếp tuyến của (O).

Bài 3: Cho đường tròn (O;R) có đường kính BC, lấy điểm A thuộc (O) sao cho AB = R

a. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính độ dài BC theo R.

b. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M. Trên (O) lấy điểm D sao cho MD = MA (D khác A). Chứng minh MD là tiếp tuyến của (O).

Bài 4: Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O), AB = $4\sqrt{3}$. Đường kính AD cắt BC tại H. Đường thẳng BO cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) ở điểm E.

a. Chứng minh AH vuông góc với BC, tính độ dài AH và bán kính của đường tròn (O).

b. Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O) và tứ giác ABCE là hình thoi.

Bài 5: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC với tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn tâm O và I là trung điểm AD.

a. Chứng minh BC.BD = $4R^2$

b. Chứng minh IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O.

Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD và CE cắt nhai tại H. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ID, IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

Bài 7: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Ax, By là 2 tia tiếp tuyến của (O) (Ax, By cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Trên Ax lấy điểm C, trên By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90^0 . Chứng minh rằng: CD tiếp xúc với đường tròn (O).

Bài 8. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một nửa đường thẳng qua A cắt đường kính CD vuông góc với AB tại M và cắt (O) tại N.

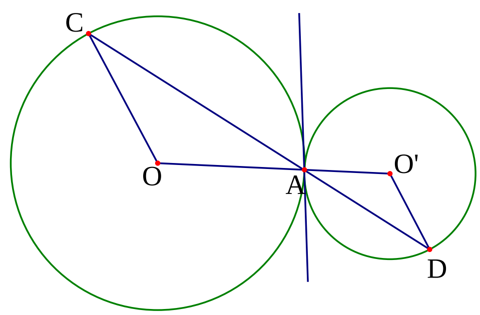
a. Chứng minh AM.AN = AC^2

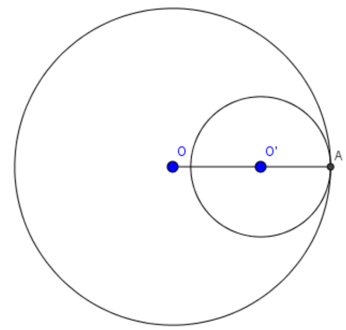
b. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN tiếp xúc với AC tại C.

CHỦ ĐỀ 6: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.

Xét hai đường tròn $(O;R),(O';R')$ và giả sử R > R'

I/ Hai đường tròn tiếp xúc nhau: chỉ có một điểm chung





1. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài:

+ Điều kiện $R+R'=OO'$.

+ Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn.

+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

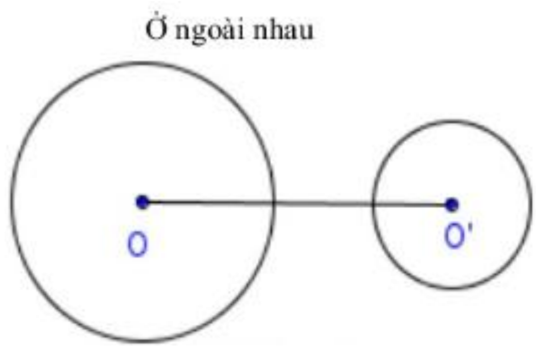
2. Hai đường tròn tiếp xúc trong tại A.

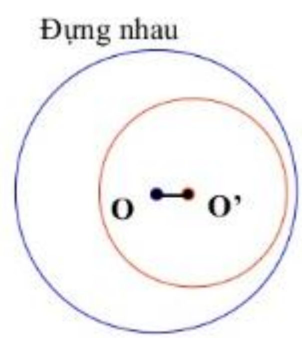
+ Điều kiện: OO' = R – R' = OA – O'A

+ Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn.

+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

II/ Hai đường tròn không giao nhau: không có điểm chung.





1. Hai đường trong ở ngoài nhau.

+ Điều kiện: OO' > R + R'

+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

2. Hai đường tròn đựng nhau.

+ Điều kiện: OO' < R - R'

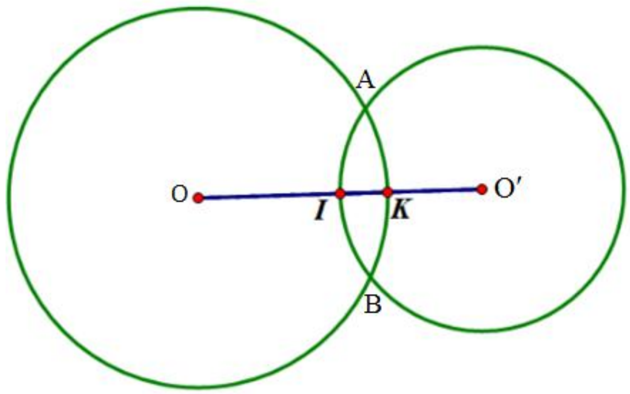
+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

III/ HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU tại A và B: (Có hai điểm chung A và B)

+ Điều kiện: R – R' < OO' < R + R'

+ Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

+ Đường nối tâm là đường trung trực của AB.

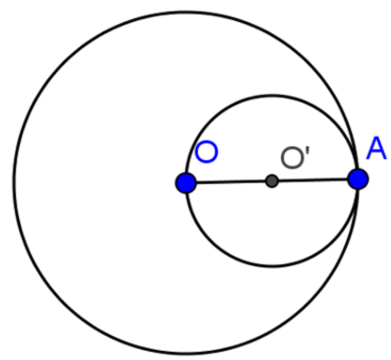


B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy điểm A tùy ý trên (O). Vẽ đường tròn đường kính OA. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Hướng dẫn



Gọi O' là tâm đường tròn đường kính OA.

Ta có O' là trung điểm của OA và bán kính đường tròn(O') là

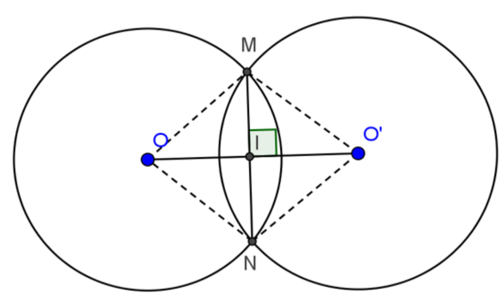
$R' = OA/2 = R/2$.

Độ dài đoạn nối tâm: $d = OO' = OA/2 = R/2$.

Ta có: $R - R' = R/2 = d$ nên (O) và (O') tiếp xúc trong tại A.

Bài 2: Cho hai đường tròn (O;R) và (O'; R) cắt nhau tại M và N. Biết OO'=24cm, MN =10cm. Tính R.

Hướng dẫn



Gọi giao điểm của OO' và MN là I.

Vì OM = ON = O'M =O'N = R

=> tứ giác OMO'N là hình thoi

=> $OO' \perp MN$ tại điểm I là trung điểm của mỗi đoạn OO' và MN.

Do đó: $IM = MN/2 = 5cm$; $IO = OO'/2 = 12cm$.

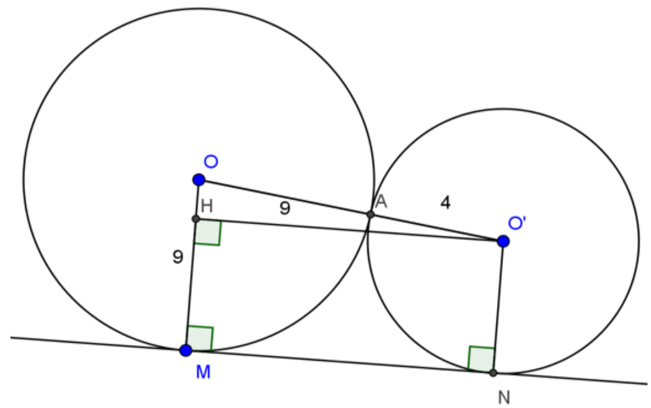
Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác MIO ta có:

$$R = OM = \sqrt{IM^2 + OI^2} = 13$$

Vậy R = 13(cm)

Bài 3: Cho hai đường tròn (O;R) và (O';R') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O), N thuộc (O'). Biết R = 9cm, R' = 4cm. Tính độ dài đoạn MN.

Hướng dẫn



Ta có: OO'= OA + O'A = 9 + 4 =13(cm)

Kẻ OH ⊥ OM tại H

=> tứ giác O'NMH là hình chữ nhật

=> MH = O'N = 4cm; MN = O'H

=> OH = OM - MH = 9 – 4 = 5(cm)

Áp dụng đinh lí py-ta-go vào tam giác OO'H, ta có: $MN = O'H = \sqrt{OO'^2 + OH^2} = 12$ (cm)

Vậy MN = 12cm.

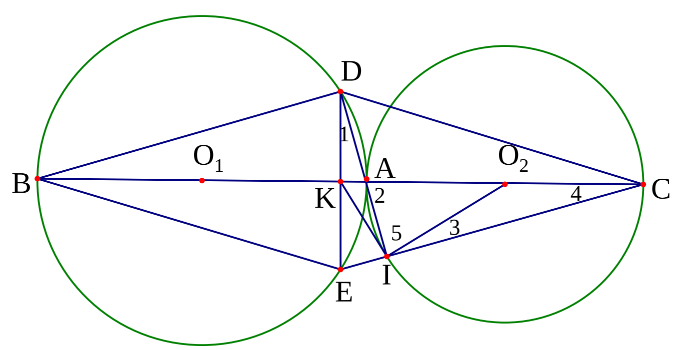
Bài 4: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A với $(R > R')$. Đường nối tâm OO' cắt $(O),(O')$ lần lượt tại B,C. Dây DE của (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC

a) Chứng minh $BDCE$ là hình thoi

b) Gọi I là giao điểm của EC và (O'). Chứng minh D,A,I thẳng hàng

c) Chứng minh KI là tiếp tuyến của (O')

Hướng dẫn



a) Vì BC vuông góc với đường thẳng DE nên $DK = KE, BK = KC$ (theo giả thiết)

=> tứ giác $BDCE$ là hình bình hành, lại có $BC \perp DE$ nên là hình thoi.

b) Vì tam giác BDA nội tiếp đường tròn (O_1) có BA là đường kính nên ΔBDA vuông tại D.

Gọi I' là giao điểm của DA với CE thì $AI'C = 90^0$ (1) (vì so le trong với BDA).

Lại có ΔAIC nội tiếp đường tròn (O_2) có AC là đường kính

=> tam giác AIC vuông tại I, hay $AIC = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$. Vậy D, A, I thẳng hàng.

c) Vì tam giác DIE vuông tại I có IK là trung tuyến ứng với cạnh huyền DE

=> $KD = KI = KE \Rightarrow D_1 = I_2$ (1).

Lại có $D_1 = C_4$ (2) do cùng phụ với DEC và $C_4 = C_3$ (3), vì $O_2C = O_2I$ là bán kính của đường tròn (O_2).

Từ (1),(2),(3) suy ra $I_2 = I_3 \Rightarrow I_2 + I_5 = I_5 + I_3 = 90^0$ hay $KIO_2 = 90^0$

=> KI vuông góc với bán kính O_2I của đường tròn (O_2).

Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O_2).

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

a) Chứng minh AD. AB = AE. AC

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).

c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử AB = 6 cm, AC = 8 cm . Tính độ dài PQ.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (với $C \in$ (O) và D $\in$ (O')).

a) Tính số đo góc CAD.

b) Tính độ dài CD biết OA = 4,5 cm, O'A = 2 cm.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O'). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO', Q là điểm đối xứng với N qua OO'. Chứng minh rằng :

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O') .

c) MN + PQ = MP + NQ.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác BDHF và CDHE cắt nhau.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và điểm A cố định bên trong đường tròn (O). Gọi M là điểm di động trên đường tròn (O), đường trung trực của dây AM cắt (O) tại P và P'.

a) Chứng tỏ tập hợp các hình chiếu của O lên PP' là đường tròn (I).

b) Chứng tỏ đường tròn (I) và đường tròn (A, R) đựng nhau.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 5cm, AC = 12cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (B, 6cm) và (C, a cm), ($a \in R$) theo a.

Bài 7. Cho tam giác OAO' vuông tại A có OA = 6cm, O'A = 8cm. Chứng minh đường tròn (O, 5cm) và đường tròn (O', $\sqrt{65}$ cm) cắt nhau tại hai điểm M và N. Tính độ dài MN.

Bài 8. Cho đường tròn (O) có đường kính BC, dây AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF. Xác định vị trí tương đối giữa các đường tròn: (I) và (O), (K) và (O), (I) và (K).

Bài 9. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc ngoài nhau cố định. Bán kính OA quay quanh O, bán kính OA' quay quanh O' sao cho OA luôn song song với O'A'. Gọi M là trung điểm của AA'.

Bài 10. Cho tam giác ABC có AB = 3a, AC = 4a, BC = 5a. Đường trung trực của AC cắt đường phân giác của góc BAC tại K. Đường tròn tâm K tiếp xúc với đường thẳng AB. Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = a và AC = 2a/3. Xác định bán kính của đường tròn tâm C để đường tròn này tiếp xúc với đường tròn (O') tại M'.

a) Chứng minh các đường thẳng vuông góc với d tại M và M' đi qua các điểm N và N' cố định và thẳng hàng với B.

b) Chứng minh trung điểm I của NN' là tâm của đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O').

CHỦ ĐỀ 7: TỔNG ÔN CHƯƠNG II

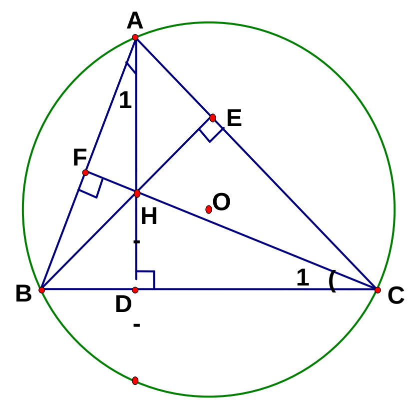
PHIẾU SỐ 1

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

1/ Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

2/ AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.

Lời giải:



1/ Theo giả thiết: BE là đường cao => BE ⊥ AC => $\angle BEC = 90^0$.

CF là đường cao => CF ⊥ AB => $\angle BFC = 90^0$.

Lấy I là trung điểm của BC => IB = IC = IF = IE.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC

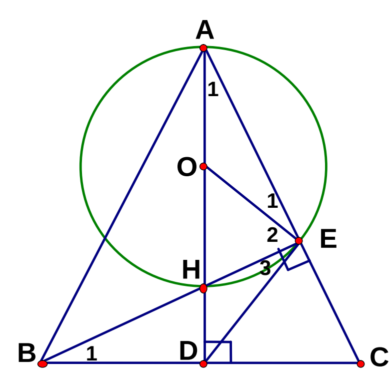
1. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle AEH = \angle ADC = 90^0$; $\angle A$ là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle BEC = \angle ADC = 90^0$; $\angle C$ là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\dfrac{BE}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.



1/ Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Chứng minh ED = $\dfrac{1}{2}$BC.

3/ Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4/ Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

Lời giải:

1. Chứng minh như bài 1

2. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle BEC = 90^0$.

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

3. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => $\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => tam giác DBE cân tại D => $\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) => $\angle E_1 = \angle E_3$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^0$ => $\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0 = \angle OED$ => DE $\perp$ OE tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

4. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm.

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có

$ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4cm$

Bài 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1/ Chứng minh AC + BD = CD.

2/ Chứng minh $\angle COD = 90^0$.

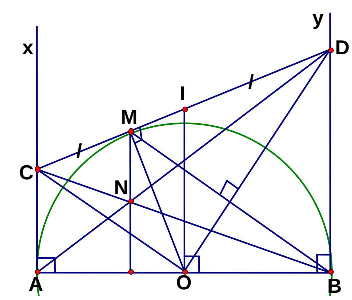
3/ Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

4/ Chứng minh OC // BM

5/ Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

6/ Chứng minh MN $\perp$ AB.

7/ Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải

1/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù => $\angle COD = 90^0$.

3/ Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên tam giác COD vuông tại O có OM $\perp$ CD (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

4/ Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên OC $\perp$ OD . (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R

=> OD là trung trực của BM => BM $\perp$ OD .   (2).

Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

5/ Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC $\perp$ AB; BD $\perp$ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang.

Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB

=> IO là đường trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow$ IO // AC , mà AC $\perp$ AB => IO $\perp$ AB tại O

=> AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6/ Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD $\perp$ AB => MN $\perp$ AB.

7/ Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD

=> Chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi

=> Chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB

=> M phải là trung điểm của cung AB.

Bài 4. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

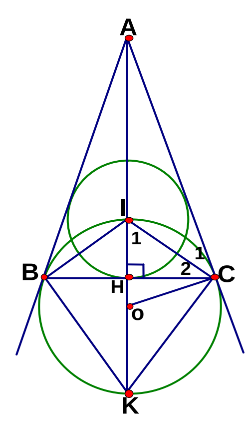
1/ Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3/ Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

Lời giải

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B



Do đó BI $\perp$ BK hay $\angle IBK = 90^0$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$

Lấy O' là trung điểm của IK => O'K = O'I = OC = OB

=> B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).

$\angle I_1 = \angle$ ICO   (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay AC ⊥ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (cm)

$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9$ (cm)

$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ (cm)

Bài 5. Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1/ Chứng minh tứ A, M, B, O cùng thuộc một đường tròn.

2/ Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .

3/ Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI. IM = IA^2$.

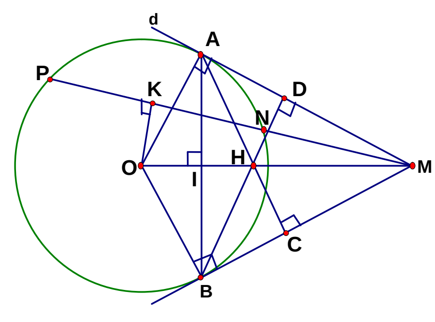
4/ Chứng minh OAHB là hình thoi.

5/ Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

6/ Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Lời giải

1. (HS tự làm).



2. Vì K là trung điểm NP nên OK ⊥ NP (quan hệ đường kính Và dây cung) => $\angle OKM = 90^0$.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$; $\angle OBM = 90^0$.

=> K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $OI.OM = OA^2$ hay $OI.OM = R^2$; và $OI. IM = IA^2$.

4. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.

OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.

=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB

=> O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R.

Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R.

Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa (A) bán kính AH = R

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1/ Chứng minh tam giác BEC cân.

2/ Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.

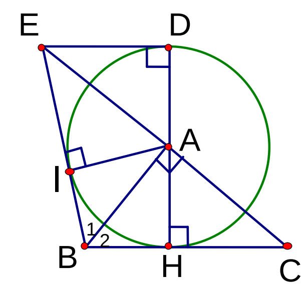
3/ Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).

4/ Chứng minh BE = BH + DE.

Lời giải

1. Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).

Vì AB ⊥CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC



=> BEC là tam giác cân. => $\angle B_1 = \angle B_2$

2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$

=> Δ AHB = ΔAIB => AI = AH.

3. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

Bài 7: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

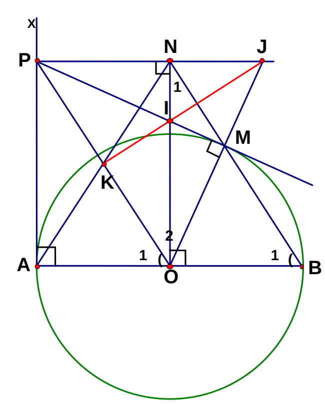
1/ Chứng minh rằng A, P, M, O cùng thuộc đường tròn.

2/ Chứng minh BM // OP.

3/ Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

4/ Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



1. (HS tự làm).

2. Ta có é ABM nội tiếp chắn cung AM; ∠AOM là góc ở tâm chắn cung AM

=> $\angle ABM = \dfrac{\angle AOM}{2}$ (1)

OP là tia phân giác ∠AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

=> $\angle AOP = \dfrac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) => $\angle ABM = \angle AOP$ (3)

Mà $\angle ABM$ và $\angle AOP$ là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : $\angle PAO = 90^0$ (vì PA là tiếp tuyến); $\angle NOB = 90^0$ (gt $NO \perp AB$).

=> $\angle PAO = \angle NOB = 90^0$; OA = OB = R; $\angle AOP = \angle OBN$ (theo (3))

=> $\Delta AOP = \Delta OBN$ => OP = BN (5)

Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà $ON \perp AB$ => $ON \perp PJ$

Ta cũng có $PM \perp OJ$ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I

=> I là trực tâm tam giác POJ. (6)

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có $\angle PAO = \angle AON = \angle ONP = 90^0$

=> K là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật => $\angle APO = \angle NOP$ (so le) (7)

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác $\angle APM$ => $\angle APO = \angle MPO$ (8).

Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => $IK \perp PO$. (9)

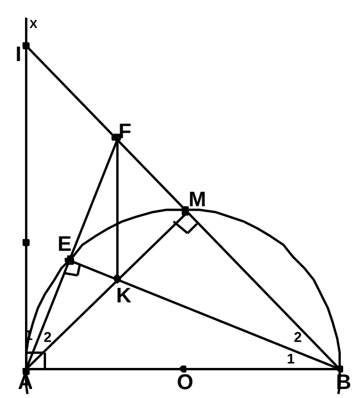
Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

Bài 8: Cho nửa đường tròn tâm O đường kớnh AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F, tia BE cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng E, F, M, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM . IB$.

Lời giải



1. Dùng đường tròn O và xét ΔAEB , ΔAMB đều là các tam giác vuông (suy ra từ đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy)

=> ΔFEK , ΔFMK cũng là các tam giác vuông.

Lấy O' là trung điểm của FK => OF = OK = OM = OE = FK/2

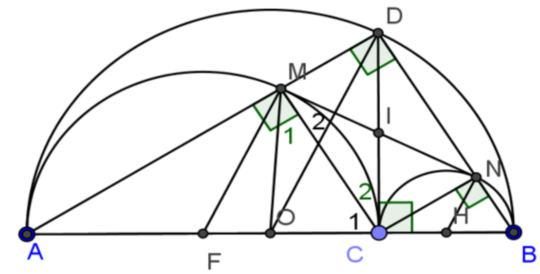
=> E, F, M, K cùng thuộc đường tròn (O') đường kính FK

2. Ta có $\angle IAB = 90^0$ (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có $AM \perp IB$ (theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $AI^2 = IM . IB$.

Bài 9: Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D. DA,DB cắt các nửa đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự tại M, N.

Hướng dẫn



a, Ta có: Tam giác AMC nội tiếp đường tròn đường kính AC

=> $\angle AMC = 90^o$

Tam giác CNB nội tiếp đường tròn đường kính CB

=> $\angle CNB = 90^o$

Tam giác ADB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> $\angle ADB = 90^0$

Suy ra tứ giác DMCN là hình chữ nhật.

b, Xét tam giác vuông DCA có :

$DC^2 = DM.MA$ (1) (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Xét tam giác vuông DCB có: $DC^2 = DN.DB$ (2) (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Từ (1) và (2) ta suy ra DM.MA = DN.NB

c, Vì DMCN là hình chữ nhật nên IM = IC suy ra tam giác IMC cân tại I => $\angle M_2 = \angle C_2$

Vì tam giác MFC cân tại F nên $\angle M_1 = \angle C_1$ Mà $\angle C_1 + \angle C_2 = 90o$

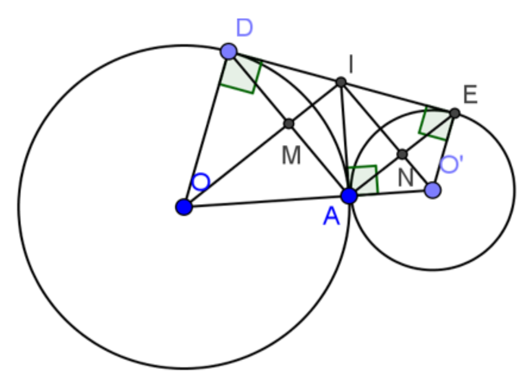
=> $\angle M_1 + \angle M_2 = 90^o$ Hay $\angle FMN = 90^o$ => $FM \perp MN$

Chứng minh tương tự $\angle MNC = 90^o$

=> $HN \perp MN$ d, Ta có: DC = MN (vì DMCN là hình chữ nhật) mà $DC \leq DO$

=> $MN \leq DO$ MN = DO khi $C \equiv O$ Suy ra C là trung điểm của AB.

Bài 10: Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung DE, D thuộc đường tròn tâm O, E thuộc đường tròn tâm O’. Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt DE ở I. Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của O’I và AE.



a, Tứ giác AMIN là hình gì? Vì sao?

b, Chứng minh IM.IO=IN.IO’

c, Chứng minh rằng O O’ là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE.

d, Tính độ dài DE biết rằng OA=5cm, O’A=3,2 cm.

Hướng dẫn

a) Ta có: ID và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I.

