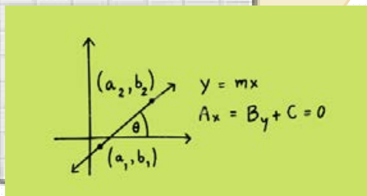
PHƯƠNG PHÁP GIẢI
HỆ PHƯƠNG TRÌNH BA ẨN

"tailieumontoan.com"



I. Bài tập

1 HPT dạng $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ (I)

$a_i,b_i,c_i \in \mathbb{R};\ i=1,2,3.$

Sử dụng phương pháp cộng và phương pháp thế ta đưa hệ (I) về hệ có dạng: $\begin{cases} Ax=B \\ A_1x+B_1y=C_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D \end{cases}$

(hệ tam giác) từ đó tìm được x,y,z.

Thí dụ 1. Giải HPT $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=8 \\ x+3y+9z=27 \end{cases}$

Lời giải. Trừ vế với vế (2) và (1) ta có: $y+3z=7$

Trừ vế với vế (3) và (2) ta có: $y+5z=19$

Trừ vế với vế (5) và (4) ta có: $2z=12$

Ta có hệ $\begin{cases} 2z=12 \\ y+3z=7 \\ x+y+z=1 \end{cases}$,

do đó: $(x;y;z)=(6;-11;6)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x,y,z)=(6;-11;6)$.

2 HPT dạng $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}$ (II) $(a,b,c\in\mathbb{R})$.

Từ (II) suy ra $x+y+z=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left(^*\right)$

Từ (*) và các phương trình của hệ (II) sử dụng phương pháp cộng và phương pháp thế ta tính được x, y, z

Thí dụ 2. Giải HPT $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1 \\ \dfrac{yz}{y+z}=2. \\ \dfrac{zx}{z+x}=3 \end{cases}$

Lời giải. ĐK: $(x+y)(y+z)(z+x)\neq 0$.

Từ hệ suy ra $xyz\neq 0$, do đó biến đổi ta nhận được hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{-1}{12} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z)=\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{12}{7};-12\right).$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y;z)=\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{12}{7};-12\right)$;

Thí dụ 3. Giải HPT $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+z=2. \\ 3x+y+2z=7 \end{cases}$

Lời giải. Cộng vế với vế 3 PT của hệ ta có: $x+y+z=2$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Trừ vế với vế 2 PT đầu của hệ với PT thứ ba ta được hệ

$$\begin{cases} y+2z=1 \\ x+2y=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Trừ vế với vế 2 PT đầu của hệ với PT thứ ba nhận được hệ

$$\begin{cases} x-z=1 \\ z-y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=z-2 \\ 1+z+z-2+z=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1. \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x,y,z)=(2;-1;1)$.

3 HPT dạng $\begin{cases} xy=a \\ yz=b \\ zx=c \end{cases}$ **(III) (với** $abc>0$ **).**

Từ (III) suy ra $xyz=\pm\sqrt{abc}$ $\quad(*)$).

Từ PT (*) và các PT của (III) tìm được x,y,z.

⋆ **Thí dụ 4.** Giải HPT $\begin{cases} x+xy+y=1 \\ y+yz+z=3 \\ z+zx+x=7 \end{cases}$

(Đề thi TS vào khối chuyên toán, chuyên tin trường ĐH KHTN năm 1995)

Lời giải. Ta có :

$$\begin{cases} x+xy+y=1 \\ y+yz+z=3 \\ z+zx+x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+xy+y+1=2 \\ y+yz+z+1=4 \\ z+zx+x+1=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=2 \\ (y+1)(z+1)=4 \\ (z+1)(x+1)=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+1)(y+1)(z+1)=\pm 8 \quad (1)$$

Chia vế với vế PT (1) với các PT của hệ ta nhận được 2 HPT sau: $\begin{cases} z+1=4 \\ x+1=2 \\ y+1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z+1=-4 \\ x+1=-2 \\ y+1=-1 \end{cases}$

Từ đó tìm được nghiệm $(x;y;z)$