Suy ra ID = IA (1) Mà OD = OA

Suy ra IO là trung trực của AD => $IO \perp AD$

=> $\angle IMA = 90^o$ + IE và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I

Suy ra IA = IE (2) Mà O’A = O’E

Suy ra IO’ là trung trực của AE => IO ⊥ AE

=> $\angle INA = 90^o$

Từ (1) và (2) suy ra IA = ID = IE Suy ra tam giác DAE vuông tại A

=> $\angle DAE = 90^o$

Tứ giác MINA có 3 góc $\angle IMA = 90^o$; $\angle INA = 90^o$; $\angle DAE = 90^o$ nên tứ giác MINA là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác vuông IAO có AN ⊥ IO' : $IA^2 = IM.IO$ (3) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Xét tam giác vuông IAO’ có : $IA^2 = IN.IO'$ (4) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Từ (3) và (4) ta suy ra IM.IO = IN.IO'

c) Theo trên ta có tam giác DAE vuông tại A

=> 3 điểm D, E, A nội tiếp đường tròn đường kính DE (5)

Do IA là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (O) và (O’) => IA ⊥ OO' (6)

Từ (5) và (6) ta suy ra OO’ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

d) Xét tam giác vuông IOO’ có $IA^2 = OA . OA'$ => $IA^2 = 5.3,2 = 16(cm)$

Vậy IA = 4cm.

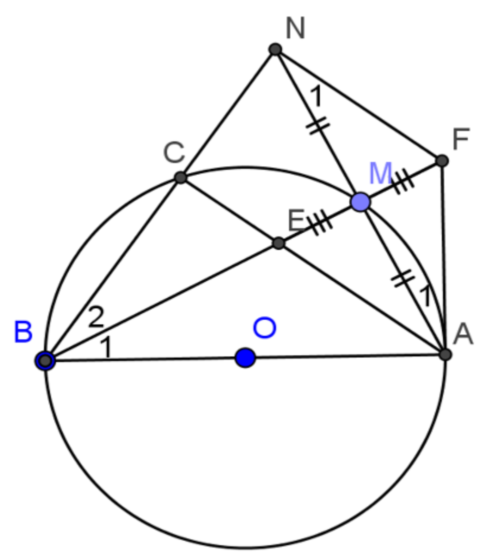
Bài 11: Cho đường tròn (O), đường kính AB, đểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M.BN cắt đường tròn ở C.Gọi E là giao điểm của AC và BM.

a, Chứng minh rằng NE ⊥ AB .

b, Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh rằng FA là tiếp tuyến của đường tròn(O).

c, Chứng minh rằng FN là tiếp tuyến của đường tròn(B; BA).

Hướng dẫn



a) Tam giác AMB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> $\angle AMB = 90^o$ => AM ⊥ MB

Tam giác ACB nội tiếp đường tròn đường kính AB

=> $\angle ACB = 90^o$ => AC ⊥ CB

Suy ra E là trực tâm của tam giác NAB, do đó NE ⊥ AB .

b) Tứ giác AFNE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành(tứ giác này còn là hình thoi).

Do đó FA//NE.

Do NE ⊥ AB nên FA ⊥ AB .

Suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tam giác ABN có đường cao BM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân.

Suy ra BN = BA.

Do đó BN là bán kính của đường tròn (B;BA).

Tam giác ABN cân tại B nên ∠BNA = ∠BAN (1)

Tam giác AFN có đường cao FM là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra ∠N1 = ∠A1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BNA + \angle N_1 = \angle BAN + \angle A_1$ tức là ∠FNB = ∠FAB

Ta lại có: $\angle FAB = 90^o$ (câu b), nên $\angle FNB = 90^o$.

Do đó FN là tiếp tuyến của đường tròn (B).

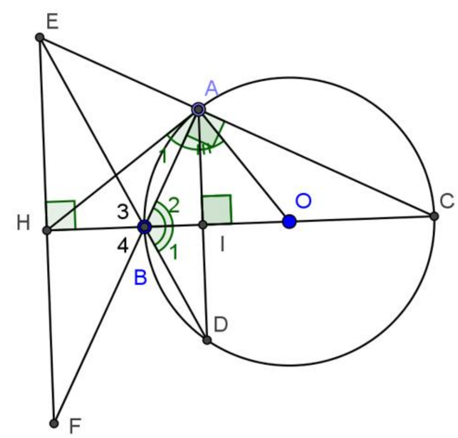
Bài 12: Cho tam giác vuông tại A(AB < AC) nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BC. Kẻ dây AD vuông góc với BC. Gọi E là giao điểm của DB và CA. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC ở H, cắt AB ở F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác EBF là tam giác cân.

b) Tam giác HAF là tam giác cân.

c) HA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Hướng dẫn



a) Ta có: OB ⊥ AD tại I nên AI = ID.

Suy ra tam giác BAD cân, $\angle B^1 = \angle B^2$, do đó $\angle B^3 = \angle B^4$.

Tam giác EBF có đường cao cũng là đường phân giác nên là tam giác cân.

b) Tam giác BEF cân nên EH = HF.

Tam giác AEF vuông tại A có AH là đường trung tuyến nên AH = HE = HF.

Do đó tam giác HAF cân tại H.

c) Tam giác HAF cân tại H nên ∠A1 = ∠F (1)

Tam giác OAB cân tại O nên $\angle OAB = \angle B_1 = \angle B_4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle OAH = \angle A_1 + \angle OAB = \angle F + \angle B_4 = 90^o$

Suy ra HA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

MỘT SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG II

PHIẾU SỐ 2

Bài 1: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 40^0.

a/ Tính góc AOB.

b/ Từ O kẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N.Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

Bài 2: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẽ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a/ Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b/ Chứng minh: $MC.MD = OM^2$.

c/ Cho biết OC = BA = 2R, tính AC và BD theo R.

Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O’). Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N.

a/ Đường thẳng CM cắt (O’) tại P. Chúng minh: OM//BP.

b/ Từ C kẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh: Tam giác OCD là tam giác cân.

Bài 4: Cho hai đường tròn (O,R) và $(O^/,R^/)$ cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn $(O^/,R^/)$. Biết R=12cm, $R^/$=5cm.

a/ Chứng minh: $O^/A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O,R).

b/ Tính độ dài các đoạn thẳng $OO^/$, AB.

Bài 5: Cho đường tròn tâm O bán kính R=6cm và một điểm A cách O một khoảng 10cm. Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.

Bài 6: Cho hai đường tròn đồng tâm (O,R) và (O,r). Dây AB của (O,R) tiếp xúc với (O,r). Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O,r) cắt (O,R) tại C và D (D ở giữa E và C).

a/ Chứng minh: EA=EC.

b/ Chứng minh: EO vuông góc với BD.

Bài 7: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

Khi AH=2cm, MH=4cm. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng: AB, MA, MB.

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác .

a) Tính số đo góc ABD

b) Tứ giác BHCD là hình gì? Tại sao?

c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh 2OM = AH.

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn ở điểm D.

a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không ? Tại sao?

b) Chứng minh: $BC^2 = 4AH . DH$

c) Cho BC = 24cm, AB = 20cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

Bài 10. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H.

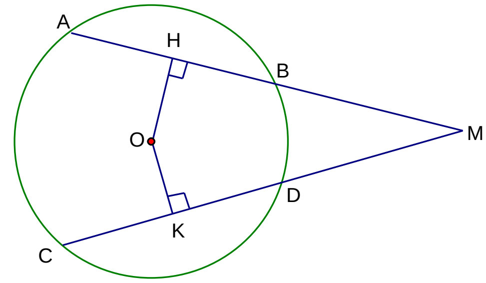
a) Tứ giác ACOD là hình gì? Tại sao?

b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D,O, M thẳng hàng.

d) Chứng minh đẳng thức $CD^2 = 4\ AH.\ HB$.

Bài 11. Hình bên cho biết AB = CD. Chứng minh rằng:



a) MH = MK.

b) MB= MD .

c) Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang cân.

Bài 12. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).

b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB.

c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo CAB (làm tròn đến độ).

d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn, đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

b) Chứng minh AH vuông góc BC.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

Bài 14. Cho đường tròn tâm (O;R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho $MAB = 60^0$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM):

b) Chứng minh $MN^2 = 4\ AH\ .HB$.

c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.

c) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F.Chứng minh ba điểm N; E; F thẳng hàng.

Bài 15. Cho đường tròn (O) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

a) Tính số đo các góc của tam giác OAB.

b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 16. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O;R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh OA $\perp$ BC và tính tích OH. OA theo R

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh CD // OA.

c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

Bài 17. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ BE $\perp$ AC và CF $\perp$ AB ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

Bài 18. Cho đường tròn (O ; 3cm) và điểm A có OA = 6 cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC

a) Tính độ dài OH.

b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F. Tính chu vi tam giác ADE.

c) Tính số đo góc DOE.

Bài 19. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax , By là các tia vuông góc với AB(Ax , By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

a) Tính số đo góc MON.

b) Chứng minh MN = AM + BN.

c) Tính tích AM. BN theo R.

Bài 20: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

a) Chứng minh AD. AB = AE. AC

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).

c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử AB = 6 cm,AC = 8 cm . Tính độ dài PQ.

Bài 21. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (với $C \in$ (O) và D $\in$ (O')).

a) Tính số đo góc CAD.

b) Tính độ dài CD biết OA = 4,5 cm, O'A = 2 cm.

Bài 22. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O'). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO', Q là điểm đối xứng với N qua OO'. Chứng minh rằng :

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O') và MN + PQ = MP + NQ.

TỔNG ÔN CHƯƠNG II - PS3

I. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường tròn

Đường tròn tâm O bán kính R (R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và điểm M.

- *M nằm trên đường tròn (O; R)* $\Leftrightarrow OM = R$.
- *M nằm trong đường tròn (O; R)* $\Leftrightarrow OM < R$.
- *M nằm ngoài đường tròn (O; R)* $\Leftrightarrow OM > R$.

3. Cách xác định đường tròn

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- *Đường tròn là hình có **tâm đối xứng**. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.*
- *Đường tròn là hình có **trục đối xứng**. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.*

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $C + D = 90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 2. Cho hình thoi ABCD có $A = 60^0$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh EFGH là hình chữ nhật, ΔOBE là tam giác đều.

Bài 3. Cho hình thoi ABCD. Đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và cắt AC tại F. Chứng minh E, F lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD.

HD: Chứng minh E, F là giao điểm của các đường trung trực tương ứng.

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (I) đường kính OA. Bán kính OC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại D. Vẽ CH $\perp$ AB. Chứng minh tứ giác ACDH là hình thang cân.

HD: Chứng minh ΔADO = ΔCHO ⇒ OD = OH, AD = CH. Chứng minh HD // AC.

Bài 5. Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD) có $C = D = 60^0$, CD = 2AD. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

HD: Chứng minh $IA = IB = IC = ID$, *với I là trung điểm của CD.*

Bài 6. Cho hình thoi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

HD:

Bài 7. Cho hai đường thẳng *xy* và $x'y'$ vuông góc nhau tại O. Một đoạn thẳng AB = 6cm chuyển động sao cho A luôn nằm trên *xy* và B trên $x'y'$. Hỏi trung điểm M của AB chuyển động trên đường nào?

HD:

Bài 8. Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

a) Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.

b) So sánh KH và BC.

HD:

Bài 9.

a)

HD:

II. DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- *Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.*
- *Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.*

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- *Trong một đường tròn:*

– Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

– Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- *Trong hai dây của một đường tròn:*

– Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

– Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Bài 1. Cho đường tròn (O; R) và ba dây AB, AC, AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD. Chứng minh rằng MN ≤ 2R.

HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AB ⇒ MN ≤ AB.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \le 2R^2$.

HD: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB.CD$.

Bài 3. Cho đường tròn (O; R) và dây AB không đi qua tâm. Gọi M là trung điểm của AB. Qua M vẽ dây CD không trùng với AB. Chứng minh rằng điểm M không là trung điểm của CD.

HD: Dùng phương pháp phản chứng. Giả sử M là trung điểm của CD ⇒ vô lý.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB. Lấy điểm E đối xứng với A qua M.

a) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?

b) Giả sử $R = 6,5cm$, $MA = 4cm$. Tính CD.

c)* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh: $MH.MK = \frac{MC^3}{2R}$.

HD: a) ACED là hình thoi *b)* $CD = 12cm$

c) $MH = \frac{MA.MC}{AC}, MK = \frac{MB.MC}{BC}$

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2cm, IB = 4cm$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

HD: $OH = OK = 1cm$.

Bài 6. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh CM = DN.

b) Giả sử $AOB = 90^0$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

HD: a) Vẽ OH ⊥ CD ⇒ H là trung điểm của CD và MN.

b) Đặt OH = x. C. minh ΔHOM vuông cân ⇒ HM = x. Do CM = MN = ND ⇒ HC = 3x

$\Rightarrow OM = \frac{R}{\sqrt{5}}$.

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a) Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn 30^0. Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

HD: a) Vẽ OH ⊥ CD. Đường thẳng OH cắt EF tại K ⇒ OH = OK ⇒ CD = EF.

b) $OH = \frac{R}{4} \Rightarrow HK = \frac{R}{2}$. *Vì* $E = 90^0$ *nên CF là đường kính.* $EF^2 = \frac{15R^2}{4}$. $S = \frac{\sqrt{15}R^2}{4}$.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: CD = 16cm và MH = 4cm.

HD:

Bài 9. Cho đường tròn (O; 12cm) có đường kính CD. Vẽ dây MN qua trung điểm I của OC sao cho góc NID bằng 30^0. Tính MN.

HD:

Bài 10.

a)

HD:

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng Δ. Đặt $d = d(O, \Delta)$.

VTTĐ của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa *d* và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng đgl ***tiếp tuyến*** *của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn đgl* ***tiếp điểm****.*

2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

• Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

• Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

• Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

• Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

• Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác

• Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác đgl ***đường tròn nội tiếp*** *tam giác, còn tam giác đgl* ***ngoại tiếp*** *đường tròn.*

• Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

• Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia đgl ***đường tròn bàng tiếp*** *tam giác.*

• Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.

• Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

Bài 1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

HD: a) D, E nằm trên đường tròn đường kính AH.

b) Chứng minh $OEA = OAE = ECM = CEM \Rightarrow MEO = CEM + CEO = OEA + CEO = 90^0$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $CAB = 30^0$. Trên tia đối của tia BA, lấy điểm M sao cho BM = R. Chứng minh rằng:

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O). b) $MC^2 = 3R^2$.

HD: a) Chứng minh ΔCOM vuông tại C. *b)* $MC^2 = OM^2 - OC^2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông ở A có AB = 8, AC = 15. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD, cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài HE.

HD: a) Gọi O và F là lần lượt là trung điểm của CD và AE. Chứng minh DE // AB, HF ⊥ AE

$\Rightarrow HEO = 90^0$. *b)* $HE = AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{120}{17}$.

Bài 4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên tia OB lấy điểm C sao cho BC = BO. Chứng minh rằng $BMC = \frac{1}{2}BMA$.

HD: Chú ý ΔOMC cân tại M.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC. Chứng minh rằng $BAC = 60^0$ khi và chỉ khi $OA = 2R$.

HD: Chú ý ΔABO vuông tại B.

Bài 6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác AMON là hình thoi.

b) Điểm A phải cách điểm O một khoảng bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O).

HD: a) Chứng minh ON // AB, OM // AC. *b)* $OA = 2R$.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn vẽ từ A và C cắt nhau tại M. Trên tia AM lấy điểm D sao cho AD = BC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD là hình bình hành.

b) Ba đường thẳng AC, BD, OM đồng quy.

HD: a) Chứng minh AD // BC (cùng vuông góc với OA).

b) Gọi E là giao điểm của OM và AC ⇒ E là trung điểm của AC.

Bài 8. Cho đường tròn (O; *r*) nội tiếp tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $r = p - a$, trong đó *p* là nửa chu vi tam giác, *a* là độ dài cạnh huyền.

HD: Gọi D, E, F là các tiếp điểm của (O) với các cạnh tam giác ⇒ AEOF là hình vuông.

Bài 9. Chứng minh rằng diện tích tam giác ngoại tiếp một đường tròn được tính theo công thức: $S = pr$, trong đó *p* là nửa chu vi tam giác, *r* là bán kính đường tròn nội tiếp.

HD: Diện tích tam giác bằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ.

Bài 10. Cho đường tròn (O), dây cung CD. Qua O vẽ OH ⊥ CD tại H, cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại M. Chứng minh MD là tiếp tuyến của (O).

HD:

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tia A*x* ⊥ AB và B*y* ⊥ AB ở cùng phía nửa đường tròn. Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại I cắt A*x* tại C và B*y* tại D. Chứng minh rằng AC + BD = CD.

HD:

Bài 12. Cho đường tròn (O; 5cm). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho MA ⊥ MB tại M.

a) Tính MA và MB.

b) Qua trung điểm I của cung nhỏ AB, vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB tại C và D. Tính CD.

HD:

Bài 13. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc $AMB = 60^0$. Biết chu vi tam giác MAB là 18cm, tính độ dài dây AB.

HD: $AB = 6(cm)$.

Bài 14.

a)

HD:

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Tính chất đường nối tâm

- *Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.*
- *Nếu hai đường tròn cắt nhau thi hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.*
- *Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.*

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; r). Đặt $OO' = d$.

VTTĐ của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	 $d = R + r$ $d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau: – Ở ngoài nhau – (O) đựng (O′)	0	 $d > R + r$ $d < R - r$

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung *của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.*
Tiếp tuyến chung ngoài *là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.*
Tiếp tuyến chung trong *là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.*

Bài 1. Cho hai đường tròn (A; R_1), (B; R_2) và (C; R_3) đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Tính R_1, R_2 và R_3 biết AB = 5cm, AC = 6cm và BC =7cm.

HD: $R_1 = 2(cm)$, $R_2 = 3(cm)$, $R_3 = 4(cm)$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O; 5cm) và (O′; 5cm) cắt nhau tại A và B. Tính độ dài dây cung chung AB biết OO′ = 8cm.

HD: $AB = 6(cm)$.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) cắt nhau tại A và B với R > R′. Vẽ các đường kính AOC và AO′D. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

HD: Chứng minh BC, BD cùng song song với OO′ hoặc chứng minh $CBD = 180^0$.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến chung MAN sao cho MA = AN. Đường vuông góc với MN tại A cắt OO′ tại I. Chứng minh I là trung điểm của OO′.

HD:

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Gọi M là giao điểm một trong hai tiếp tuyến chung ngoài BC và tiếp tuyến chung trong. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO′ tại M.

HD: Chứng minh $IM = \dfrac{OO'}{2}$ *và* $IM \perp BC$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R) tiếp xúc ngoài nhau tại M. Hai đường tròn (O) và (O′) cùng tiếp xúc trong với đường tròn lớn (O″; R″) lần lượt tại E và F. Tính bán kính R″ biết chu vi tam giác OO′O″ là 20cm.

HD:

Bài 7. Cho đường tròn (O; 9cm). Vẽ 6 đường tròn bằng nhau bán kính R đều tiếp xúc trong với (O) và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường khác bên cạnh nó. Tính bán kính R.

HD:

Bài 8. Cho hai đường tròn đồng tâm. Trong đường tròn lớn vẽ hai dây bằng nhau AB = CD và cùng tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại M và N sao cho AB ⊥ CD tại I. Tính bán kính đường tròn nhỏ biết IA = 3cm và IB = 9cm.

HD:

Bài 9. Cho ba đường tròn $(O_1),(O_2),(O_3)$ cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

HD: Tam giác đều cạnh $R \Rightarrow S = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 10. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc nhau tại A. Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) tại B và cắt đường tròn (O′) tại C. Từ B vẽ tiếp tuyến *xy* với đường tròn (O). Từ C vẽ đường thẳng *uv* song song với *xy*. Chứng minh rằng *uv* là tiếp tuyến của đường tròn (O′).

HD: Xét hai trường hợp tiếp xúc ngoài và trong. Chứng minh OB // O′C ⇒ O′C ⊥ uv.

Bài 11. Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn (D; DC) và đường tròn (O) đường kính BC, chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng:

a) N là trung điểm của AD. b) M là trung điểm của AB.

HD: a) ΔABN = ΔCDO ⇒ AN = CO b) ΔBCM = ΔCDO ⇒ BM = CO.

Bài 12. Cho góc vuông *x*O*y*. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia O*x* và O*y*. Vẽ đường tròn (I; OK) cắt tia O*x* tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn (K; OI) cắt tia O*y* tại N (K nằm giữa O và N).

a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác OMCN là hình vuông.

c) Gọi giao điểm của hai đường tròn (I), (K) là A và B. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia O*x* và O*y* sao cho OI + OK = *a* (không đổi). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

HD: a) Xét ΔOIK $\Rightarrow R - r < d < R + r$ *b)* $\hat{O} = \hat{M} = \hat{N} = 90^0, OM = ON$.

c) Gọi $L = KB \cap MC, P = AB \cap MC$. *OKBI là hình chữ nhật, BLMI là hình vuông. ΔBLP = ΔKOI ⇒ LP = OI ⇒ MP = OM = MC ⇒ P ≡ C.*

d) OM = a. Hình vuông OMCN cạnh a, cố định ⇒ AB đi qua điểm C cố định.

Bài 13.

a)

HD:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ đường phân giác BI.

a) Chứng minh rằng đường tròn (I; IA) tiếp xúc với BC.

b) Cho biết AB = *a*. Chứng minh rằng $AI = (\sqrt{2}-1)a$. Từ đó suy ra $\tan 22^0 30' = \sqrt{2}-1$.

HD: a) Vẽ ID $\perp$ BC $\Rightarrow$ IA = ID

b) Xét ΔABI $\Rightarrow$ $AI = a.\tan 22^0 30'$. ΔDIC vuông cân $\Rightarrow$ AI = DC = $(\sqrt{2}-1)a$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A vẽ tiếp tuyến *xy*. Từ một điểm M trên *xy* vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Hai đường cao AD và BE của tam giác MAB cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tứ giác AOBH là hình thoi.

c) Khi điểm M di động trên *xy* thì điểm H di động trên đường nào?

HD: a) Chứng minh ΔMAB cân, MH, MO là các tia phân giác của AMB.

b) Chứng minh AOBH là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

c) H di động trên đường tròn (A; R).

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến *xy*. Vẽ AD và BC vuông góc với *xy*.

a) Chứng minh rằng MC = MD.

b) Chứng minh rằng AD + BC có giá trị không đổi khi điểm M di động trên nửa đường tròn.

c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

HD: a) OM là đường trung bình của hình thang ABCD.

b) AD + BC = 2R c) Vẽ ME $\perp$ AB. ΔBME = ΔBMC $\Rightarrow$ ME = MC = MD

d) S = 2R.ME $\le$ 2R.MO $\Rightarrow$ S lớn nhất $\Leftrightarrow$ M là đầu mút của bán kính OM $\perp$ AB.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động D, E sao cho $DOE = 60^0$.

a) Chứng minh rằng tích BD.CE không đổi.

b) Chứng minh ΔBOD # ΔOED. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE.

c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

HD: a) ΔBOD # ΔCEO $\Rightarrow$ BD.CE = $\dfrac{BC^2}{4}$ *b)* $\dfrac{BD}{OD} = \dfrac{OB}{OE}$ $\Rightarrow$ *ΔBOD # ΔOED*

c) Vẽ OK $\perp$ DE. Gọi H là tiếp điểm của (O) với cạnh AB. Chứng minh OK = OH.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB và một điểm E di động trên nửa đường tròn đó (E không trùng với A và B). Vẽ các tia tiếp tuyến A*x*, B*y* với nửa đường tròn. Tia AE cắt B*y* tại C, tia BE cắt A*x* tại D.

a) Chứng minh rằng tích AD.BC không đổi.

b) Tiếp tuyến tại E của nửa đường tròn cắt A*x*, B*y* theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AB, CD đồng quy hoặc song song với nhau.

c) Xác định vị trí của điểm E trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác ABCD nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

HD: a) ΔABD # ΔBCA $\Rightarrow$ $AD.BC = AB^2$

b) ΔMAE cân $\Rightarrow$ ΔMDE cân $\Rightarrow$ MD = ME = MA. Tương tự NC = NB = NE. Sử dụng bổ đề hình thang $\Rightarrow$ đpcm.

c) S = 2R.MN $\Rightarrow$ S nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN $\perp$ AD $\Leftrightarrow$ OE $\perp$ AB. $S_{\min} = 4R^2$.

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, đường tròn (O′) tiếp xúc với AB tại B. Hai đường tròn này luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Hỏi tiếp điểm M của hai đường tròn di động trên đường nào?

HD: Từ M vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, cắt AB tại I. Chứng minh IA = IB = IM. Từ đó suy ra M di động trên đường tròn tâm I đường kính AB.

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) nội tiếp ΔABC. Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của AB, AC, BC với (O). Chứng minh rằng: $P_{\Delta ABC} = 2(AM + BP + NC)$.

HD:

Bài 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh CH = DK.

HD: Vẽ $EH \perp CD$. Chứng minh $EH = EK \Rightarrow CH = DK$.

Bài 9. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc $AMB = 40^0$.

a) Tính góc AOB.

b) Từ O kẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

HD: a) $AOB = 140^0$ b) Chứng minh $NOM = NMO$.

Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến A*x*, B*y* với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt A*x* và B*y* lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh: $MC.MD = OM^2$.

c) Cho biết OC = BA = 2R, tính AC và BD theo R.

HD: a) $OC \perp OD$ c) $AC = R\sqrt{3}$, $BD = MD = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Bài 11. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O′). Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N.

a) Đường thẳng CM cắt (O′) tại P. Chúng minh: OM // BP.

b) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh tam giác OCD là tam giác cân.

HD: a) $OM \perp MC$, $BP \perp MC$ b) CD // OM; ΔOCD cân tại D.

Bài 12. Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O′; R′). Biết R = 12cm, R′ = 5cm.

a) Chứng minh: O′A là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Tính độ dài các đoạn thẳng OO′, AB.

HD: a) $O'A \perp OA$ b) $OO' = 13(cm)$; $AB = \dfrac{120}{13}(cm)$.

Bài 13. Cho đường tròn tâm O bán kính R = 6cm và một điểm A cách O một khoảng 10cm. Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

a) Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.

b) Vẽ cát tuyến ACD, gọi I là trung điểm của đoạn CD. Hỏi khi C chạy trên đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

HD:

Bài 14. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r). Dây AB của (O; R) tiếp xúc với (O; r). Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O; r) cắt (O; R) tại C và D (D ở giữa E và C).

a) Chứng minh: EA = EC.

b) Chứng minh: EO vuông góc với BD.

c) Điểm E chạy trên đường nào khi dây AB của (O; R) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (O; r)?

HD:

Bài 15. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

a) Khi AH = 2cm, MH = 4cm, hãy tính độ dài các đoạn thẳng AB, MA, MB.

b) Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O). Hãy xác định vị trí của M để biểu thức: $\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MB^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

c) Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến của (O) tại A ở D, OD cắt AM tại I. Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

HD:

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Tính số đo góc ABD ?

b) Tứ giác BHCD là hình gì? Vì sao?

c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh 2OM = AH.

HD: a) $ABD = 90^0$ *b) BHCD là hình bình hành.*

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) ở D.

a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không ? Vì sao?

b) Chứng minh: BC^2 = 4AH.DH.

c) Cho BC = 24cm, AB = 20cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

HD:

Bài 18. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H.

a) Tứ giác ACOD là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D,O, M thẳng hàng.

d) Chứng minh: CD^2 = 4 AH. HB.

HD: a) ACOD là hình thoi.

Bài 19. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).

b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB.

c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo góc CAB (làm tròn đến độ).

d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

HD:

Bài 20. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

b) Chứng minh AH vuông góc BC.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

HD: a) $BMC = BNC = 90^0$ *b) H là trực tâm* ΔABC *c) NK* $\perp$ *NO (K là trung điểm của AH).*

Bài 21. Cho đường tròn tâm (O; R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho góc $MAB = 60^0$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM).

b) Chứng minh MN^2 = 4AH.HB .

c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.

d) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

HD:

Bài 22. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

a) Tính số đo các góc của tam giác OAB.

b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

HD: a) $OBA = 90^0$, $OAB = 30^0$, $AOB = 60^0$.

Bài 23. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh OA $\perp$ BC và tính tích OH.OA theo R

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh CD // OA.

c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

HD:

Bài 24. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ BE $\perp$ AC và CF $\perp$ AB ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

HD: a) BOCH là hình bình hành và OB = OC b) H là trực tâm ΔABC c) OA = 2R

Bài 25. Cho đường tròn (O; 3cm) và điểm A có OA = 6 cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Tính độ dài OH.

b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác ADE.

c) Tính số đo góc DOE.

HD: a) $OH = 1,5(cm)$ *b)* $AB = 3\sqrt{3}9cm)$, $P_{ADE} = 2AB = 6\sqrt{3}(cm)$ *c)* $DOE = \dfrac{BOC}{2} = 60^0$.

Bài 26. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi A*x* , B*y* là các tia vuông góc với AB (A*x*, B*y* và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia A*x* kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt B*y* ở N.

a) Tính số đo góc MON.

b) Chứng minh MN = AM + BN.

c) Tính tích AM. BN theo R.

HD:

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

a) Chứng minh AD.AB = AE.AC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).

c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử AB = 6 cm,AC = 8 cm . Tính độ dài PQ.

HD:

Bài 28. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O′). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO′, Q là điểm đối xứng với N qua OO′. Chứng minh rằng:

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O′).

c) MN + PQ = MP + NQ.

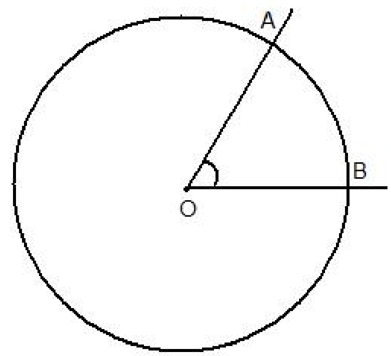
HD:

Bài 29.

a)

HD:

CHỦ ĐỀ 8: GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG.
LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY.



A/ LÝ THUYẾT.

1/ Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm của đường tròn. Góc này cắt đường tròn tại A và B khi đó cung nhỏ AB là cung bị chắn của góc ở tâm AOB.

2/ Số đo cung:

+ Số đocủa cung nhỏ bị chắn bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

+ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^o và số đo của cung nhỏ.

+ Số đo của nửa đường tròn bằng 180^o

+ Chú ý:

- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^o

- Cung lớn có số đo lớn hơn 180^o

3/ So sánh cung:

+ Cung nào lớn hơn thì có số đo cũng lớn hơn và ngược lại.

+ Cung nào có góc ở tâm lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.

4/ Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì: $Sđ\ \text{AB} = Sđ\ \text{AC} + Sđ\ \text{CB}$

5/ Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

6/ Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

B/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho đường tròn (O, R) và điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Gọi MA, MB là hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B. Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA và OB nếu:

a) $\angle AMB = 70^o$

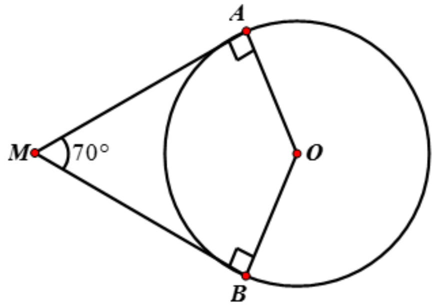
b) MA = R

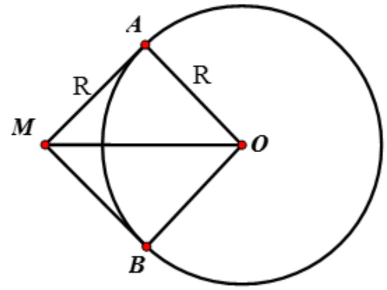
c) MO = 2R

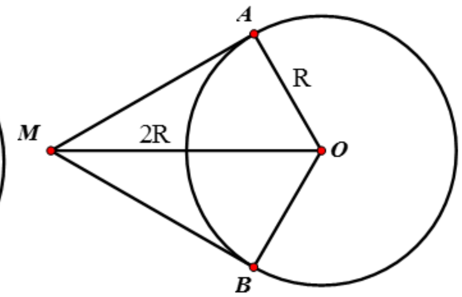
Hướng dẫn

Vì MA và MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B nên: $MA \perp OA$, $MB \perp OB$

=> $\angle MAO = \angle MBO = 90^o$







a) Xét tứ giác MAOB có:

$\angle AMB + \angle AOB + \angle MAO + \angle MBO = 360^o$

$\Leftrightarrow \angle AOB = 360^o - (\angle AMB + \angle MAO + \angle MBO) = 360^o - (70^o + 90^o + 90^o) = 110^o$

Vậy số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB bằng 110^o .

b) Nếu MA = R

Xét ΔMAO có: MA = AO = R và $\angle MAO = 90^o$ => Δ MAO vuông cân tại A => $MOA = 45^o$

Vậy $\angle AOB = 2.\angle MOA = 90^o$

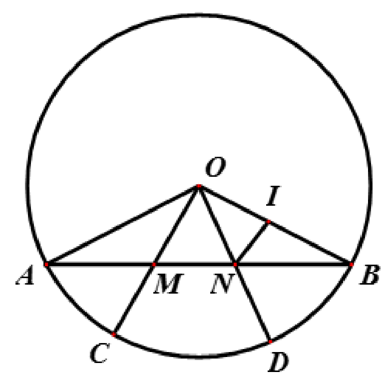
c) Nếu MO = 2R

Xét ΔMAO vuông tại A có: MO = 2.AO => $\angle AMO = 30^o$ => $\angle AOM = 60^o$

Vậy: $\angle AOB = 2.\angle AOM = 120^o$

Bài 2: Cho đường tròn (O; R) và dây AB không đi qua O. Trên dây AB lấy các điểm M, N sao cho AM = MN = NB. Tia OM, ON cắt (O) lần lượt tại C và D. So sánh cung AC, CD, DB.

Hướng dẫn



Xét ΔAOM và ΔBON có:

OA = OB = R

$\angle OAM = \angle OBN$ (do ΔOAB cân tại O)

AM = BN (gt)

=> $\Delta AOM = \Delta BON$ (c – g - c)

=> $\angle AOM = \angle BON$ (hai góc tương ứng)

=> $AC = BD$

Gọi I là trung điểm của OB. Suy ra NI là đường trung bình của ΔOBM

=> NI // OM => $\angle MON = \angle ONI$ (so le trong) (1)

Mặt khác ta có: OB = OC = R, mà $M \in OC$ => OM < OB hay NI < OI.

Xét ΔONI có NI < OI nên: $\angle NOI < \angle ONI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle NOI < \angle MON$ => $CD > BD$

Bài 3: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ dây AM của đường tròn (O) và dây BN của đường tròn (O') sao cho AM // BN. Chứng minh $AM = BN$

Hướng dẫn

Vì AM // BN (gt)

=> $\angle MAB = \angle ABN$ (so le trong) (1)

Mặt khác: OA = OB = O'A = O'B

=> Tứ giác OAO’B là hình thoi

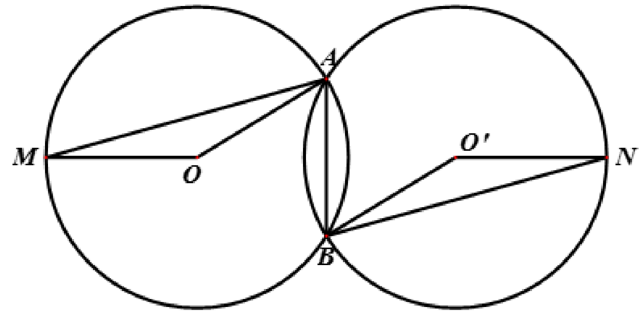
=> ∠OAB = ∠ABO' (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ∠MAO = ∠NBO'

Ta có: ΔMOA cân tại O và ΔNO'B cân tại O' có góc ở đáy bằng nhau => ∠MOA = ∠NO'B

Do đó: ΔMOA = ΔNO'B (c.g.c) => AM = BN

Mặt khác hai đường tròn (O) và (O’) bằng nhau nên



=> $AM = BN$

Bài 4: Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) cắt nhau tại hai điểm A và B (R < R'). Kẻ đường kính BOC và BO’D.

a) Chứng minh rằng: Ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) So sánh số đo hai cung nhỏ AC và AD.

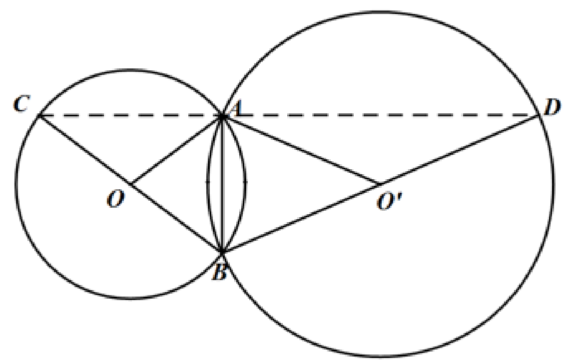
Hướng dẫn

a) Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính BC nên ΔABC vuông tại A hay ∠BAC = 90^o .

Tương tự ta có: ∠BAD = 90^o

=> ∠CAD = ∠BAD + ∠BAC = 180^o

=> 3 điểm C, A, D thẳng hàng.



b) Xét đường tròn (O) có: $sđAC = 180^o - sđAB$

Xét đường tròn (O’) có: $sđAD = 180^o - sđAB$

=> $sđAC = sđAD$

Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho SđBC = 30o, điểm M thuộc cung AC nhỏ. Gọi D và E là các điểm đối xứng với M qua AB và OC. Chứng minh rằng: ΔDOE đều.

Hướng dẫn

Vì sđBC = 30^o => ∠BOC = 30^o

Gọi I là giao điểm của MD và AB, J là giao điểm của ME và OC.

Theo giả thiết: M và D đối xứng với nhau qua AB, mà M thuộc đường tròn (O) nên D cũng thuộc đường tròn (O).

Tương tự E thuộc đường tròn (O).

Tứ giác MIOJ có ∠I = ∠J = 90^o => ∠IMJ + ∠IOJ = 180^o

=> ∠IMJ = 180^o - ∠IOJ = ∠BOC = 30^o

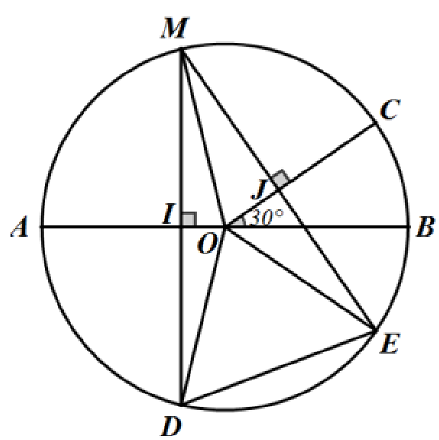
Ta có ΔMOD và ΔMOE cân tại O nên:

∠MOD = 180^o - 2∠DMO

∠MOE = 180^o - 2∠EMO

=> ∠MOD + ∠MOE = 360o - 2(∠DMO + ∠EMO)

⇔ 360o - ∠DOE = 360o - ∠IMJ ⇔ ∠DOE = 2∠IMJ = 60o



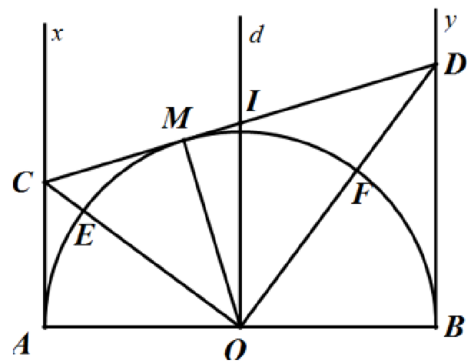
Vậy ΔDOE đều.

Bài 6: Cho điểm M chuyển động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M với (O) cắt Ax tại C và cắt By tại D; các đường thẳng CO và OD cắt (O) lần lượt tại E và F.

a) Tính sđ $\overset{\frown}{EF}$.

b) Tìm tập hợp tâm I của đường tròn ngoại tiếp .

Hướng dẫn



a) Vì CA và BM là hai tiếp tuyến với (O) nên OC là tia phân giác của $\angle AOM$.

Tương tự ta có OD là tia phân giác của $\angle BOM$ Mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù => $OC \perp OD$

Vậy ta có $\angle COD = 90o$ hay sđ $\overset{\frown}{EF} = 90^o$.

b) Vì ΔCOD vuông tại O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔCOD là trung điểm của CD.

Dễ thấy tứ giác ABCD là hình thang có OI là đường trung bình nên OI//AC => $OI \perp AB$.

Vậy I chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với AB tại O.

Bài 7: Cho AB là dây cung của đường tròn (O), I là trung điểm của AB. Trên cung nhỏ AB lấy điểm M tùy ý. Gọi giao điểm OI và MI với (O) lần lượt C và N. So sánh $\overset{\frown}{MCN}$ và $\overset{\frown}{ACB}$.

Hướng dẫn

Kẻ $OH \perp MN$ Ta có: ΔOHI vuông tại H nên OH < OI.

Mà OH, OI lần lượt là các khoảng cách từ O đến hai dây MN và AB => AB < MN.

Do đó sđ $\overset{\frown}{MCN}$ > sđ $\overset{\frown}{ACB}$.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

BT1: Cho (O; 5cm) và điểm M sao cho OM=10cm. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB. Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

BT2: Cho tam giác đều ABC, vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại D và AC tại E. So sánh các cung BD; DE và EC.

BT3: Cho hai đường tròn (O; R) và (O; r) với R > r. Điểm M ngoài (O; R). Qua M vẽ hai tiếp tuyến với (O; r), một cắt (O; R) tại A và B (A nằm giữa M và B); một cắt (O; R) tại C và D (C nằm giữa D và M). C/m: hai cung AB và CD bằng nhau.

BT4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Dây AC của đường tròn (O) vuông góc với AO'; dây AD của đường tròn (O') vuông góc với AO. So sánh các góc $\mathbf{\widehat{AOC}}$, $\mathbf{\widehat{AO'D}}$.

BT5: Trên một đường tròn (O) có cung $\mathbf{AB}$ bằng 140^o. Gọi A'. B' lần lượt là đối xứng của A, B qua O; lấy cung $\mathbf{AD}$ nhận B' làm điểm chính giữa; lấy cung $\mathbf{CB}$ nhận A' làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ $\mathbf{CD}$.

BT6: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) , (O') cắt nhau tại A, B. Kẻ các đường kính AOC và AO'D. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AC với (O').

a) So sánh các cung nhỏ CB, BD.

b) Chứng minh rằng B là điểm chính giữa cung EBD.

BT7:

a) Cho đường tròn (O, R) với hai điểm A, B. Tìm quỹ tích trung điểm của các dây trên đường tròn có độ dài bằng dây AB.

b) Cho đường tròn (O, R) với hai tiếp tuyến AB, AC. Một tiếp tuyến di động của đường tròn (O) cắt các đoạn thẳng AB, AC tại các điểm tương ứng P, Q. Gọi P', Q' theo thứ tự là giao điểm của các đoạn thẳng OP, OQ với đường tròn (O). Chứng minh rằng cung nhỏ $P'Q'$ có số đo không đổi. Tìm quỹ tích trung điểm I của P'Q'.

BT8: Cho đường tròn (O), dây AB. Gọi M là điểm chính giữa cung AB. Vẽ dây MC cắt dây AB tại D. Vẽ đường vuông góc với AB tại D, cắt OC tại K. ΔKCD là tam giác gì ?

BT9: Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại bốn điểm trên cắt nhau tạo thành tứ giác ABCD. Tính số đo tổng các góc $\angle AOB + \angle COD$?

BT10: Cho đường tròn (O), dây AB. Trên dây AB lấy D rồi nối D với C trên đường tròn (C khác A, B; A, O, C không thẳng hàng). Các đường trung trực của AD và DC cắt nhau ở M. CMR: đường thẳng MO đi qua điểm chính giữa cung AC.

BT11: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, lấy điểm S sao cho SA và SB lần lượt cắt nửa đường tròn tại M và N. Gọi H là giao điểm của AN và BM. Chứng minh:

a) Tứ giác SMHN nội tiếp được trong một đường tròn.

b) SH vuông góc với AB.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

BT1: Cho hai đường tròn đồng tâm (O;R) và (O;2R). P là một điểm ngoài (O;2R). Vẽ đường tròn (P;PO) cắt đường tròn (O;2R) tại C và D, cắt đường tròn (O;R) ở E và F. OC và OD cắt (O;R) ở A và B. CMR:

a) CD // EF.

b) PA và PB là hai tiếp tuyến của (O;R).

BT2: Cho hình thoi ABCD có cạnh AB =5 cm và đường chéo AC=8 cm. Đường tròn tâm A bán kính R=5 cm tiếp xúc với đường tròn tâm C tại M thuộc đoạn AC. Đường tròn này cắt CB tại E và cắt CD tại F. Tính tỉ số độ dài của cung BD và cung EF

BT3: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 40^0.

a) Tính góc AOB.

b) Từ O kẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N.Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

BT4: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẽ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh: $MC.MD=OM^2$.

c) Cho biết OC=BA=2R, tính AC và BD theo R.

BT5: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Biết $B = 65^0$; $C = 102^0$. Tính số đo các góc A và D.

BT6: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB ta lấy một điểm M sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và M. Kẻ hai tiếp tuyến MN và MP với đường tròn (N, P là hai tiếp điểm).

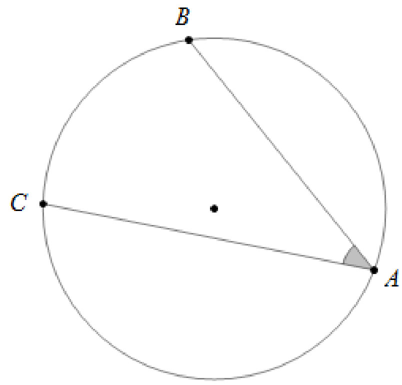
a) Chứng minh tứ giác MNOP nội tiếp.

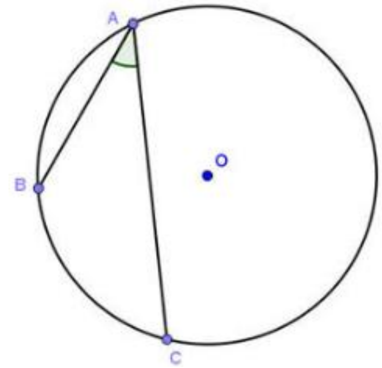
b) Gọi H là giao điểm của NP và AB. Chứng minh NP $\perp$ AB.

c) Chứng minh OH . MH = AH . BH

CHỦ ĐỀ 9: GÓC NỘI TIẾP.

A. LÝ THUYẾT.



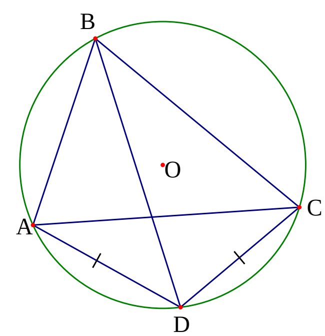


+ Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó (BAC là góc nội tiếp chắn cung nhỏ BC)

+ Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn (BC gọi là cung bị chắn).

2. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

3. Trong một đường tròn:



* Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

Nếu $ABD = CBD \Rightarrow AD = CD \Rightarrow AD = CD$

* Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

Trên hình vẽ: $\text{sđ}ABD = \text{sđ}ACD = \dfrac{1}{2}\text{sđ}AD$.

Trên hình vẽ: $AD = CD \Leftrightarrow \text{sđ}AD = \text{sđ}CD \Leftrightarrow \text{sđ}ABD = \text{sđ}CAD$

* Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

* Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

* ***Để chứng minh tích độ dài đoạn thẳng bằng nhau*** *cần chứng minh hai tam giác giác đồng dạng liên quan đến tích đó.*

* ***Để chứng minh hai tam giác đồng dạng cần chứng minh***

+ Hai góc tương ứng của hai tam giác đó bằng nhau

+ Hai cặp cạnh của hai tam giác tương ứng tỉ lệ và góc sen giữa bằng nhau.

**** Để chứng minh hai góc bằng nhau ta cần chú ý:***

+ Xem góc cần chứng minh có phải là hai góc nội tiếp cùng chắn một cung, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau (hai dây cung bằng nhau) trong một đường tròn.

+ Xem hai góc đó, mỗi góc bằng với góc nội tiếp nào và các góc nội tiếp đó có bằng nhau không

+ Xem hai góc đó có liên quan đến hai tam giác bằng nhau, góc có cạnh tương ứng vuông góc, góc sole trong, góc đồng vị không, góc của tam giác vuông…

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) cắt nhau tại A và B . Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB . Tia CB cắt (O’) tại E, tia BD cắt (O) tại F. Chứng minh rằng:

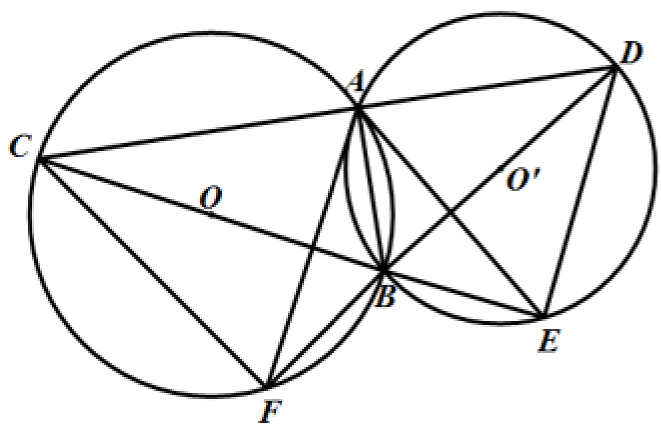
a) ∠CAF = ∠DAE

b) AB là tia phân giác của ∠EAF

c) CA.CD = CB.CE

d) CD^2 = CB.CE + BD.CF

Hướng dẫn



Vì CD ⊥ AB => ∠CAB = 90^o Mà ∠CAB = 1/2 sđ BC => sđ BC = 180^o

Vậy ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có B, O’, D thẳng hàng.

a) Chứng minh ∠CAF = ∠DAE

Trong (O) ta có: ∠CAF = ∠CBF (góc nội tiếp cùng chắn cung CF)

Trong (O’) ta có: ∠DAE = ∠DBE (góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

Mà ∠CBF = ∠DBE (đối đỉnh)

=> ∠CAF = ∠DAE .

b) AB là tia phân giác của ∠EAF

Nối CF và DE ta có: $\angle CFB = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\angle BED = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))

Xét ΔCFB và ΔDEB có:

$\angle CFB = \angle BED = 90^o$

$\angle CBF = \angle DBE$ (đối đỉnh)

=> $\angle FCB = \angle EDB$

Mặt khác: $\angle FAB = \angle FCB$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung FB)

$\angle EAB = \angle EDB$ (góc nội tiếp (O') cùng chắn cung EB)

=> $\angle FAB = \angle EAB$ hay AB là phân giác của góc $\angle EAF$.

c) Chứng minh CA.CD = CB.CE

Xét ΔCAE và ΔCBD có:

$\angle C$ chung

$\angle CEA = \angle BDA$ (góc nội tiếp (O') cùng chắn cung AB)

=> $\Delta CAE \sim \Delta CBD$ (g.g) => CA/CB = CE/CD hay CA.CD = CB.CE (1)

d) Chứng minh $CD^2 = CB.CE + BD.CF$

Chứng minh tương tự câu c) ta có: DA.DC = DB.DF (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

CA.CD + DA.DC = CB.CE + DB.DF

$\Leftrightarrow$ (CA + DA)CD = CB.CE + DB.DF

$\Leftrightarrow$ $CD^2 = CB.CE + DB.DF$

Bài 2: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE. Chứng minh rằng:

a) MA.MB = MC.MD.

b) Tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Hướng dẫn

a) Chứng minh MA.MB = MC.MD.

Xét ΔAMC và ΔDMB có:

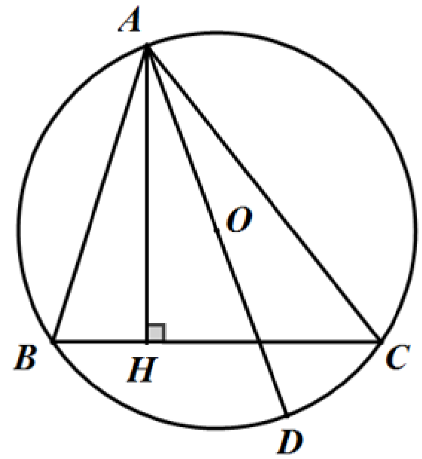
$\angle ACD = \angle ABD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

$\angle AMC = \angle BMD = 90^o$ (gt)

=> $\Delta AMC \sim \Delta DMB$ (g.g)

=> MA/MD = MC/MB => MA.MB = MC.MD

b) Chứng minh tứ giác ABEC là hình thang cân.



Vì ∠DCE = 90^o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> CD ⊥ CE CD ⊥ AB (gt) => AB // CE.

=> Tứ giác ABEC là hình thang (1).

Mặt khác: CE và AB là hai dây song song của đường tròn (O) chắn hai cung AC và BE

=> $AC = BE \Rightarrow AE = BC \Rightarrow ABE = BAC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Ta có $AE = BC$ (cmt) => EA = BC .

Mặt khác: ∠DAE = 90^o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (MA^2 + MD^2) + (MB^2 + MC^2)$

$= AD^2 + BC^2 = DE^2 = 4R^2$ không đổi

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm chính giữa của cung AB. Lấy điểm M thuộc cung BC và điểm N thuộc tia AM sao cho AN = BM. Kẻ dây CD song song với AM.

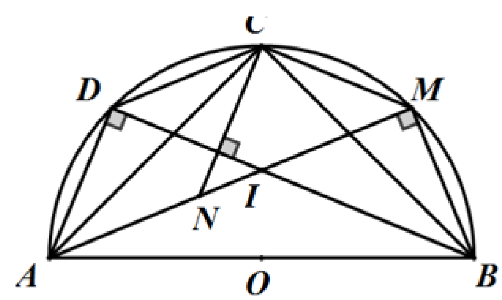
a) Chứng minh ΔACN = ΔBCM .

b) Chứng minh ΔCMN vuông cân.

c) Tứ giác ANCD là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn

a) Chứng minh ΔACN = ΔBCM



Xét ΔACN và ΔBCM có:

AC = BC (vì C là điểm chính giữa cung AB)

∠CAN = ∠CBN (góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

AN = BM (gt)

=> ΔACN = ΔBCM (c.g.c)

b) Chứng minh ΔCMN vuông cân

Vì ΔACN = ΔBCM (chứng minh a) => CN = CM => ΔCMN cân tại C (1)

Lại có ∠CMA = 1/2 sđ AC = 1/2. 90^o = 45^o (2)

Từ (1) và (2) => ΔCMN vuông cân tại C.

Vì CD // AM nên tứ giác ADCM là hình thang cân.

c) Tứ giác ANCD là hình gì? Vì sao?

Ta có: $\angle DAM = \angle CMN = \angle CNM = 45^o$

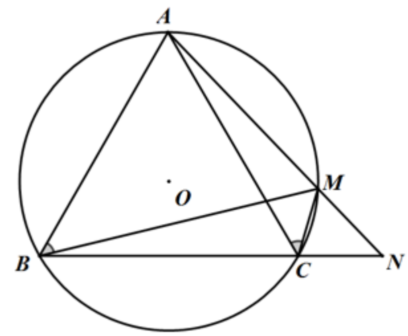
=> AD // CN. Vậy tứ giác ADCN là hình bình hành.

Bài 5: Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AC. Tia AM cắt BC tại N. Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = AM.AN$

b) $\angle ACM = \angle ANC$

Hướng dẫn



a) Chứng minh $AB^2 = AM.AN$

Vì ΔABC cân tại A $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$

Lại có $\angle ACB = \angle AMB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \angle ABN = \angle AMB$

Do đó: $\Delta ABM \sim \Delta ANB$ (g.g) => AB/AN = AM/MB

$\Rightarrow AB^2 = AN.\ AM$

b) Chứng minh $\angle ACM = \angle ANC$

Vì $\Delta ABM \sim \Delta ANB \Rightarrow \angle ABM = \angle ANB$

Mà $\angle ABM = \angle ACM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Do đó: $\angle ACM = \angle ANC$

Bài 6: Cho ΔABC có AD là tia phân giác trong của góc A. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC cắt AB ở F.

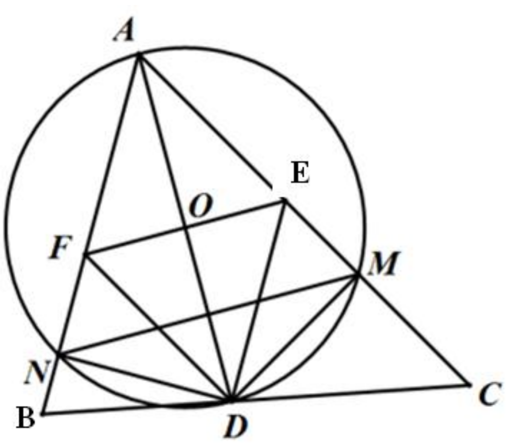
a) Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?

b) Đường tròn đường kính AD cắt AB và AC lần lượt tại các điểm M và N. Chứng minh: MN // EF.

Hướng dẫn

a) Chứng minh được Tứ giác AEDF là hình thoi.

b) Chứng minh: MN // EF.



ΔABC có AD là tia phân giác trong của góc A

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$

$\Rightarrow MD = ND \Rightarrow \angle DAC = \angle MND$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Lại có: $\angle AND = 90^o$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠DAN + ∠ADN = 90^o => ∠MND + ∠ADN = 90^o

=> MN // AD

Vì tứ giác AEDF là hình thoi nên EF ⊥ AD => MN // EF

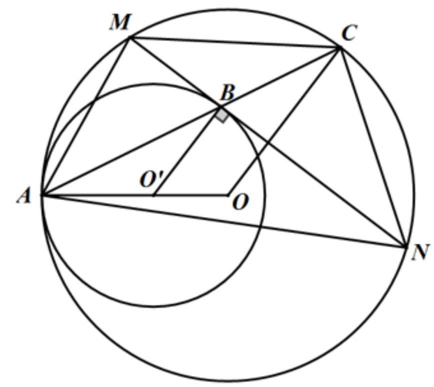
Bài 7: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc trong với nhau tại A, (R > R'). Qua điểm B bất kỳ trên (O') vẽ tiếp tuyến với (O') cắt (O) tại hai điểm M và N, AB cắt (O) tại C. Chứng minh rằng:

a) MN ⊥ OC

b) AC là tia phân giác của ∠MAN

Hướng dẫn

a) Chứng minh MN ⊥ OC



Vì Δ O'AB cân tại O' nên ∠O'AB = ∠O'BA

=> Δ OAC cân tại O nên ∠OAC = ∠OCA

=> ∠O'BA = ∠OCA mà hai góc này ở vị trí đồng vị

=> O'B // OC.

Mặt khác MN là tiếp tuyến của (O') tại B => O'B ⊥ MN.

Do đó OC ⊥ MN

b) Chứng minh AC là tia phân giác của ∠MAN

Trong đường tròn (O): => OC là đường trung trực của MN => CM = CN

=> $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{CN}$ => ∠MAC = ∠NAC Hay AC là tia phân giác của ∠MAN .

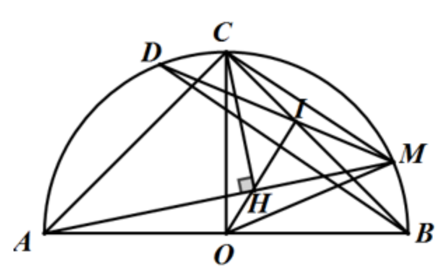
Bài 8: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm chính giữa cung AB. M là điểm bất kỳ trên cung BC, kẻ CH ⊥ AM.

a) Chứng minh ΔHCM vuông cân và OH là tia phân giác của ∠COM

b) Gọi I là giao điểm của OH với BC và D là giao điểm của MI với nửa đường tròn (O). Chứng minh MC // BD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh ΔHCM vuông cân và OH là tia phân giác của ∠COM



Vì C là điểm chính giữa của cung AB

=> ∠CMA = $\frac{1}{2}$sđ$AC = 45^o$

=> ΔHCM vuông cân tại H => CH = HM

Dễ thấy ΔCOH = ΔMOH (c.c.c) => ∠COH = ∠MOH

Vậy OH là tia phân giác của ∠COM

b) Chứng minh MC // BD.

Dễ thấy ΔCOI = ΔMOI (c.g.c) nên CI = MI => ΔCMI cân tại M.

Do đó ∠CMI = ∠MCI.

Lại có ∠CMD = ∠CBD (góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Suy ra ∠MCB = ∠CBD, mà hai góc này ở vị trí so le trong

=> MC // BD.

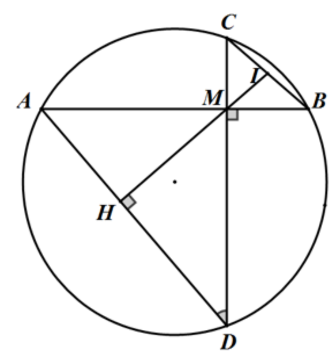
Bài 9: Qua điểm M nằm trong đường tròn (O) kẻ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:

a) Đường cao MH của tam giác AMD đi qua trung điểm I của BC.

b) Đường trung tuyến MI của ΔBMC vuông góc với AD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh Đường cao MH của tam giác AMD đi qua trung điểm I của BC



Ta có ∠ADC = ∠ABC (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) (1)

Lại có ∠AMH = ∠ADM (cùng phụ với góc ∠MAD)

Mà ∠AMH = ∠IMB (đối đỉnh) => ∠ADM = ∠IMB (2)

Do đó IM = IB.

Chứng minh tương tự ta có: IM = IC Suy ra IB = IC = IM

=> I là trung điểm của BC.

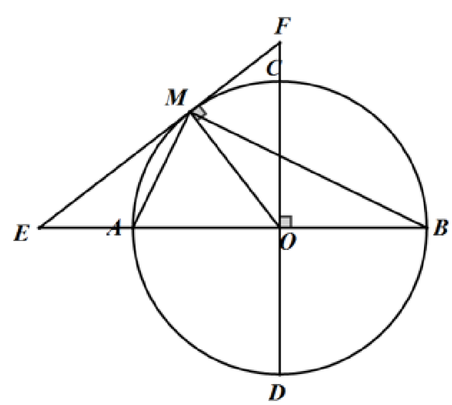
b) Học sinh tự chứng minh.

Bài 10: Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn (O; R). Qua điểm M thuộc cung nhỏ AC (M ≠ A, M ≠ E)kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt AB, CD lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh: ∠MFO = 2.∠MBO

b) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ AC sao cho ∠FEO = 30^o. Khi đó tính độ dài đoạn thẳng OE, ME, EF theo R.

Hướng dẫn



a) Chứng minh: ∠MFO = 2.∠MBO

Ta có: ∠MOA = 2∠MBO (cùng chắn cung MA)

Vì EF là tiếp tuyến với (O) tại M nên OM ⊥ EF

Ta có ∠MOA = ∠EFO (cùng phụ với góc ∠FEO)

Suy ra ∠EFO = 2∠MBO

b) Tính độ dài đoạn thẳng OE, ME, EF theo R.

Ta có: $\angle FEO = 30^o \Leftrightarrow \angle MOA = 60^o \Leftrightarrow \Delta AOM$ đều nên AM = OA = R.

Vậy nếu $M \in (O)$ và AM = R thì $\angle FEO = 30^o$

Khi đó ΔOME vuông tại M nên $ME = MO.\tan\angle MOA = \sqrt{3}R$; OE = 2MO = 2R

Vì ΔEOF vuông tại O nên $\cos\angle FEO = EO/EF \Rightarrow EF = EO/\cos\angle FEO = 2R/\cos 30^o = 4R\sqrt{3}/3$

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại M . Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường tròn tại N . Chứng minh rằng :

a) Tam giác MBC cân .

b) Ba điểm M , O , N thẳng hàng .

Bài 2 : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . M là điểm tuỳ ý trên nửa đường tròn (M khác A và B) . Kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$) . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1 đường kính AH và tâm O_2 đường kính BH . MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q .

a) Chứng minh MH = PQ .

b) Chứng minh hai tam giác MPQ và MBA đồng dạng .

c) Chứng minh PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2)

Bài 3 :Cho ΔABC đều , đường cao AH . M là điểm bất kỳ trên đáy BC . Kẻ $MP \perp AB$ và $MQ \perp AC$. Gọi O là trung của AM .

a) Chứng minh năm điểm A , P , M , H , Q cùng nằm trên một đường tròn .

b) Tứ giác OPHQ là hình gì ? chứng minh .

c) Xác định vị trí của M trên BC để PQ có độ dài nhỏ nhất .

Bài 4 : Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm M trên đường tròn (M khác A và B) sao cho MA < MB . Lấy MA làm cạnh vẽ hình vuông MADE (E thuộc đoạn thẳng MB) . Gọi F là giao điểm của DE và AB .

a) Chứng minh ΔADF và ΔBMA đồng dạng .

b) Lấy C là điểm chính giữa cung AB (không chứa M) . Chứng minh CA = CE = CB

c) Trên đoạn thẳng MC lấy điểm I sao cho CI = CA . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMB .

Bài 5 : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn . CA cắt nửa đường tròn ở M , CB cắt nửa đường tròn ở N . Gọi H là giao điểm của AN và BM .

a) Chứng minh $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH . Chứng minh MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)

c) Giả sử CH =2R . Tính số đo cung MN .

Bài 6 : Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC lấy một điểm P tuỳ ý . Gọi Q là giao điểm của AP và BC

a) Chứng minh BC^2= AP . AQ .

b) Trên AP lấy điểm M sao cho PM = PB . Chứng minh BP+PC= AP.

c) Chứng minh $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$.

Bài 7: Cho (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì ?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh rằng OD $\perp$ AK.

Bài 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A, B, O nằm trên (O'). Dây AC của (O) cắt (O') ở D, dây OE của (O') cắt (O) ở F. Chứng minh :

a) OD $\perp$ BC.

b) Điểm F cách đều ba cạnh của tam giác ABE.

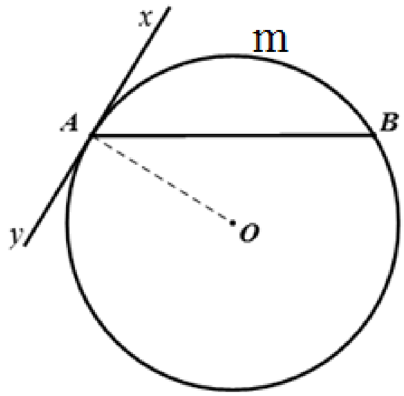
Bài 9: Cho hai đường thẳng song song. Một đường tròn tiếp xúc với một đường thẳng tại A và cắt đường thẳng kia tại B, C. Trên đường tròn lấy một điểm D (không trùng A, B, C). Chứng minh rằng A cách đều hai đường thẳng BD và CD.

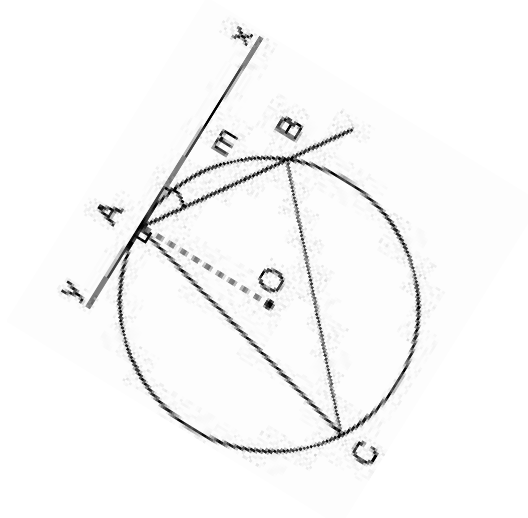
Bài 10: MA và MB là hai tiếp tuyến của (O). Vẽ (M;MA), C là một điểm nằm trên cung AB của (M) (cung AB nằm trong đường tròn (O)). Tia AC, BC cắt (O) ở P, Q. Chứng minh rằng : P và Q đối xứng với nhau qua O.

Bài 11: Trên cạnh CD của hình vuông ABCD ta lấy một điểm M khác C, D. Các đường tròn đường kính CD và AM cắt nhau tại điểm thứ hai N (khác D). Tia DN cắt BC tại P. Chứng minh rằng: AC $\perp$ PM.

CHỦ ĐỀ 10: GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY.

1. Định nghĩa





Cho xy là tiếp tuyến tại A với đường tròn (O).

Góc ∠BAx có đỉnh A nằm trên đường tròn, **cạnh Ax là một tia tiếp tuyến** còn **cạnh kia chứa dây cung AB**. Góc ∠BAx được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

Dây AB căng hai cung. Cung nằm bên trong góc là cung bị chắn.

Trên hình vẽ, góc ∠BAx có cung bị chắn là cung nhỏ AB (hay AmB) , góc ∠BAy có cung bị chắn là cung lớn AB (hay AcB)

2. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$xAB = \frac{1}{2} sđ AmB$ Hoặc $yAB = \frac{1}{2} sđ AcB$

3. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

$xAB = ACB = \frac{1}{2} sđ AmB$

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), (AB < AC). Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho MA^2 = MB.MC. Chứng minh rằng: MA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

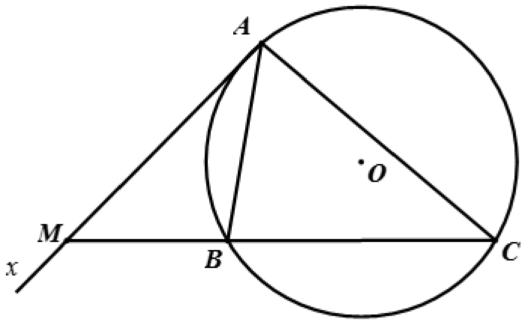
Hướng dẫn

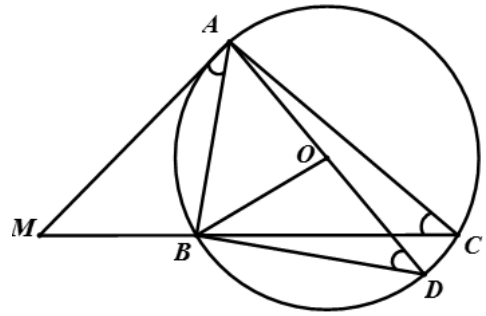
Vì MA^2 = MB.MC => MA/MB = MC/MA

Xét ΔMAC và ΔMBA có: ∠M chung

MA/MB = MC/MA

=> $\Delta MAC \sim \Delta MBA$ (c.g.c) => $\angle MAB = \angle MCA$ (1)





Kẻ đường kính AD của (O) . Ta có $\angle ACB = \angle ADB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà $\angle MAB = \angle MCA$ (chứng minh trên) Suy ra $\angle MAB = \angle ADB$ (2)

Lại có $\angle ABD = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle BAD + \angle BDA = 90^o$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\angle BAD + \angle MAB = 90^o$ hay $\angle MAO = 90^o$ => $OA \perp MA$

Do $A \in (O)$ => MA là tiếp tuyến của (O).

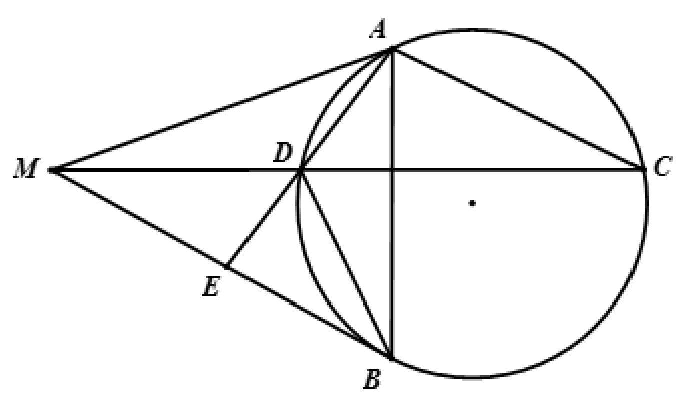
Bài 2: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) tại A và B. Qua A vẽ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn tại C. Nối C với M cắt đường tròn (O) tại D. Nối A với D cắt MB tại E. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABE \sim \Delta BDE$; $\Delta MEA \sim \Delta DEM$.

b) E là trung điểm của MB.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\Delta ABE \sim \Delta BDE$; $\Delta MEA \sim \Delta DEM$.



Xét ΔABE và ΔBDE có:

$\angle E$ chung

$\angle BAE = \angle DBE$ (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BD)

=> $\Delta ABE \sim \Delta BDE$ (g.g)

Vì AC // MB nên $\angle ACM = \angle CMB$ (so le trong)

Mà $\angle ACM = \angle MAE$ (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD)

Suy ra: $\angle CMB = \angle MAE$

Xét ΔMEA và ΔDEM có:

$\angle E$ chung

$\angle MAE = \angle CMD$ (chứng minh trên)

=> $\Delta MEA \sim \Delta DEM$ (g.g)

b) Chứng minh E là trung điểm của MB

Theo chứng minh a) ta có: $\Delta ABE \sim \Delta BDE$ => AE/BE = BE/DE => $EB^2 = AE.DE$

$\Delta MEA \sim \Delta DEM$ => ME/DE = EA/EM => $ME^2 = DE.EA$

Do đó $EB^2 = EM^2$ hay EB = EM.

Vậy E là trung điểm của MB.

Bài 3: Cho điểm C thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm D thuộc đọan AO kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AC và BC lần lượt lại E và F. Tiếp tuyến C với nửa đường tròn cắt EF tại M và cắt AB tại N.

a) Chứng minh M là trung điểm của EF.

b) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn (O) sao cho ΔACN cân tại C.

Hướng dẫn

a) Chứng minh M là trung điểm của EF

Ta có $\angle MCA = 1/2$ sđ$\overset{\frown}{AC}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung chắn cung AC) (1)

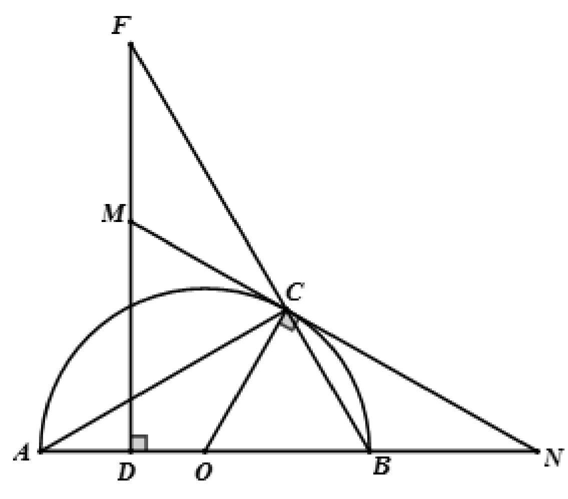
Lại có $\angle MEC = \angle AED = 90^o - \angle EAD = 90^o - 1/2$ sđ$\overset{\frown}{BC}$ $= 1/2$ sđ$\overset{\frown}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle MCE = \angle MEC$

Vậy ΔMEC cân tại M, suy ra MC = ME.

Chứng minh tương tự ta có MC = MF.

Suy ra ME = MF hay M là trung điểm của EF.



b) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn (O) sao cho ΔACN cân tại C.

ΔACN cân tại C khi và chỉ khi $\angle CAN = \angle CNA$

Vì MN là tiếp tuyến với (O) tại C nên $OC \perp MN$

=> $\angle CNA = 90^o - \angle COB = 90^o - 2.\angle CAN$

Do đó:

$\angle CAN = \angle CNA \Leftrightarrow \angle CAN = 90^o - 2.\angle CAN \Leftrightarrow 3\angle CAN = 90^o$

=> $\angle CAN = 30^o$ => Sđ$\overset{\frown}{BC} = 60^o$

Vậy ΔACN cân tại C khi C nằm trên nửa đường tròn (O) sao cho SđBC = 60^o .

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Gọi M là một điểm thay đổi trên tiếp tuyến Bx của (O). Nối AM cắt (O) tại N. Gọi I là trung điểm của AN.

a) Chứng minh: ΔAIO ~ ΔBMN ; ΔOBM ~ ΔINB

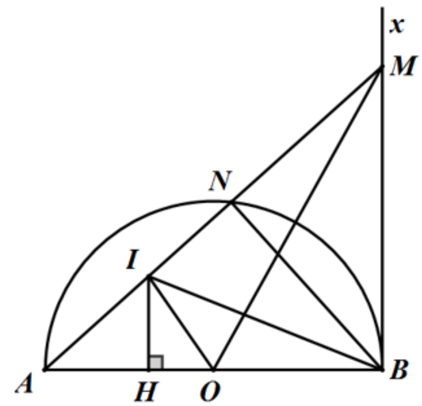
b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích ΔAIO có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: ΔAIO ~ ΔBMN ; ΔOBM ~ ΔINB

Vì I là trung điểm của AN => OI ⊥ AN => ∠AIO = ∠ANB = 90^o

Do Bx là tiếp tuyến với (O) tại B



=> ∠NBM = ∠IAO = 1/2 sđ BN

=> ΔAIO ~ ΔBMN (g.g)

Vì ∠OIM = ∠OBM = 90o

=> các điểm B, O, I, M cùng thuộc đường tròn đường kính MO

suy ra ∠BOM = ∠BIN

Xét ΔOBM và ΔINB có:

∠OBM = ∠INB

∠BOM = ∠BIN

=> ΔOBM ~ ΔINB (g.g)

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích ΔAIO có giá trị lớn nhất

Kẻ IH ⊥ AO ta có: $S_{\Delta AIO}$ = 1/2 AO.IH

Vì AO không đổi nên SΔAIO lớn nhất ⇔ IH lớn nhất.

Nhận thấy: Khi M chuyển động trên tia Bx thì I chạy trên nửa đường tròn đường kính AO.

Do đó IH lớn nhất khi IH là bán kính của đường tròn

=> ΔAIO vuông cân tại I nên ∠IAH = 45^o.

=> ΔABM vuông cân tại B nên BM = BA = 2R

Vậy khi M thuộc Bx sao cho BM = 2R thì $S_{\Delta AIO}$ lớn nhất.

Bài 5: Cho đường tròn (O; R) và dây AB, gọi I là trung điểm của dây AB. Trên tia dối của tia BA lấy điểm M. Kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn, (C,D ≠ (O)) .

a) Chứng minh rằng: Năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là giao điểm của tia OM với (O). Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp .

Hướng dẫn

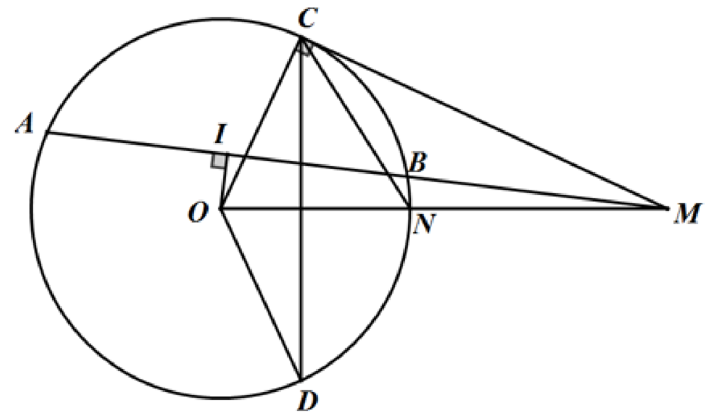
a) Chứng minh rằng: Năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

Vì MC, MD là các tiếp tuyến tại C, D với đường tròn (O)

=> ∠OCM = ∠ODM = 90^o (1)

Mặt khác I là trung điểm của dây AB nên OI ⊥ AB hay ∠OIM = 90^o (2)

Từ (1), (2) suy ra 5 điểm M, C, D, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính OM.



b) Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp

Vì MC, MD là các tiếp tuyến của (O)

=> MO là phân giác của ∠CMD (3)

Mà: ∠DCN = ∠NCM = 1/2 sđ CN

Suy ra CN là phân giác của ∠DCM (4)

Từ (3) và (4) suy ra N là giao điểm các đường phân giác trong của ΔCMD

=> N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCMD

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1 : Từ một điểm M cố định ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ một tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm) và một cát tuyến MAB của đường tròn đó .

a) Chứng minh : MT^2 = MA . MB

b) Trường hợp cát tuyến MAB đi qua tâm O . Cho MT = 20 cm , và cát tuyến dài nhất cùng xuất phát từ M bằng 50cm. Tính bán kính R của đường tròn (O) .

Bài 2: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M . Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn . Gọi H là hình chiếu của C trên AB .

a) Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc MCH .

b) Giả sử MA =a, MC = 2a . Tính AB và CH theo a .

Bài 3: Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A . Đường kính AB của đường tròn (O) cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai C khác A . Từ B vẽ tiếp tuyến BP với đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O) tại Q . Chứng minh AP là phân giác của góc QAB

Bài 4: Cho hai đường tròn tâm O , O_1 tiếp xúc ngoài nhau tại A . Trên đường tròn (O) lấy hai điểm phân biệt B , C khác A. Các đường thẳng BA , CA cắt đường tròn (O_1) tại P và Q . Chứng minh PQ // BC .

Bài 5: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và (AB < AC) . Đường tròn (I) đi qua B và C , tiếp xúc với AB tại B cắt đường thẳng AC tại D . Chứng minh rằng : OA ⊥ BD .

Bài 6 : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB= 2R, dây AC và tia tiếp tuyến Bx nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn . Tia phân giác của góc CAB cắt dây BC tại F , cắt nửa đường tròn tại H , cắt Bx ở D.

a) Chứng minh FB = DB và HF = HD

b) Gọi M là giao điểm của AC và Bx . Chứng minh AC . AM = AH . AD

c) Tính tích AF .AH + BF.BC theo bán kính R của đường tròn (O)

Bài 7 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Phân giác góc BAC cắt đường tròn (O) ở M . Tiếp tuyến kẻ từ M với đường tròn cắt các tia AB và AC lần lượt ở D và E . Chứng minh :

a) BC // DE

b) ΔAMB và ΔMCE đồng dạng ,ΔAMC và ΔMDB đồng dạng.

c) Nếu AC = CE thì MA^2 = MD . ME

Bài 8 : Cho hai đường tròn (O) và (O_1) ở ngoài nhau . Đường nối tâm OO_1 cắt các đường tròn (O) và (O_1) tại các điểm A , B , C , D theo thứ tự trên đường thẳng . Kẻ tiếp tuyến tuyến chung ngoài EF ($E \in (O)$, $F \in (O_1)$) . Gọi M là giao điểm của AE và DF , N là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác MENF là hình chữ nhật .

b) $MN \perp AD$

c) ME . MA = MF . MD

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông ở A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính 5cm . Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt tia phân giác của góc ABC tại K . BK cắt AC tại D và BD = 4cm . Tính độ dài BK .

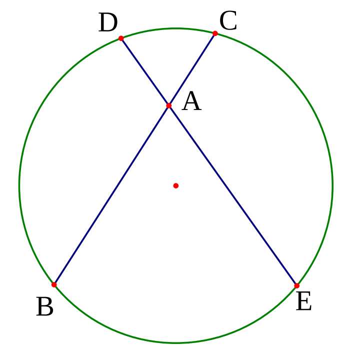
CHỦ ĐỀ 11: GÓC CƠ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CƠ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN.

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

*) Với đỉnh A nằm trong đường tròn O là giao điểm của hai dây của đường tròn

=> Ta có góc BAE ; BAD là các góc có đỉnh bên trong đường tròn.

Số đo của góc này bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh đó.



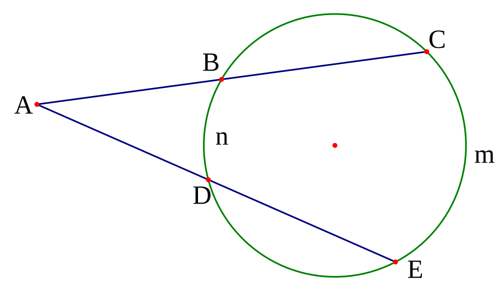
$$+\ \text{sđ}BAE = \frac{\text{sđ}BE + \text{sđ}CD}{2}.$$

$$+\ \text{sđ}BAD = \frac{\text{sđ}BD + \text{sđ}CE}{2}$$

*) Với đỉnh A nằm ở ngoài đường tròn O là giao điểm của đường éo dài của hai dây của đường tròn

=> Ta có CAE (hoặc BAD) là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn.

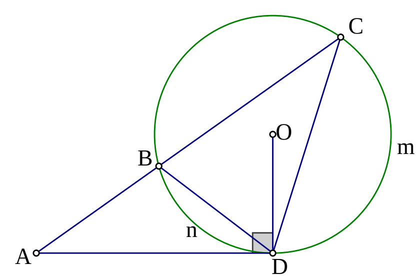
Số đo góc nằm ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.



$$\text{sđ}CAE = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}EmC - \text{sđ}BnD\right)$$

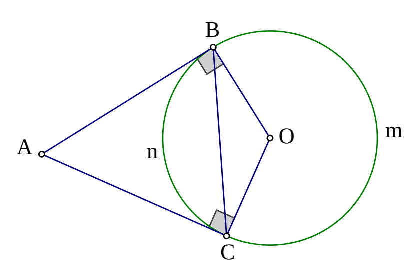
* Cần lưu ý đến các trường hợp sau:

+ Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O). AD là tiếp tuyến của (O), qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn tại B,C thì:



$$CAD = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}CmD - \text{sđ}BnD\right)$$

+ Với Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O). AB, AC là 2 tiếp tuyến của (O), (A, B là các tiếp điểm) thì:



$$BAC = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}BmC - \text{sđ}BnC\right)$$

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Vẽ phân giác trong AD của góc A (D ≠ (O)). Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC. Nối BE cắt AD và AC lần lượt tại I và tại K, nối DE cắt AC tại J. Chứng minh rằng:

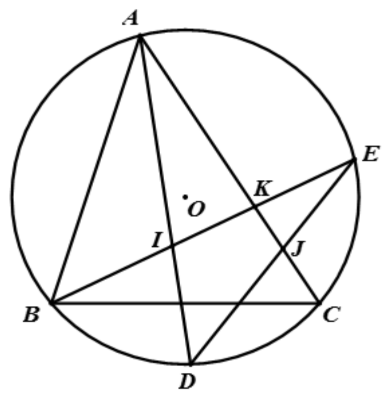
a) ∠BID = ∠AJE .

b) AI.JK = IK.EJ.

Hướng dẫn

a) Ta có ∠BID là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung BD và cung AE

$$BID = \frac{1}{2}(\text{sđ}BD + \text{sđ}AE)$$



∠AJE là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung CD và AE

$$AJE = \frac{1}{2}(\text{sđ}CD + \text{sđ}AE)$$

Mà AD là phân giác của góc A nên $BD = CD$

Suy ra ∠BID = ∠ẠJE

b) Xét ΔAIK và ΔEJK có:

+) ∠AKI = ∠EKJ (đối đỉnh)

+) ∠IAK = ∠KEJ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau BD và cung CD)

Do đó ΔAIK ~ ΔEJK (g.g)

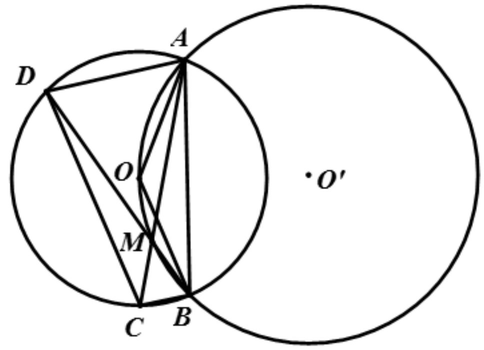
=> AI/EJ = IK/JK => AI.JK = IK.EJ

Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại 2 điểm A, B sao cho O ≠ (O'). Lấy điểm M thuộc đường tròn (O’), M ở trong đường tròn (O). Tia AM và BM cắt đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng:

a) $AB = CD$ (Cung nhỏ của đường tròn (O))

b) Tứ giác ABCD là hình thang cân.

Hướng dẫn



a) Vì ∠AMB là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung AB và CD nên: $AMB = \frac{1}{2}\left(sđAB + sđCD\right)$

Mặt khác: ∠AMB = ∠AOB (hai góc nội tiếp (O') cùng chắn cung AB lớn)

∠AOB = sđ AB (góc ở tâm đường tròn (O)).

$\frac{1}{2}\left(sđAB + sđCD\right) = sđAB \Rightarrow sđAB = sđCD \Rightarrow AB = CD$

b) Trong đường tròn (O):

$DAC = \frac{1}{2}sđCD$; $ACB = \frac{1}{2}sđAB$

Mà $AB = CD$ => $DAC = ACB$

Vì hai góc này ở vị trí so le trong,

suy ra AD // BC (1)

Theo câu a), ta có: ∠ADC = ∠DAB (2 góc chắn 2 cung bằng nhau) (2)

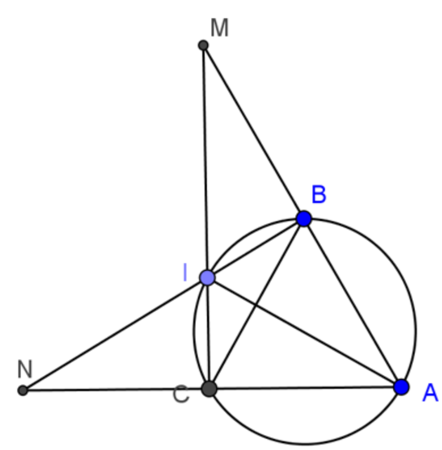
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCD là hình thang cân.

Bài 3: Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Điểm I chuyển động trên cung nhỏ BC. AB cắt CI tại M, AC cắt BI tại N. Chứng minh rằng:

a) BC^2 = BM.CN

b) ∠AIN có số đo không đổi.

Hướng dẫn



a) Vì ΔABC đều nên: $sđAB = sđBC = sđAC = 120^o$

Ta có: ∠ANB là góc có đỉnh ngoài đường tròn (O) nên:

$$ANB = \frac{1}{2}\left(sđAB - sđCI\right) = 60^o - \frac{1}{2}sđCI$$

Lại có: $BCI = \frac{1}{2}sđBI$ (góc nội tiếp (O) chắn cung BI)

$$= \frac{1}{2}\left(sđBC - sđCI\right) = 60^o - \frac{1}{2}sđCI$$

Suy ra ∠ANB = ∠BCI (1)

Tương tự ta có: ∠AMC = ∠CBI (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ΔBCM ~ ΔCNB (g-g) => BC/NC = BM/BC => BC^2 = BM.NC

b) Ta có: ∠AIB = ∠ACB = 60^o

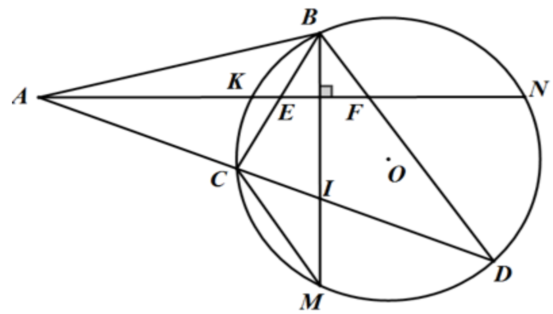
=> $\angle AIN = 180^o - \angle AIB = 120^o$ không đổi

Bài 4: Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD với đường tròn (C nằm giữa A và D). Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác của ∠BAC, BM cắt CD tại I. Chứng minh rằng:

a) BM là tia phân giác của

b) $MD^2 = MI.MB$

Hướng dẫn



Giả sử tia phân giác của ∠BAC cắt BC tại E, cắt BD tại E và cắt đường tròn (O) tại K.

a) Ta có:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\text{sđBN} - \text{sđBK}\right) \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left(\text{sđDN} - \text{sđCK}\right)$$

Mà $\angle A_1 = \angle A_2$ (gt)

=> $\text{sđBN} - \text{sđBK} = \text{sđDN} - \text{sđCK}$ ⇔ $\text{sđBN} + \text{sđCK} = \text{sđDN} + \text{sđBK}$

⇔ ∠BEF = ∠BFE

=> ΔBEF cân tại B.

Mà BM là đường cao của ΔBEF

Suy ra BM là tia phân giác của ∠CBD

b) Vì BM là phân giác của ∠CBD

$CM = MD \Rightarrow MDC = MBD$

Do đó: ΔMDI ~ ΔMBD (g.g)

=> $MD^2 = MI.MB$

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho đường tròn (O) và dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm E nằm ngoài đường tròn. Đường thẳng kẻ từ E song song với AD cắt BC tại F. Kẻ tiếp tuyến FG với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $2EFC = \text{sđAB} + \text{sđCD}$

b) ΔFEC ~ ΔFBE, từ đó suy ra $EF^2 = FB.FC$

Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O’) ở ngoài nhau. Đường thẳng OO’ cắt (O) và (O’) lần lượt lại các điểm A, B, C, D. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF của hai đường tròn ($E \neq (O)$, $F \neq (O')$) . Gọi M là giao điểm của AE và DF, N là giao điểm của EB và DC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác MENF là hình chữ nhật.

b) MN ⊥ AD

c) ME.MA = MF.MD.

Bài 3: Trên đường tròn (O; R) đặt liên tiếp các dây cung: AB = BC = CD < R. AB cắt CD tại E. Tiếp tuyến tại B và D với đường tròn (O) cắt nhau tại F. Chứng minh rằng:

a) $\Delta EBC \sim \Delta FBD$

b) $\Delta EBF \sim \Delta CBD$

c) BC // EF.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD có A, B, C, D nằm trên đường tròn (O); AB và CD cắt nhau tại M; AD và BC cắt nhau tại N.

a) Tính số đo các góc của tứ giác ABCD nếu $\angle AMD = 30^o$ và $\angle BND = 40^o$.

b) Hai phân giác của góc M và góc N cắt nhau tại I. Chứng minh rằng IM ⊥ IN

Bài 5: Cho đường tròn tâm O và điểm M ngoài đường tròn đó . Từ M kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đến đường tròn (B nằm giữa M và C) . Phân giác của góc BAC cắt BC ở D , cắt đường tròn ở E . Chứng minh :

a) MD = MA

b) AD . AE = AC . AB

Bài 6: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau ở I và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E . Chứng minh rằng :

a) ΔBDI là tam giác cân .

b) DE là đường trung trực của IC .

c) IF // BC (F là giao điểm của DE và AC).

Bài 7: Cho đường tròn tâm O và điểm S ở ngoài đường tròn . Từ S kẻ hai tiếp tuyến SA và SD và cát tuyến SBC tới đường tròn (B ở giữa S và C).

a) Phân giác của góc BAC cắt dây cung BC ở M . Chứng minh SA = SM .

b) AM cắt đường tròn ở E. Gọi G là giao điểm của OE và BS; F là giao điểm của AD với BC . Chứng minh $SA^2 = SG . SF$.

c) Biết SB = a ; Tính SF khi $BC = \dfrac{2a}{3}$

Bài 8: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (I) kẻ hai tiếp tuyến ME và MF (E và F là hai tiếp điểm) . Kẻ dây EG của đường tròn (I) song song MF. Gọi H là giao điểm của MG với (I) và K là giao điểm của EH với MF .

a) Chứng minh $KF^2 = KE . KH$.

b) Chứng minh K là trung điểm của MF .

Bài 9: Cho đường tròn (O) đường kính EF và điểm G nằm trên nằm trên đường tròn (O) sao cho EG > GF. Trên tia GF lấy điểm H sao cho GH =GE . Vẽ hình vuông EGHI có đường chéo GI cắt (O) tại K .

a) Chứng minh ΔKFH cân .

b) Tiếp tuyến tại E với đường tròn (O) cắt FK ở M . Chứng minh ba điểm M , I , H thẳng hàng

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có A, B, C , D nằm trên đường tròn (O) . Các tia AB và DC cắt nhau tại E , các tia CB và DA cắt nhau tại F . Hai phân giác của các góc E và F cắt nhau tại K **.** Chứng minh rằng : $EKF = 90^0$.

Bài 11: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O . điểm D di chuyển trên cung AC . Gọi E là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng :

a) $AFB = ABD$

b) Tích AE . BF không đổi .

Bài 12: Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A,B và C . Gọi M,N và P theo thứ tự là điểm chính giữa của các cung AB,BC và AC. BP cắt AN tại I , NM cắt AB tại E . Gọi D là giao điểm của AN và BC . Chứng minh rằng :

a) ΔBNI cân .

b) AE.BN = EB.AN .

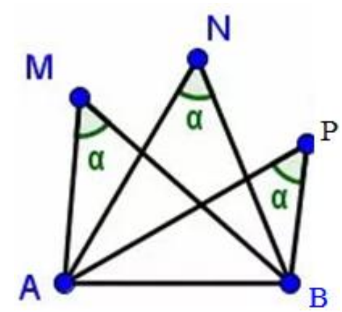
c) EI // BC

d) $\dfrac{AN}{BN} = \dfrac{AB}{BD}$

CHỦ ĐỀ 12: CUNG CHỨA GÓC.

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1/ Cung chứa góc.



* Nếu các điểm (ví dụ M, N, P) nằm cùng phía đối với đoạn thẳng AB và cùng nhìn AB dưới một góc bằng nhau $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=\widehat{APB}=\alpha$ thì ta nói các điểm này thuộc cùng một cung chứa góc **α** dựng trên đoạn AB.

2/ Bài toán quỹ tích.

* Để chứng minh một điểm M chạy trên một cung tròn cố định (Tìm quỹ tích điểm M)

Bước 1: Dự đoán điểm M sẽ chạy trên cung tròn dựng trên đoạn thẳng Cố Định nào.

Bước 2: Xem đoạn cố định (ví dụ đoạn AB) là dây cung của đường tròn nào đã biết, từ đó chỉ ra góc nội tiếp có số đo không đổi chắn cung AB. Hoặc tìm một điểm N cố định với $\widehat{ANB}$ có số đo không đổi.

Bước 3: Chứng minh $\widehat{AMB}$ bằng số đo của góc không đổi.

=> Điểm M thuộc cung chứa góc không đổi dựng trên đoạn AB

* Để hoàn thiện một bài Toán tìm quỹ tích điểm ta cần chứng minh phần thuận và phần đảo.

+ Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

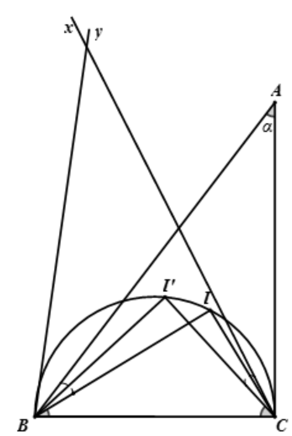
+ Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

+ Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm có tính chất T là hình H.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC có cạnh BC cố định và ∠A = α không đổi ($0^o < \alpha < 180^o$). Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC



Hướng dẫn giải

* Phần thuận:

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên BI là phân giác của ∠B

=> ∠IBC = 1/2∠ABC

CI là phân giác ∠ACB, do đó: ∠ICB = 1/2 ∠ACB

Suy ra: ∠IBC + ∠ICB = 90^o - α

Trong ΔBCI có $\angle BIC = 180^o - 1/2(\angle ABC + \angle ACB)$

$= 180^o - (90^o - 1/2\ \alpha) = 90^o + 1/2\ \alpha$

=> Điểm I nhìn đoạn thẳng BC cố định dưới một góc $90^o + 1/2\alpha$

=> I thuộc cung chứa góc $90^o + 1/2\ \alpha$ dừng trên đoạn thẳng BC (trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).

* Phần đảo:

Lấy I' thuộc cung chứa góc $90^o + 1/2\ \alpha$ nói trên.

Vẽ các tia Bx và Cy sao cho BI' là tia phân giác của $\angle CBy$ và CI' là tia phân giác của góc $\angle BCx$.

Hai tia By và Cx cắt nhau tại A'.

Vì I' thuộc cung chứa góc $90^o + 1/2\ \alpha$ dựng trên đoạn BC nên: $\angle BI'C = 90^o + 1/2\ \alpha$

Do đó: $\angle I'BC + \angle I'CB = 180^o - \angle BIC = 90^o - 1/2\alpha$

Vì BI' là phân giác của $\angle A'BC$ và CI' là phân giác của $\angle A'CB$

=> $\angle A'BC + \angle A'CB = 2(\angle I'BC + \angle I'CB) = 180^o - \alpha$

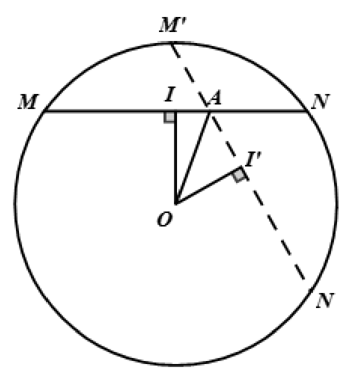
Mặt khác I' là giao điểm các tia phân giác của $\angle A'BC$ và $\angle A'CB$

=> I' là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A'BC$

* Kết luận: Quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC là cung chứa góc $90^o + 1/2\ \alpha$ dựng trên đoạn BC.

Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm trong đường tròn . Một đường thẳng d quay quanh điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm M và N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Hướng dẫn giải



* Phần thuận:

Vì I là trung điểm của dây MN suy ra $OI \perp MN$

=> $\angle OIA = 90^o$

Vì điểm I nhìn đoạn OA cố định dưới góc 90^o nên I nằm trên đường tròn đường kính OA.

* Phần đảo:

Lấy điểm I' bất kỳ thuộc đường tròn đường kính OA.

Nối AI' cắt đường tròn (O) tại M' và N'

Vì I' thuộc đường tròn đường kính OA nên $\angle OI'A = 90^o$ hay $OI' \perp M'N'$

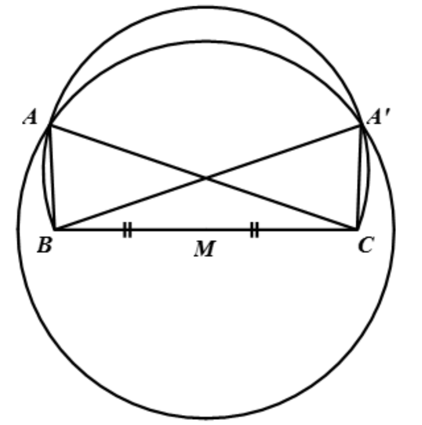
=> I' là trung điểm của M'N' (theo quan hệ giữa đường kính và dây cung)

* Kết luận: Quỹ tích trung điểm I của MN là đường tròn đường kính OA.

Bài 3: Dựng ΔABC biết BC = 8cm; ∠A = 60^o và trung tuyến AM = 5cm.

Hướng dẫn giải

* Phân tích:



Giả sử đã dựng được ΔABC thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vì ∠BAC = 60^o

=> A thuộc cung tròn chứa góc 60^o dựng trên đoạn BC.

Lại có: AM = 5cm

=> A thuộc đường tròn tâm M, bán kính 5cm.

* Cách dựng:

Dựng đoạn thẳng BC = 8cm. Xác định trung điểm M của BC.

Dựng cung chứa góc 60^o trên đoạn thẳng BC.

Dựng đường tròn tâm M, bán kính 5cm. Gọi giao điểm của cung chứa góc và đường tròn (M, 5cm) là A và A'.

Ta có hai tam giác ABC và A'BC đều thỏa mãn đề bài.

* Chứng minh:

Vì A thuộc cung chứa góc 60^o dựng trên đoạn BC nên ∠A = 60^o

Lại có: A thuộc đường tròn (M, 5cm) nên AM = 5cm.

BC = 8cm theo cách dựng.

* Biện luận: Bài toán luôn có nghiệm hình.

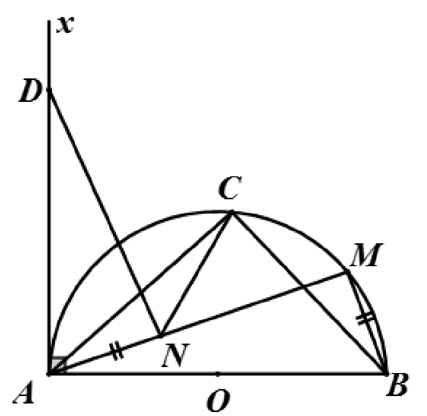
Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, có C là điểm chính giữa của cung AB. M là một điểm chuyển động trên cung BC . Lấy điểm N thuộc đoạn AM sao cho AN = MB. Vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn; D là điểm thuộc Ax sao cho AD = AB .

a) Chứng minh rằng ΔMNC vuông cân.

b) Chứng minh rằng DN ⊥ AM

c) Tìm quỹ tích điểm N.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: ΔANC = ΔBMC (c.g.c)

Do đó: CN = CM

Lại có: ∠CMA = 1/2 SđAC = 1/2 .90^o = 45^o

Từ (1) và (2) suy ra ΔMNC vuông cân tại C.

b) Xét ΔAND và ΔBMA có:

AD = AB

∠DAN = ∠ABM

AN = BM (gt)

=> ΔAND = ΔBMA (c-g-c) do đó ∠AND = ∠BMA .

Mà ∠BMA = 90^o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra ∠AND = 90^o hay DN ⊥AM.

c) Tìm quỹ tích điểm N.

* Phần thuận:

Vì ∠AND = 90^o N nhìn đoạn AD cố định dưới một góc 90^o

=> N thuộc đường tròn đường kính AD.

Giới hạn: Nếu M ≡ A thì N ≡ C, nếu M ≡ C thì N ≡ A do đó quỹ tích điểm N là cung nhỏ AN của đường tròn đường kính AD (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Ax có chứa nửa đường tròn (O)).

* Phần đảo: Học sinh tự chứng minh.

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN) . Các tia AM và BN cắt nhau ở I . Các dây AN và BM cắt nhau ở K .

a) Tính MIN và AKB .

b) Tìm quỹ tích điểm I và quỹ tích điểm K khi dây MN thay đổi vị trí .

c) Chứng minh I là trực tâm của tam giác KAB .

d) AB và IK cắt nhau tại H . Chứng minh HA.HB = HI.HK .

e) Với vị trí nào của dây MN thì tam giác IAB có diện tích lớn nhất ? Tính giá trị diện tích lớn nhất đó theo R .

Bài 2: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , C là điểm chính giữa của cung AB . M là một điểm chuyển động trên cung CB . Gọi H là hình chiếu của C trên AM . Các tia OH và BM cắt nhau tại I . Tìm quỹ tích các điểm I .

Bài 3:Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định . Một điểm C chạy trên đường tròn . Kẻ CD vuông góc với AB . Trên OC đặt một đoạn OM = CD . Tìm quỹ tích các điểm M .

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn đó .Vẽ hình vuông BMDC ở ngoài tam giác AMB .Tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn cắt CD ở E .

a) Chứng minh AB = BE .

b) Tìm quỹ tích các điểm C .

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác . M ,N là các tiếp điểm trên các cạnh AC , BC . Gọi H là giao điểm của AI và MN . Chứng minh rằng điểm H thuộc đường tròn đường kính BI .

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD . Tia phân giác của góc D cắt các đường thẳng AB , BC theo thứ tự ở I , K . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK . Chứng minh rằng :

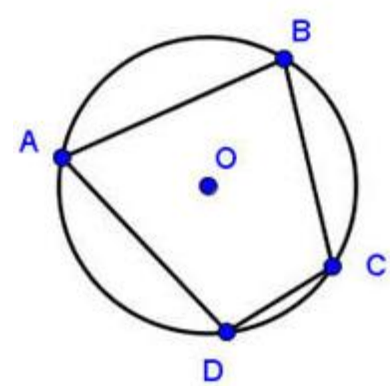
a) $OB \perp IK$

b) Điểm O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 7: Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định , M là một điểm chạy trên đường tròn . Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho MI = 2MB. Tìm tập hợp các điểm I khi M chạy trên đường tròn (O) .

CHỦ ĐỀ 13: TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ



1. Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp). Đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

2. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng .

3. Nếu trong một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

4. Nếu một tứ giác lồi có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

5. Chú ý:

+ Chứng minh 4 điểm cùng thuộc một đường tròn tức là chứng minh tứ minh tứ giác nội tiếp.

+ Chứng minh 5 điểm cùng thuộc một đường tròn tức là chứng minh hai tứ giác (có chung 3 điểm) cùng nội tiếp.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

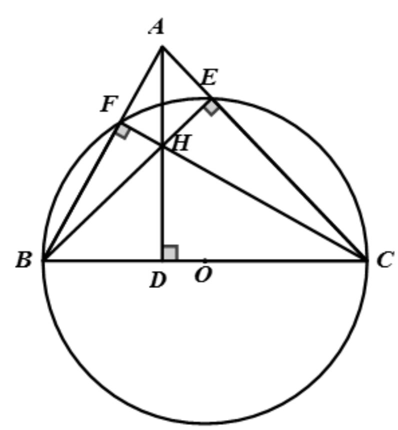
I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BCEF nội tiếp.

b) HA.HD = HB.HE = HC.HF.

Hướng dẫn giải



a) Ta có ∠BEC = ∠BFC = 90^o

=> các điểm E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Vẽ đường tròn đường kính BC. Xét ΔBHF và ΔCHE có:

+) ∠EBF = ∠ECF (hai góc nội tiếp cùng chắn).

+) ∠FHB = ∠EHC(đối đỉnh).

Suy ra ΔBHF ~ ΔCHE (g.g)

BH/CH = HF/HE hay HB.HE = HC.HF (1)

Chứng minh tương tự ta có: HA.HD = HB.HE (2)

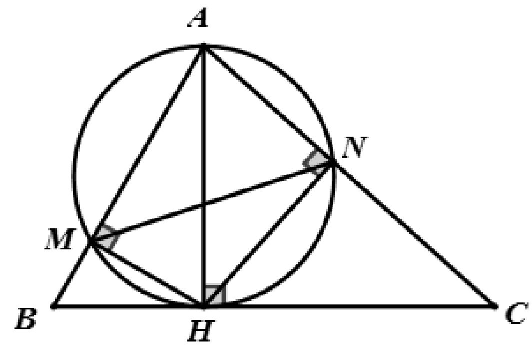
Từ (1) và (2) suy ra: HA.HD = HB.HE = HC.HF.

Bài 2: Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Các điểm M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Chứng minh rằng:

a) AM.AB = AN.AC.

b) Tứ giác BMNC nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\angle AMH = \angle ANH = 90^o$ (gt)

=> các điểm M, N cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

=> $\angle AMN = \angle AHN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Mặt khác: $\angle AHN = \angle ACH$

Do đó ΔAMN ~ ΔACB (g.g)

=> AM/AC = AN/AB hay AM.AB = AN.AC.

b) Theo chứng minh câu a) ta có:

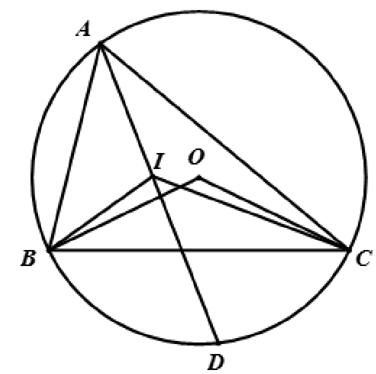
$\angle AMN = \angle ACH$

Suy ra $\angle BMN + \angle ACH = \angle BMN + \angle AMN = 180^o$

Vậy tứ giác BMNC nội tiếp.

Bài 3: Cho tam giác ABC có góc. Các điểm O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng bốn điểm B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải



Gọi D là giao điểm khác của A của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Ta có: $\angle BID = \angle IAB + \angle ABI = 1/2 \angle A + 1/2 \angle B$

$\angle CID = \angle IAC + \angle ACI = 1/2 \angle A + 1/2 \angle C$

Do đó: $\angle BIC = \angle BID + \angle CID$

$= 1/2 \angle A + 1/2\angle B + 1/2\angle C + 1/2\angle A = 1/2\angle A + 90^o$

Mặt khác: $\angle BOC = 2\angle A = 120^o$.

Do đó hai điểm I và O cùng nhìn đoạn BC dưới những góc bằng nhau.

Ngoài ra hai điểm I và O cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa A, bờ BC.

Do đó B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4: Cho tam giác ABC nhọn có $\angle A > \angle B > \angle C$. Đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với cạnh AB, AC tại M và N. Gọi P và Q lần lượt là các giao điểm của CI, BI với đường thẳng MN. Chứng minh rằng:

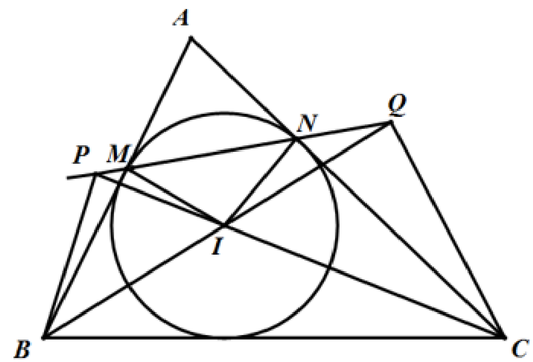
a) Tứ giác INQC nội tiếp.

b) Tứ giác BPQC nội tiếp.

Hướng dẫn giải

a) Vì đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC tại M và N nên AM = AN

=> ΔAMN cân tại A.



Ta có: $\angle CNQ = \angle ANM$ (đối đỉnh)

$= (180^o - \angle A)/2 = (\angle B + \angle C)/2$

$= \angle IBC + \angle ICB = \angle CIQ$

Tứ giác INQC có hai điểm liên tiếp I và N cùng nhìn cạnh QC dưới các góc bằng nhau nội tiếp được một đường tròn.

b) Vì INQC là tứ giác nội tiếp nên $\angle INC = \angle IQC$

Vì AC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N nên IN ⊥ AC hay $\angle INC = 90^o$

=> $\angle IQC = \angle BQC = 90^o$ (1)

Chứng minh tương tự câu a) ta có tứ giác IMPB nội tiếp

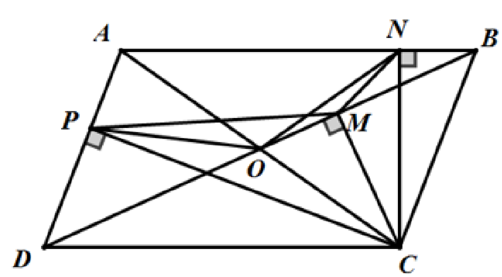
=> $\angle IMB = \angle IPB = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle BPC = \angle BQC = 90^o$

=> tứ giác BPQC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD có $\angle BAD = 90^o$, có tâm là O. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên BD, AD, AB. Chứng minh bốn điểm M, N, P, O cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\angle CPA = \angle CNA = 90^o$ (gt)

=> tứ giác ANCP nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC.

Suy ra $\angle PON = 2\angle PCN$

Lại có: $\angle PCN + \angle NAP = 180^o$

=> $\angle PCN = 180^o - \angle NAP = \angle ABC$ (do AD // BC)

Do đó $\angle PON = 2\angle ABC$ (1)

Mặt khác $\angle PMN = 180^o - (\angle PMB + \angle NMD)$

Mà tứ giác CDNM nội tiếp đường tròn đường kính CD

=> $\angle NMD = \angle NCD = 90^o - \angle CDN = 90^o - \angle ABC$

Lại có tứ giác BCMP nội tiếp đường tròn đường kính BC

=> $\angle PMB = \angle PCB = 90^o - \angle ABC$

=> $\angle PCB = 180^o - (90^o - \angle ABC + 90^o - \angle ABC) = 2\angle ABC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle PON = \angle PMN$ do đó tứ giác POMN nội tiếp.

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax và dây AC bất kỳ. Tia phân giác của góc xAC cắt nửa đường tròn tại D, các tia AD và BC cắt nhau tại E.

a) Chứng minh ΔABE cân.

b) Đường thẳng BD cắt AC tại K, cắt tia Ax tại F . Chứng minh tứ giác ABEF nội tiếp.

c) Cho $CAB = 30^0$. Chứng minh AK = 2CK.

Bài 2. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB; AC và cát tuyến AMN không đi qua tâm O . Gọi I là trung điểm MN.

a) Chứng minh $AB^2 = AM. AN$

b) Chứng minh tứ giác ABIO nội tiếp .

c) Gọi D là giao điểm của BC và AI. Chứng minh $\frac{IB}{IC} = \frac{DB}{DC}$

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của BAC cắt BC tại D và cắt đường tròn tại M. Phân giác ngoài tại Acắt đường thẳng BC tại E và cắt đường tròn tại N. Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh:

a) MN vuông góc với BC tại trung điểm của BC.

b) $ABN = EAK$

c) AK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 4. Cho ba điểm A, B,C nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và MN.

a) Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB. AC$

b) Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh IN // AB

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R . Điểm C nằm trên (O) mà AC > BC. Kẻ CD $\perp$ AB (D $\in$ AB) . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại E. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AE tại M. OM cắt AC tại I . MB cắt CD tại K.

a) Chứng minh M là trung điểm AE.

b) Chứng minh IK // AB.

c) Cho OM = AB . Tính diện tích tam giác MIK theo R.

Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F ; BF cắt EC tại H. Tia AH cắt đường thẳng BC tại N .

a) Chứng minh tứ giác HFCN nội tiếp .

b) Chứng minh FB là phân giác của EFN .

c) Giả sử AH = BC . Tính số đo góc BAC của ΔABC.

(Trích đề thi tốt nghiệp và xét tuyển vào lớp 10- năm học 1999- 2000)

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia AB lấy điểm D nằm ngoài đoạn AB và kẻ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng CD và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC. Chứng minh:

a) Tứ giác EFDA nội tiếp .

b) AF là phân giác của EAD .

c) Tam giác EFA và tam giác BDC đồng dạng .

d) Các tam giác ACD và ABF có cùng diện tích .

(Trích đề thi tốt nghiệp và xét tuyển vào lớp 10- năm học 2000- 2001)

CHỦ ĐỀ 14: ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN. CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN. HÌNH QUẠT TRÒN.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I/ Độ dài đường tròn. Cung tròn

1. Độ dài C (chu vi) của một đường tròn bán kính R là C = 2πR

Nếu gọi d là độ dài đường kính của đường tròn (d = 2R) thì C = π.d

Trong đó π ≈ 3,14

2. Trên đường tròn bán kính R, độ dài L của một cung n^o là: L ≈ πRn/180 .

II/ Diện tích hình tròn, quạt tròn.

1. Diện tích S của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$

2. Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^o la:

$S_{quạt} = \pi R^2 n / 360$ hay $S_{quạt} = L.R/2$ (L là độ dài cung n^o của hình quạt tròn)

3. Hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy.

Diện tích hình viên phân bằng hiệu (hoặc tổng) diện tích của một hình quạt tròn và diện tích của một tam giác nếu góc ở tâm hình quạt nhỏ hơn 180^o (hoặc lớn hơn 180^o) .

4. Hình vành khăn là phần hình tròn giới hạn bởi đường tròn đồng tâm

Diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm bán kính R_1 và R_2 là:

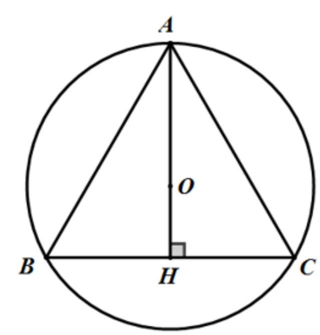
$S_{vành\ khăn} = \pi(R_1^2 - R_2^2)$.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh 5cm.

Hướng dẫn giải



Giả sử ΔABC đều cạnh 5cm nội tiếp (O; R).

Nối OA cắt BC tại H => AH ⊥ BC và H là trung điểm của BC.

ΔAHB vuông tại H nên: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - (5/2)^2 = 75/4$

=> $AH = 5\sqrt{3}/2$ (cm)

Vì ΔABC đều có O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên O cũng là trọng tâm của tam giác đó, do đó:

OA = 2/3 AH = 2/3 . $5\sqrt{3}/2$ => R = OA = $5\sqrt{3}/3$

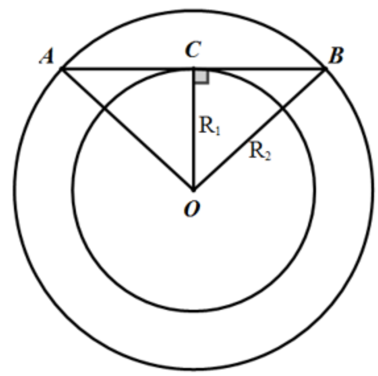
Độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: C = 2πR = $10\sqrt{5}$. π/3 ≈ 54,39(cm)

Bài 2: Cho hai đường tròn đồng tâm O có bán kính lần lượt là R_1 = 3cm; R_2 = 6cm. Một dây AB của đường tròn (O;R_1) tiếp xúc với đường tròn (O;R_2) tại C.

a) Tính độ dài cung nhỏ AB của đường tròn (O;R_2) .

b) Tính độ dài đường tròn đường kính AB.

Hướng dẫn giải



a) Vì tiếp tuyến tại C với đường tròn (O;R_1) nên OC ⊥ AB

Tam giác OAC vuông tại C có: cos ∠AOC = OC/OA = 1/2

=> ⊥AOC = 60^o => ∠AOB = 120^o

Vậy độ dài cung AB của đường tròn (O;R_2) là:

I = πRn/180 ≈ 12,56 (cm)

b) Vì tam giác OAC vuông tại C nên: $AC^2 = OA^2 - OC^2$ = 36 - 9 = 27

=> AC = 3√3 (cm)

Trong đường tròn (O;R_2) ta có: OC ⊥ AB

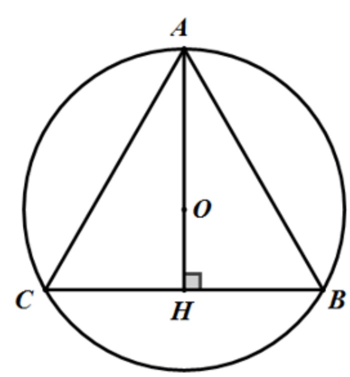
=> C là trung điểm của AB

=> Đường tròn đường kính AB có tâm là C và bán kính R= AC = $3\sqrt{3}$ (cm).

Vậy độ dài của đường tròn đường kính AB là: C = 2πR ≈ 32,63(cm^2

Bài 1: Tính diện tích hình tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC đều cạnh a.

Hướng dẫn giải



Nối AO cắt BC tại H

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên O đồng thời là trực tâm, trọng tâm của tam giác ABC. Do đó:

AH ⊥ BC và HB = HC = BC/2 = a/2

Xét tam giác vuông ABH vuông tại H có:

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - (a/2)^2 = 3a^2/4$

=> AH = $a\sqrt{3}/2$

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên: AO = 2/3 AH = 2/3 . $a\sqrt{3}/2 = a\sqrt{3}/3$

Vậy diện tích hình tròn (O) là: $S = \pi R^2 = \pi(a\sqrt{3}/3)^2 = \pi a^2/3$ (đvdt)

Bài 2: Một hình vuông và một hình tròn có diện tích bằng nhau. Hỏi hình nào có chu vi lớn hơn?

Hướng dẫn giải

Giả sử hình vuông có cạnh a và hình tròn có bán kính R.

Vì hình vuông và hình tròn có diện tích bằng nhau nên ta có: $a^2 = \pi R^2 \Leftrightarrow a = R\sqrt{\pi}$

Mặt khác: Chu vi hình vuông là $C_1 = 4a = 4R\sqrt{\pi}$

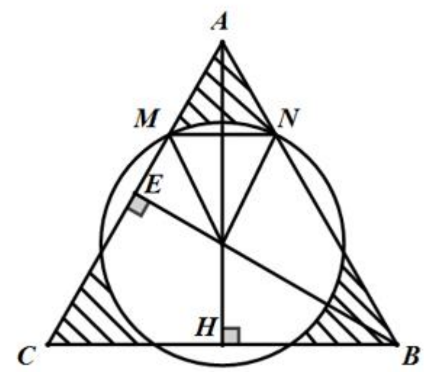
Chu vi hình tròn là $C_2 = 2\pi R$

=> $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ => $C_1 > C_2$

Vậy hình vuông có chu vi lớn hơn.

Bài 3: Cho tam giác ABC đều có tâm O, cạnh 6cm. Vẽ đường tròn (O;2cm). Tính diện tích của phần tam giác nằm ngoài hình tròn (O).

Hướng dẫn giải



Gọi diện tích phần phải tính (phần gạch sọc trên hình vẽ) là S thì: $S = 3(S_{AMON} - S_{\text{Quạt tròn OMN}})$

Giả sử giao điểm của đường tròn (O; 2cm) với hai cạnh AB, AC lần lượt là M và N.

Nối CO cắt AB tại E => CE là đường cao của tam giác đều ABC cạnh 6cm nên: $CE = 6\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$ (cm)

Xét tam giác OEM vuông tại E nên:

$EM^2 = OM^2 - OE^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$ (cm)

=> EM = 1(cm) => AM = 2EM = 2cm = AN

Dễ thấy tứ giác AMON là hình thoi có $OA = OC = 2\sqrt{3}$ (cm) và MN = 2cm (do tam giác MON đều) nên: $S_{AMOC} = AO.MN/2 = 2\sqrt{3}$ (cm^2)

Diện tích hình quạt tròn OMN là: $S_{\text{quạt tròn OMN}} = \pi R^2 n/360 = 2\pi/3$ (cm^2)

Do diện tích tam giác cong AMN là: $S_{AMN} = S_{AMON} - S_{\text{quạt tròn OMN}} = 2\sqrt{3} - 2\pi/3$ (cm^2)

Vậy diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn là: $S = 3(2\sqrt{3} - 2\pi/3) = 2(3\sqrt{3} - \pi) \approx 4,1$ (cm^2)

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho đường tròn (O) và haiđiểm M và N bất kì thuộc đường tròn sao cho góc MON =150^o .

a) Tính độ dài cung MN.

b) Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi góc MON.

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Biết góc A bằng $60°$, tính diện tích hình viên phân tạo bởi cung nhỏ BC và dây BC.

Bài 3: Từ điểm c ở ngoài (O ; R) sao cho OC = 2R, kẻ tiếp tuyến CA, CB của đường tròn (O) (B, A là tiếp điểm). Tia oc cắt (O) tại D.

a) Tính diện tích phần tam giác ABC nằm ngoài hình tròn (O ; R).

b) Tính diện tích hình tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại c với đường tròn cắt AB, AD kéo dài lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh AB.AE = AD.AF.

b) Tính diện tích phần tam giác AEF nằm ngoài đường tròn (O), biết AB = 6 và AD = $6\sqrt{3}$

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A, vẽ các tiếp tuyến MP, MP' với đường tròn. Dây PP' cắt OM tại N và cắt OA tại B.

a) Chứng minh rằng : $OA.OB = OM.ON = R^2$

b) Chứng minh tứ giác POMA nội tiếp được trong đường tròn. Khi điểm M di chuyển trên d thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác POMA chuyển động trên đường cố định nào ?

c) Cho góc PMP' = $60°$ và R = 8, tính diện tíeh phần mặt phẳng giới hạn bởi MP, MP' và cung lớn PP'.

Bài 6: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R, là điểm trên nửa đường tròn sao cho cung AC bằng 60^o, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Tính diện tích hình giới hạn bới nửa đường tròn đường kính AB và phân ngoài đường tròn (I).

TỔNG ÔN HÌNH LỚP 9 CHƯƠNG III

I. GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1 (1) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH. Đường tròn này cắt các cạnh AB, AC thứ tự ở D và E

a) Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng

b) Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O kẻ từ D và E cắt cạnh BC tương ứng tại M và N. Chứng minh M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn HB và HC

c) Cho AB = 8 cm, AC = 19 cm. Tính diện tích tứ giác MDEN

Hướng dẫn:

a) Dễ chứng minh

b) Vì MD = MH và OD = OH, nên OM là trung trực của HD. Suy ra OM //AB. Từ đó OM là đường trung bình của tam giác AHB. Suy ra MB = MH. Tương tự cho NC = NH

c) $S_{MDEN} = 2.S_{MON} = 2.\frac{1}{4}S_{ABC} = 38\ (cm^2)$

Bài 2 (1) Đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E (E nằm giữa C và D). Chứng minh:

a) Góc BED = góc DAE

b) DE^2 = DA.DB

Hướng dẫn:

a) Góc BED = góc BCE + góc CBE = góc DAB + góc EAB = góc DAE

b) Ta có góc ADE = góc ABC = góc CAB = góc EDB. Từ đó chứng minh ΔBED đồng dạng với ΔEAD. Suy ra đpcm

Bài 3 (1) Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến PA với đường tròn. Qua trung điểm B của đoạn PA vẽ cát tuyến BCD với (O) (theo thứ tự ấy) Các đường thẳng PC và PD cắt (O) lần lượt ở E và F. Chứng minh

a) Góc DCE = góc DPE + góc CAF

b) AB^2 = BC. BD

c) AP // EF

Hướng dẫn:

a) 2(Góc DPE + góc CAF) = Sđ cung ED – Sđ cung CF + Sđ cung CF = 2.Góc DCE (đpcm)

b) Chứng minh tam giác BAC đồng dạng với tam giác BDA. Suy ra đpcm

c) Từ kết quả câu b) ta chứng minh được tam giác BPC đồng dạng với tam giác BDP (c. g. c). suy ra góc BPC = góc BDP = góc PEF. Suy ra đpcm

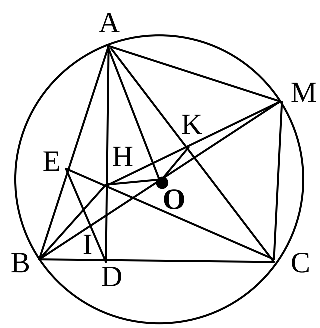
II- TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Bài 1 (2). Tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao AD và CE cắt nhau tại H. Tia BO cắt (O) tại M, gọi I là giao của BM và DE, K là giao của AC và HM

a) Chứng minh các tứ giác AEDC và CMID nội tiếp

b) Chứng minh OK vuông góc với AC

c) Cho góc AOK = 60^0. Chứng minh tam giác HBO cân



Hướng dẫn:

a) Góc IDB = góc IMC (cùng = góc BAC), suy ra tứ giác CMID nội tiếp

b) Hãy chứng minh tứ giác AMCH là hình bình hành. Suy ra OK vuông góc với AC

c) Theo giả thiết 2OK = OA = OB. Mà OK là đường trung bình của tam giác MBH, nên 2OK = BH. Suy ra đpcm

Bài 2 (2) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn gần B hơn, có tiếp điểm thứ tự là E và F. Qua A kẻ cát tuyến song song với EF cắt hai đường tròn (O_1) và (O_2) thứ tự tại C, D. Đường thẳng CE và DF cắt nhau ở I. Chứng minh:

a) ΔIEF = ΔAEF

b) IA vuông góc với CD

c) Tứ giác IEBF nội tiếp

d) Đường thẳng AB đi qua trung điểm của EF

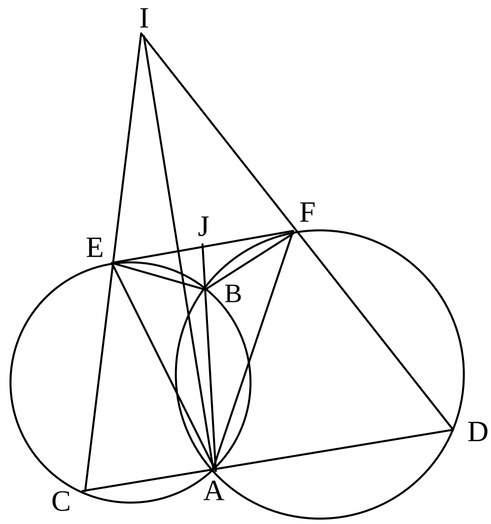
Hướng dẫn:

a) Chứng minh ΔIEF = ΔAEF (g.c.g),

b) Từ a) suy ra IE = AE. Tam giác IEA cân tại E có EF là phân giác góc IEA nên cũng đồng thời là đường cao. Suy ra đpcm

c) Góc IEB + góc IFB = Góc BAC + góc BAD = 180^0. từ đó suy ra đpcm

d) Gọi J là giao điểm của AB và EF. Hãy chứng minh JE^2 = JB.JA và JF^2 = JB.JA, để suy ra đpcm

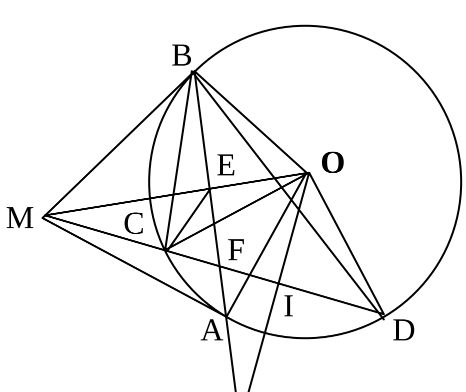


Bài 3 (2) Từ điểm M nằm ngoài (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A và B là các tiếp điểm), và một cát tuyến MCD (theo thứ tự ấy). Gọi I là trung điểm của CD. Gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng MO, MD, OI

a) Chứng minh R^2 = OE.OM = OI.OK

b) Chứng minh năm điểm M, A, B, O, I cùng thuộc một đường tròn

c) Khi cung CAD nhỏ hơn cung CBD. Chứng minh góc DEC = 2.góc DBC



Hướng dẫn:

a) Áp dụng hệ thức lượng với tam giác vuông OAM, kết hợp xét hai tam giác đồng dạng MIO và KEO (g.g), suy ra đpcm

b) Vì các góc MAO, MBO, MIO cùng bằng 90^0. Suy ra đpcm

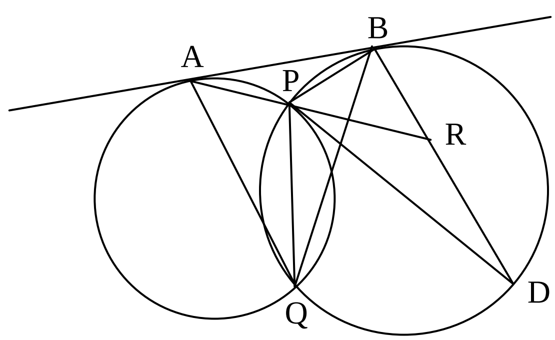
c) Chứng minh được ME.MO = MC.MD (= MA^2), suy ra hai tam giác MEC và MDO đồng dạng (c.g.c), nên góc MEC = góc MDO. Suy ra tứ giác CEOD nội tiếp. Suy ra đpcm

Bài 4 (2) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại P và Q, tiếp tuyến chung với hai đường tròn gần P hơn, có tiếp điểm với (O_1) và (O_2) thứ tự là A và B. Tiếp tuyến của (O_1) tại P cắt (O_2) tại điểm thứ hai D khác P. Đường thẳng AP cắt đường thẳng BD tại R. Hãy chứng minh.

a) Góc QAP = góc QPD = góc QBD và bốn điểm A, Q, B, R cùng thuộc một đường tròn

b) Tam giác BPR cân

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với PB và RB



Hướng dẫn:

a) Vì góc QAP = góc QBD (= góc QPD) nên bốn điểm A, Q, B, R cùng thuộc một đường tròn

b) Ta có góc BRP = góc BQA (theo a) = góc BQP + góc AQP = góc ABP + góc BAP = góc BPR (góc ngoài của tam giác). Suy ra đpcm

c) Ta có góc BPR = góc ABP + góc BAP = góc PQB + góc BQR (theo a) = góc PQR, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với PB. Tương tự cho RB

Bài 5 (2) Cho hình vuông ABCD, điểm M thay đổi trên cạnh BC (M không trùng với B) và điểm N thay đổi trên cạnh CD (N không trùng với D) sao cho góc MAN =45^0. BD cắt AN và AM tương ứng tại P và Q.

a) Chứng minh tứ giác ABMP nội tiếp

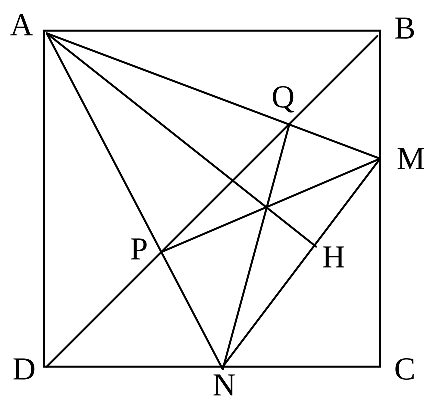
b) Chứng minh năm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn

c) Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (A; AB) khi M và N thay đổi

d) Kí hiệu diện tích của tam giác APQ là S_1 và diện tích của tứ giác PQMN là S_2. Chứng minh tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ không đổi khi M và N thay đổi.

Hướng dẫn:

a) Góc PAM = góc PBM = 45^0



b) Từ câu a suy ra góc APM = 180^0 – góc ABM = 90^0. Tương tự góc AQN = 90^0. Từ đó năm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn

c) Kẻ AH vuông góc với MN. Góc AMH = góc APQ = góc AMB. Nên ΔAMH = ΔAMB (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra AH = AB. Suy ra đpcm

d) Tam giác APQ đồng dạng với tam giác AMN nên S_{APQ}: S_{AMN} = $(AP : AM)^2 = \cos^2(45^0) = \frac{1}{2}$. Từ đó $S_1 = S_2$

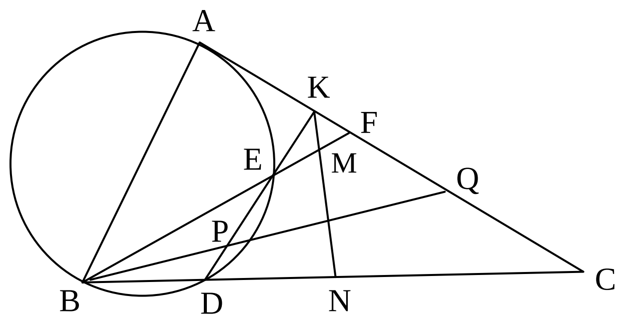
Bài 6 (2) Cho tam giác ABC vuông tại A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy một điểm E. Đường thẳng BE cắt AC tại F

a) Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp

b) Kéo dài DE cắt AC ở K. Tia phân giác góc CKD cắt EF và CD tại M và N. Tia phân giác góc CBF cắt DE và CF tại P và Q. Chứng minh tam giác BEP đồng dạng với tam giác BCQ, và tam giác KPQ cân

c) Tứ giác MPNQ là hình gì? Vì sao?

d) Gọi r, r_1, r_2 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ADB, ADC. Chứng minh $r^2 = r_1^2 + r_2^2$



Hướng dẫn

a) Vì góc BED = góc DCF (= góc BAD), suy ra đpcm

b) Tam giác BEP đồng dạng với tam giác BCQ (g. g). Suy ra góc BPE = góc BQC nên góc KPQ = góc KQP nên tam giác KPQ cân

c) Tam giác KPQ cân tại K nên phân giác góc K đồng thời là trung tuyến và đường cao của tam giác KPQ. Có nghĩa là MN là đường trung trực của đoạn PQ. Hoàn toàn tương tự PQ là đường trung trực của MN. Từ đó tứ giác MPNQ là hình thoi

d) Ta chứng minh được các tam giác ABC, DBA, DAC đồng dạng. Áp dụng tính chất tỉ số bán kính đường tròn nội tiếp hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng, ta suy ra $\frac{r}{BC}=\frac{r_1}{AB}=\frac{r_2}{AC}\Leftrightarrow\frac{r^2}{BC^2}=\frac{r_1^{\,2}}{AB^2}=\frac{r_2^{\,2}}{AC^2}\Rightarrow\frac{r^2}{BC^2}=\frac{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}}{BC^2}\Leftrightarrow$ đpcm

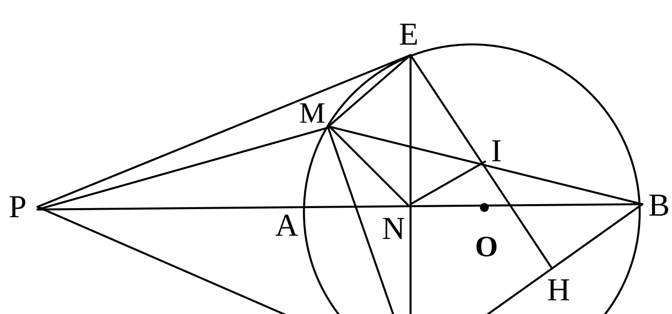
Bài 7 (2) Từ điểm P ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến PE và PF. Tia PO cắt đường tròn ở A và B (A nằm giữa P và O). Kẻ EH vuông góc với FB. Gọi I là trung điểm EH. Tia BI cắt (O) tại điểm thứ hai M (M khác B), EF cắt AB tại N. Chứng minh

a) NI // FB

b) Tứ giác MEIN nội tiếp và góc EMN = 90^0

c) Bốn điểm P, M, N, F cùng thuộc một đường tròn

d) AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEM



Hướng dẫn:

a) NI là đường trung bình của tam giác EFH, suy ra đpcm

b) Góc EMI = góc ENI (= góc EFB), suy ra đpcm

c) Góc MFP = góc MBF (1). Mà góc MNP và góc MBF lần lượt phụ với hai góc bằng nhau là góc MNE và góc MIE nên góc MNP = góc MBF (2) . Từ (1) và (2) suy ra đpcm

d) Góc MPN = góc MFE = góc MEP, suy ra đpcm

Bài 8 (2) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm của tam giác, M là một điểm trên cung nhỏ BC

a) Xác định vị trí của điểm M để tứ giác BHCM là hình bình hành

b) Gọi N và E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC. Chứng minh các tứ giác AHCE và AHBN nội tiếp và ba điểm N, H, E thẳng hàng

c) Xác đinh vị trí của điểm M để độ dài đoạn NE lớn nhất

Hướng dẫn:

a) Để tứ giác BHCM là hình bình hành thì BM phải vuông góc với AB. Ngược lại đúng. Vậy M đối xứng với A qua O

b) Giả sử AH cắt BC tại A_1, CH cắt AB tại C_1. Khi đó góc AHC = góc A_1HC_1 (1). Còn góc AEC = góc AMC = góc ABC (2). Do tứ giác A_1BC_1H nội tiếp nên từ (1) và (2) suy ra tứ giác AHCE nội tiếp. Tương tự với tứ giác AHBN. Từ các kết quả trên ta có góc AHE + góc AHN = góc ACE + góc ABN = góc ACM + góc ABM = 180^0. Suy ra ba điểm N, H, E thẳng hàng

c) Chứng minh được tam giác ANE cân tai A (vì AN = AM = AE) và góc ở đỉnh NAE = 2. góc BAC (cố định) nên cạnh đáy NE lớn nhất khi và chỉ khi cạnh bên AN lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất khi và chỉ khi M đối xứng với A qua O

Bài 9 (2) Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn tâm O đi qua B và C. Qua A vẽ các tiếp tuyến AE, AF với (O). Gọi I là trung điểm BC, N là trung điểm của EF

a) Chứng minh $AE^2 = AF^2 = AB.AC$

b) Đường thẳng FI cắt đường tròn (O) ở E’. Chứng minh EE’ // AB

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI chạy trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi

Hướng dẫn:

a) Dễ chứng minh

b) Tứ giác AOIF nội tiếp (vì góc AFO = góc AIO = 90^0). Nên suy ra góc 2AIF = 2góc AOF = góc EOF = 2góc EE'F. Suy ra EE' // AB

c) Gọi K là giao điểm của BC và EF. Sử dụng các cặp tam giác đồng dạng sẽ chứng minh được AK.AI = AN.AO = AE^2 = AB.AC, mà AI, AB, AC cố định nên AK cố đinh, suy ra điểm K cố định. Từ đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI hay tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ONKI chạy trên chạy trên đường trung trực của đoạn KI (cố định)

Bài 10 (2) Cho đường tròn tâm O. Từ điểm M bên ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến MC, MD với (O) (C, D là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MAB không đi qua tâm O (A nằm giữa M và B. Tia phân giác của góc ACB cắt AB tại E

a) Chứng minh MC = ME

b) Chứng minh DE là phân giác của góc ADB

c) Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn

d) Chứng minh IM là phân giác của góc CID

Hướng dẫn:

a) góc MEC = góc EBC + góc BCE = góc ACM + góc ECA = góc ECM. Suy ra đpcm

b) Theo câu a, ta suy ra ME = MD, nên góc MED = góc MDE. Tức là góc MBD + góc BDE = góc MDA + góc ADE (1). Nhưng góc MBD = góc MDA (2). Từ (1) và (2) suy ra góc BDE = góc ADE, suy ra đpcm

c) Dễ chứng minh

d) Theo câu c) tứ giác CIDM nội tiếp, lại chú ý rằng MC = MD, nên suy ra đpcm

Bài 11 (2) Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB và AC (B và C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BO cắt BC, BE thứ tự ở H và K. Gọi M là trung điểm của DE

a) Chứng minh năm điểm A, B, O, M, C cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh góc KDM = góc BCM

c) Chứng minh DH = HK

Hướng dẫn:

a) Dễ chứng minh

b) Góc KDM = góc BCM (vì cùng bằng góc BAM)

c) Từ câu b), suy ra tứ giác HDCM nội tiếp. Từ đó góc HMD = góc HCD = góc BED, suy ra HM // BE (1). Lại có DM = ME (2) nên DH = HK

Bài 12 (2) Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D và E là đối xứng của M lần lượt qua AB và AC. Vẽ hình bình hành DMEI.

a) Tính góc DME

b) Chứng minh bốn điểm D, A, E, I cùng thuộc một đường tròn

c) Chứng minh AI // BC

Hướng dẫn:

a) Dễ tính được góc DME = 120^0

b) Tính được góc DAE = 120^0 và góc DIE = 120^0. Suy ra đpcm

c) Tính được góc IAC = góc IAE + góc EAC = góc IDE + góc EAC = góc DEM + góc KAM = góc HKM + góc KAM = góc HAM + góc KAM = góc BAC = 60^0 = góc ACB. Suy ra đpcm

BÀI TẬP HÌNH HỌC LỚP 9

CHỦ ĐỀ: BÀI TẬP TỔNG HỢP - PS 3

Bài 1: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt (O) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Chứng minh MN // FE.

b) Vẽ đường cao AD của tam giác ABC. Chứng minh FH là phân giác của góc EFD. Từ đó chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF

Bài 2: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB vuông góc với dây MN tại điểm H (H nằm giữa O và B). Trên tia đối của tian NM lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O ; R) sao cho đoạn AC cắt (O) tại điểm K khác A. Hai dây MN và BK cắt nhau ở E. Qua N kẻ đường vuông góc với AC cắt MK tại F. Chứng minh:

a) Tứ giác AHEK nội tiếp.

b) Tam giác NFK cân và EM.NC = EN.CM.

c) Giả sử KE = KC, chứng minh OK // MN.

Bài 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM . IB$.

c) Chứng minh BAF là tam giác cân.

d) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi

Bài 4: Cho đường tròn (O), một dây AB và một điểm C ở ngoài tròn nằm trên tia AB. Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn , cắt dây AB tại D.Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I.Các dây AB và QI cắt nhau tại K.

a/ Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp được.

b/ Chứng minh: CI.CP = CK.CD

c/ Chứng minh IC là tia phân giác của góc ở ngoài đỉnh I của tam giác AIB

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A,B. Người ta kẻ trên nửa mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và By vuông góc với AB và trên tia Ax lấy một điểm I. Tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P. Chứng minh:

a/ tứ giác CPKB nội tiếp được .

b/ AI.BK= AC.CB

c/ tam giác APB vuông

Bài 6: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm C sao cho AC < BC (CA). Tiếp tuyến Bx của đường tròn (O) cắt đường trung trực của BC tại D. Gọi F là giao điểm của DO và BC.

a) Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) (với E A). Chứng minh $DE.DA = DC^2 = DF.DO$

c) Gọi H là hình chiếu của C trên AB và AD cắt CH tại I. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Bài 7: Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 2R và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1/ Chứng minh tam giác KAF đồng dạng với tam giác KEA.

2/ Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3/ Chứng minh MN // AB, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

Bài 8: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I: các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

a/ Góc CID bằng góc CKD.

b/ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

c/ IK // AB.

d/ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

Bài 9: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn OA lấy điểm H (H khác A và O), đường thẳng kẻ qua H vuông góc với AO cắt nửa đường tròn tại C. kẻ HE vuông góc với AC tại E, HF vuông góc với BC tại F. Chứng minh rằng:

a) CH = EF

b) Tứ giác AEFB nội tiếp

c) EF vuông góc với OC.

Bài 10: Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN. Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B. Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F.

a) Chứng minh rằng MNFE là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là trung điểm của FE. Chứng minh rằng AK vuông góc với MN.

Bài 11: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .

b) Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI.\ IM = IA^2$.

c) Chứng minh OAHB là hình thoi.

d) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 4

CÁC CHỦ ĐỀ

*** Hai đường thẳng song song.**

*** Hai đường thẳng vuông góc, Δ vuông.**

*** Hai góc bằng nhau.**

*** Điểm là trung điểm đoạn thẳng.**

*** Đường thẳng là phân giác của góc.**

*** Đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn, đường tròn ngoại tiếp Δ**

*** Ba đường thẳng đồng quy.**

*** Ba điểm thẳng hàng.**

Bài 1: Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O; R) (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1) Chứng minh tứ giác AMBN là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và ME // NF.

Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (AB < AC, d không đi qua tâm O).

1) Chứng minh tứ giác AMON nội tiếp.

2) Chúng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4 cm, AN = 6 cm.

3) Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: MT // AC.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O (AB < AC). Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. E là trung điểm đoạn AD. EC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác OEBM nội tiếp.

2) $MB^2 = MA.MD$.

3) $BFC = MOC$.

4) BF // AM

Bài 4 Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 2R và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1/ Chứng minh tam giác KAF đồng dạng với tam giác KEA.

2/ Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3/ Chứng minh MN // AB, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, $A < 90^0$, một cung tròn BC nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB,AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ đường vuông góc MI,MH,MK xuống các cạnh tương ứng BC ,CA, BA. Gọi P là giao điểm của MB,IK và Q là giao điểm của MC,IH.

1) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK,CIMH nội tiếp được

2) Chứng minh tia đối của tia MI là phân giác của góc HMK

3) Chứng minh tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra PQ // BC

Bài 6: Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến Am, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C (O không thuộc (d), B nằm giữa A và C). Gọi H là trung điểm của BC.

1) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn,

2) Chứng minh HA là tia phân giác của MHN.

3) Lấy điểm E trân MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh HE // CM.

Bài 7: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I: các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

1/ Góc CID bằng góc CKD. 2/ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

3/ IK // AB. 4/ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

Bài 8: Cho hình vuông ABCD . Lấy điểm E thuộc cạnh BC , với E không trùng B và E không trùng C . Vẽ EF vuông góc với AE , với F thuộc CD . Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại G . Vẽ đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với AE , đường thẳng a cắt đường thẳng DE tại điểm H .

1/ Chứng minh $\frac{AE}{AF}=\frac{CD}{DE}$.

2/ Chứng minh rằng tứ giác AEGH là tứ giác nội tiếp được đường tròn .

3/ Gọi b là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE tại E , biết b cắt đường trung trực của đoạn thẳng EG tại điểm K . Chứng minh rằng KG là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE .

Bài 9: Cho (O;R) đường kính AB =2R và điểm C thuộc đường tròn đó(C khác A,B). D thuộc dây BC (D khác B,C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại E,tia AC cắt BE tại F.

1) Chứng minh tứ giác FCDE nội tiếp

2) Chứngminh DA.DE = DB.DC

3) Chứng minh CFD = OCB . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE , chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).

Bài 10: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O). Trên Ax lấy điểm M sao cho AM > AB, MB cắt (O) tại N (N khác B). Qua trung điểm P của đoạn AM, dựng đường thẳng vuông góc với AM cắt BM tại Q.

1) Chứng minh tứ giác APQN nội tiếp đường tròn.

2) Gọi C là điểm trên cung lớn NB của đường tròn (O) (C khác N và C khác B).

3) Chứng minh: $BCN = OQN$

4) Chứng minh PN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB.* Từ *A, B* vẽ các tiếp tuyến *Ax, By* về phía có chứa nửa đường tròn *(O).* Lấy điểm *M* thuộc đoạn thẳng *OA*; điểm *N* thuộc nửa đường tròn *(O).* Đường tròn *(O')* ngoại tiếp tam giác *AMN* cắt *Ax* tại *C;* đường thẳng *CN* cắt *By* tại *D.*

1) Chứng minh tứ giác *BMND* nội tiếp.

2) Chứng minh *DM* là tiếp tuyến của đường tròn *(O').*

3) Gọi *I* là giao điểm của *AN* và *CM; K* là giao điểm của *BN* và *DM*. Chứng minh *IK* // *AB.*

Bài 12: Cho đường tròn (O), từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại E.

1) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.

3) Gọi I là trung điểm của BE, đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F. Chứng minh $IDO = BCO$ và ΔDOF cân tại O.

4) Chứng minh F là trung điểm của AC.

Bài 13: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp.

2) $AM^2 = MK.MB$

3) Góc KAC bằng góc OMB

4) N là trung điểm của CH.

Bài 14: Cho đường tròn (O;R)đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1) Chứng minh tứ giác CBKH là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $ACM = ACK$.

3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho BE = AM. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

Bài 15: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, gọi BC và OS cắt nhau tại M

1) Chứng minh AB. MB = AE.BS

2) ΔAEM và ΔABS đồng dạng

3) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh NP vuông góc với BC.

Bài 16: Cho đường tròn (O), dây cung BC (BC không là đường kính). Điểm A di động trên cung nhỏ BC (A khác B và C; độ dài đoạn AB khác AC). Kẻ đường kính AA’ của đường tròn (O), D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Hai điểm E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AA’. Chứng minh rằng:

1) Bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) BD.AC = AD.A’C.

3) DE vuông góc với AC.

Bài 17: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi AH và BK lần lượt là các đường cao của tam giác ABC.

1) Chứng minh tứ giác AKHB nội tiếp đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này

2) Gọi (d) là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C. Chứng minh rằng $ABH = HKC$

3) Chứng minh $HK \perp OC$.

Bài 18: Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ (MP < MQ). Gọi I là trung điểm của dây PQ, E là giao điểm thứ 2 giữa đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh:

1/ Tứ giác BOIM nội tiếp. 2/ BOM = BEA

3/ AE // PQ 4/ Ba điểm O; I; K thẳng hàng (K là trung điểm của EA)

Bài 19: Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại I. Dây MN cắt cạnh AB, BC lần lượt tại H và K.

1) Chứng minh 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc đường tròn.

2) Chứng minh NB^2 = NK.NM

3) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi.

4) Gọi P, Q lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh 3 điểm D, E, K thẳng hàng?

Bài 20: Cho đường tròn (O) có tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F (ME<MF). Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B, A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO).

1) Chứng minh rằng MA.MB = ME.MF

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

3) Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính MF; nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng CO và KF. Chứng minh rằng đường thẳng MS vuông góc với đường thẳng KC.

4) Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EFS và ABS và T là trung điểm của KS. Chứng minh ba điểm P, Q, T thẳng hàng.

Bài 21: Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy B làm tâm vẽ đường tròn tâm B bán kính AB.Lấy C làm tâm vẽ đường tròn tâm C bán kính AC, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là D.Vẽ AM, AN lần lượt là các dây cung của đường tròn (B) và (C) sao cho AM vuông góc với AN và D nằm giữa M; N.

1) CMR: $\Delta ABC = \Delta DBC$ 2) CMR: ABDC là tứ giác nội tiếp.

3) CMR: ba điểm M, D, N thẳng hàng

Bài 22: Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC,B $\in$ (O),C$\in$(O’). Đường thẳng BO cắt (O) tại điểm thứ hai là D.

1) Chứng minh tứ giác CO’OB là một hình thang vuông.

2) Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng.

3) Từ D kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn (O’) (E là tiếp điểm). Chứng minh rằng DB = DE.

Bài 23: Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M tùy ý giữa A và B. Đường tròn đường kính BM cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng CM, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điêmt thứ 2 là H và K. Chứng minh

1/ Tứ giác AMEC là tứ giác nội tiếp. 2/ góc ACM bằng góc KHM.

3/ Các đường thẳng BH, EM và AC đồng quy.

Bài 24: Cho tam giác ABC(AB > AC ; $BAC > 90^0$). I, K thứ tự là các trung điểm của AB,AC. Các đường tròn đường kính AB,AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E, tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh bai điểm B,C,D thẳng hàng 2) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp.

3) Chứng minh ba đường thẳng AD,BF,CE đồng quy

Bài 25: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đI qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I. Chứng minh.

1) Tứ giác MAOB nội tiếp. 2) MC.MD = MA^2

3) OH.OM + MC.MD = MO^2 4) CI là tia phân giác góc MCH.

Bài 26: Cho đường tròn (O). Đường thẳng (d) không đi qua tâm (O) cắt đường tròn tại hai điểm A và B theo thứ tự, C là điểm thuộc (d) ở ngoài đường tròn (O). Vẽ đường kính PQ vuông góc với dây AB tại D (P thuộc cung lớn AB), Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I, AB cắt IQ tại K.

1) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp đường tròn. 2) Chứng minh CI.CP = CK.CD

3) Chứng minh IC là phân giác của góc ngoài ở đỉnh I của tam giác AIB.

Bài 27: Cho đường tròn (O) và một điểm A và OA = 3R. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là 2 tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1) Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp. 2) Chứng minh KA^2 = KN.KP

3) Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc PNM.

Bài 28: Cho đường tròn (O) bán kính R = 3 cm và một điểm I nằm ngoài đường tròn, biết rằng OI = 4cm.Từ I kẻ hai tiếp tuyến IA và IB với đường tròn (A,B là tiếp điểm).

1) Chứng minh tứ giác OAIB nội tiếp.

2) Từ I kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt tia OA tại O'. Tính OO' và $S_{\Delta IOO'}$.

3) Từ O' kẻ O'C vuông góc BI cắt đường thẳng BI tại C. Chứng minh O'I là tia phân giác của

AO'C

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 5

CHỦ ĐỀ: ĐIỂM CHUYỂN ĐỘNG TRÊN ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

Bài 1: Cho (O; R) và một điểm A cố định ở ngoài đường tròn sao cho OA = 2R. Qua A kẻ một cát tuyến d cắt đường tròn tại 2 điểm B và C (B nằm giữa A và C). Tiếp tuyến AM, AN tiếp xúc với đường tròn (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh các điểm A, M, O , I , N cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi H là giao điểm của OA và MN. Chứng minh OA $\perp$ MN và AH.AO = AB.AC .

c) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt AM, AN lần lượt tại E và F. Tính chu vi tam giác AEF theo R.

d) Khi cát tuyến d quay quanh A thì trọng tâm G của tam giác MBC chạy trên đường nào?

Bài 2: Cho (O; R) và dây AB cố định. C là điểm chính giữa của cung AB, từ C kẻ đường kính CD. N là một điểm bất kì trên cung nhỏ AD. CN cắt AB tại M.

a) Chứng minh AM.MB = CM.CN.

b) CD cắt AB tại I. Chứng minh tứ giác MNDI nội tiếp.

c) Gọi S là giao điểm của AB với DN. Chứng minh AM.SB = SA.BM

d) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABN khi N chuyển động trên cung nhỏ AD.

Bài 3: Cho (O; R) và dây AB cố định (AB < 2R) và một điểm M tùy ý trên cung lớn AB (M khác A và B). Gọi I là trung điểm của dây AB và (O') là đương tròn qua M và tiếp xúc với AB tại A. Đường thẳng MI cắt (O), (O') lần lượt tại các điểm thứ hai là N và P.

a) Chứng minh IA^2 = IP.IM

b) Chứng minh tứ giác ANBP là hình bình hành.

c) Chứng minh IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBP

d) Chứng minh khi M di chuyển thì trọng tâm G của tam giác PAB chạy trên một cung tròn cố định.

Bài 4: Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D, tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N, tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P.

a) Chứng minh tứ giác ABMD nội tiếp.

b) Chứng minh tích CM.CD không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Tứ giác APND là hình gì? Tại sao?

d) Chứng minh trọng tâm G của ΔMAC chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

Bài 5: Cho (O; R) và (O ; R’) (R > R’) tiếp xúc ngoài tại A và một dây cung AB cố định của (O). Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại M và cắt (O’) tại N. Đường thẳng qua N và song song với AB cắt MB tại Q và cắt (O’) tại điểm thứ hai P.

a) Chứng minh OM // O’N

b) Chứng minh $\frac{BQ}{BM} = \frac{R'}{R}$

c) Tứ giác ABQP là hình gì? Tại sao?

d) Chứng minh trọng tâm G của ΔMAB chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 6: Cho (O; R) đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại H. Điểm M di động trên đoạn CD, tia AM cắt (O) tại N. Chứng minh:

a) Tứ giác MNBH nội tiếp.

b) MC.MD = MA.MN và tích AM.AN không đổi.

c) AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCMN.

d) Khi M di động trên đoạn CD, trọng tâm G của ΔCAN chạy trên đường tròn xác định.

Bài 7: Cho điểm M cố định nằm ngoài (O; R). Qua M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm bất kì trên cung nhỏ AB của (O). Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB, MA, MB.

a) Chứng minh A, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) AC cắt DE tại P; BC cắt DF tại Q. Chứng minh ΔPAE đông dạng với ΔPDC. Từ đó suy ra PA.PC = PD.PE.

c) Chứng minh AB // PQ

d) Khi C di động trên cung nhỏ AB của (O) thì trọng tâm G của ΔABC di chuyển trên đường nào?

Bài 8: Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Điểm M tùy ý trên nửa đường tròn. Gọi N và P lần lượt là điểm chính giữa của cung AM và cung MB.

a) Chứng minh ΔONP vuông cân và suy ra dây NP có độ dài không đổi.

b) Tính diện tích hình viên phân tạp thành bởi dây NP và cung nhỏ NP.

c) Gọi các giao điểm của: AP và BN là E; tia AN và tia BP là C; tia CE và AB là D. Chứng minh các tứ giác CNEP và DONP nội tiếp.

d) Tìm quỹ tích trọng tâm G của ΔABC khi M chạy trên nửa đường tròn (O)?

Bài 9: Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Điểm M tùy ý trên nửa đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba lần lượt cắt Ax, By tại C và D.

a) Chứng minh CD = AC + BD; góc COD bằng 90^o.

b) Chứng minh AC.BD = R^2.

c) Biết OC cắt AM tại E, OD cắt BM tại F. Chứng minh EF = R.

d) Khi M chạy trên đường tròn đường kính AB thì trọng tâm G của ΔOEF chạy trên đường nào?

Bài 10: Cho (O) trên đó có điểm A cố định. Kẻ tia Ax tiếp xúc với (O) tại A. Lấy ddiemr M trên tia Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. Gọi I là trung điểm của MA và K là gia điểm thứ hai của BI với (O). Tia MK cắt (O) tại điểm thứ hai C.

a) Chứng minh ΔMIK đồng dạng với ΔBIM.

b) Chứng minh BC // MA.

c) Có vị trí nào của M để tứ giác AMBC là hình bình hành không? Tại sao?

d) Chứng minh M di động trên tia Ax thì trực tâm H của ΔMAB chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 11: Cho (O) đường kính AB cố định. Hai tia Ax và Ay thay đổi cắt đường tròn (O) tại M và N sao cho góc xAy bằng 45^o. BM cắt Ay tại E, BN cắt Ax tại F.

a) Chứng minh tứ giác MNEF nội tiếp.

b) Tính độ dài MN theo R

c) Chứng minh EF luôn song song với một đường thẳng cố định và có độ dài không đổi.

c) Khi góc xAy quay quanh A, hãy chứng minh trung điểm của EF thuộc một đường tròn cố định.

Bài 12: Cho hai đường tròn (O ; R) và (O_1 ; R_1) cắt nhau tại A và B, đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB cắt (O) , (O_1) lần lượt tại C và D. Gọi E là một điểm thuộc cung nhỏ BC của (O), đường thẳng BE cắt (O_1) tại điểm thứ hai là F. Hai đường thẳng CE và DF cắt nhau tại M. Gọi N là giao điểm của AM và (O_1).

a) Chứng minh tứ giác ACMD nội tiếp.

b) Chứng minh BN // CM

c) Gọi K là điểm đối xứng của D qua F. Chứng minh rằng K thuộc một đường tròn cố định khi E thay đổi trên cung nhỏ BC của (O).

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 6

CHỦ ĐỀ: TÌM VỊ TRÍ ĐIỂM ĐỂ TAM GIÁC, TỨ GIÁC CÓ DIỆN TÍCH (CHU VI) ĐẠT Max hoặc Min

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O ; R) và hai đường kính MN và PQ vuông góc với nhau. Lấy điểm A trên cung nhỏ PN, PA cắt MN tại B, AQ cắt MN tại E

1) Chứng minh tứ giác OABQ là tứ giác nội tiếp

2) Nối AM cắt PQ và PN lần lượt tại C và I. Chứng minh rằng: MC . MA không đổi khi A di chuyển trên cung nhỏ PN.

3) Chứng minh : $IN = \sqrt{2}EN$

4) Tìm vị trí của điểm A để diên tích tam giác ACE đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác BFEC là tứ giác nội tiếp;

2) Chứng minh AF.AB = AE.AC.

3) BE và CF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là M và N. Chứng minh EF // MN.

4) Giả sử B,C cố định; A thay đổi. Tìm vị trí của A sao cho tam giác AEH có diện tích lớn nhất.

Bài 3. Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD di động vuông góc với AB tại điểm H nằm giữa hai điểm A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ; BF cắt CD tại E; AF cắt tia DC tại I.

1) Chứng minh rằng: Tứ giác AHEF là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh rằng: HA.HB = HE.HI

3) Đường tròn ngoại tiếp ΔIEF cắt AE tại điểm thức hai M. Chứng minh: M thuộc (O;R)

4) Tìm vị trí của H trên OA để ΔOHD có chu vi lớn nhất.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R). Một đường thẳng d không qua O cắt đường tròn (O) tại 2 điểm A và B. Trên đường thẳng d lấy điểm C sao cho CA < CB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng qua O vuông góc với AB tại H cắt CN tại K

1) Chứng minh O, C, H, N cùng thuộc một đường tron.

2) Chứng minh KN.KC = KO.KH

3) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nột tiếp ΔCMN.

4) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

Bài 5: Cho đường tròn tâm O bán kính R , dây BC cố định . Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC . E thuộc cung lớn BC . Nối AE cắt BC tại D . Gọi I Là trung điểm của BC , hạ CH vuông góc với AE tại H . Đường thẳng BE cắt CH tại M

a) Chứng minh rằng : A , I , H , C cùng thuộc đường tròn

b) Chứng minh: $AD.AE = AB^2$

c) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính AC

d) Tìm vị trí điểm E để diện tích tam giác MAC lớn nhất

Bài 6: Cho đường tròn tâm O bán kính R. Dây cung BC thuộc đường tròn sao cho BC < 2R. Điểm A di động trên cung lớn BC. Gọi AD, BE, CF là 3 đường cao của tam giác ABC, H là trực tâm.

a) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn, tìm tâm I của đường tròn đó

b) Chứng minh tiếp tuyến tại E của đường tròn I luôn đi qua 1 điểm cố định

c) Tìm vị trí của A để tam giác AEF có diện tích lớn nhất

Bài 7: Cho (O;R) và dây BC cố định không đi qua O. Từ A thuộc tia đối của tia BC vẽ các tiếp tuyến AM,AN với (O) (M, N là tiếp điểm,M thuộc cung nhỏ BC). Gọi I là trung điểm của BC,MI cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Gọi giao của MN với OI là K. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác ONK lớn nhất

Bài 8: Cho nửa đường tròn (O;R), đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M với nửa đgờng tròn Ax, By lần lượt ở C, D.

a) Chứng minh AC.BD = R^2

b) Chứng minh đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB

c) Chứng minh MN song song với AC

d) Tìm vị trí của M trên nửa đgờng tròn (O) để tứ giác ABDC có chu vi nhỏ nhất

Bài 10: Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH \perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O_1; O_2 cắt AB, AC thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết R = 25 và BH = 10

b) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác DEO_2O_1 đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

Bài 11: Cho đường tròn (O), đường kính AB, d_1, d_2 là các các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. M, N là các điểm lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho $MON = 90^0$.

1) Chứng minh đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2) Chứng minh AM . AN = $\frac{AB^2}{4}$.

3) Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác MON đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12: Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính R. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M và N. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Bài 13: Cho AB là đường kính của đường tròn (O;R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn. Kẻ CH vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AC,OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại M,MB cắt CH tại K. Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt GTLN? Tìm GTLN đó theo R

Bài 14: Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. M là một điểm thuộc đường thẳng d . Qua M kẻ tiếp tuyến MA,MB với đường tròn. Hạ OH vuông góc với d tại H. Nối AB cắt OM tại I, OH tại K. Tia OM cắt đường tròn (O;R) tại E

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB

b) Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK có diên tích lớn nhất

Bài 15: Cho đường tròn (O;R) đường kính CD = 2R. M là 1 điểm thay đổi trên OC . Vẽ đường tròn (O') đường kính MD. Gọi I là trung điểm của MC,đường thẳng qua I vuông góc với CD cắt (O) tại E,F. đường thẳng ED cắt (O') tại P

a) Chứng minh 3 điểm P, M, F thẳng hàng

b) Chứng minh IP là tiếp tuyến của đường tròn (O;R)

c) Tìm vị trí của M trên OC để diện tích tam giác IPO lớn nhất

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 7

CHỦ ĐỀ: CHỨNG MINH ĐƯỜNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.
ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG TRÒN CỐ ĐỊNH.

Bài IV 1. (Thi Thử - THCS Khương Thượng 2015 – 2016)

Cho nửa đường tròn O đường kính AB = 2R. Vẽ bán kính OC vuông góc với AB. Lấy điểm K thuộc cung nhỏ AC, kẻ $KH \perp AB$ tại H. Tia AC cắt HK tại I, tia BC cắt HK tại E, AE cắt đường tròn (O) tại F.

a) Chứng minh tứ giác BHFE nội tiếp;

b) Chứng minh BI . BF = BC . BE;

c) Giả sử H là trung điểm của OA. Tính diện tích tam giác FEC theo R;

d) Chứng minh rằng khi K di chuyển trên cung nhỏ AC thì đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

Bài IV 2. (KSCL - L5 - THCS Phương Liệt 2017 – 2018)

Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp điểm AB và AC với đường tròn ấy (B,C là hai tiếp điểm $B \neq C$). Điểm M thuộc cùng nhỏ BC ($M \neq B$ và $M \neq C$). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc với M trên CB, BA, AC. Biết MB cắt IH tại E, MC cắt IK tại F.

1) Chứng minh bốn điểm M, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $MIK = MHI$ và $MI^2 = MH.MK$.

3) Chứng minh $EF \perp MI$

4) Đường tròn ngoại tiếp ΔMFK và đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔMEH cắt nhau tại điểm thứ hai là N. Chứng tỏ khi M di động trên cung nhỏ BC ($M \neq B$ và $M \neq C$) thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài IV 3. (KSCL - THCS Yên Hòa 2017 – 2018)

Cho đường tròn (O;R) có dây CD cố định và H là trung điểm của CD. Gọi S là một điểm bất kì trên tia đối của tia DC. Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB tới đường tròn tâm O (với A, B là các tiếp điểm). Đường thẳng AB cắt SO tại E.

1) Chứng minh bốn điểm O, H, A, S cùng thuộc một đường tròn;

2) Chứng minh $OE.OS = R^2$;

3) Cho R = 10cm; SD = 4cm; OH = 6cm. Tính CD và SA;

4) Chứng minh rằng khi D di động trên tia đối của tia DC thì đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài IV 4. (Thi Thử - L4 – **VINSCHOOL 2017 – 2018)**

Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB; điểm I nằm giữa A và O; dây CD vuông góc với AB tại I; điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B,C). Dây AM cắt CD tại K.

1) Chứng minh tứ giác IKMB nội tiếp.

a) Chứng minh $AD^2 = AK.AM$

b) Nếu cho R = 6cm và I là trung điểm AO. Tính DI, từ đó tính thể tích của hình tạo thành khi tam giác ADI quay quanh trục DI.

2) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CKM.

3) Trên tia đối của MC lấy điểm E sao cho ME = MB. Chứng minh rằng: khi các điểm A, B, I cố định và điểm M thay đổi trên cung nhỏ BC (M khác B,C) thì đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE luôn đi qua một điểm cố định khác C và B.

Bài 5: (Thi Thử L3 – TTBDVH EduFly – 2017 -2018)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB, trên tia AB lấy 1 điểm C nằm ngoài đường tròn. Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ, cắt dây AB tại A. Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I, các dây AB và QI cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp được

b) Chứng minh CI. CP = CK. CD. Chứng minh hai tam giác QAI và BKI đồng dạng

c) Chứng minh IC là phân giác ngoài góc I của tam giác AIB

d) Cho A,B,C cố định. Chứng minh rằng khi (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua A, B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. (KSCL - L5 - THCS Vĩnh Tuy 2015 – 2016)

Cho đường tròn (O; R) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC. Nối MN cắt AC tại I. Hạ ND vuông góc AC. Gọi E là trung điểm BC. Dựng hình bình hành ADEF.

1) Tính góc MIC

2) Chứng minh F thuộc đường tròn (O; R)

3) Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)

4) Khi C chuyển động trên đường tròn (O; R) chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

Bài 7: (Kiểm Tra kì 2 – Quận Hoàng Mai 2016 – 2017)

Cho nửa (O), đường kính AB. Lấy hai điểm C, M bất kì thuộc nửa đường tròn sao cho AC = CM (AC và CM khác MB). Gọi D là giao điểm của AC và BM; H là gia điểm của AM và BC.

1) Chứng minh tứ giác CHMD nội tiếp.

2) Chứng minh DA.DC = DB.DM

3) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt tia BC tại K. Chứng minh AK + HD = 2KD

4) Gọi Q là giao điểm của DH và AB. Chứng minh khi C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho AC = AM thì đường tròn ngoại tiếp ΔCMQ luôn đi qua một đểm cố định.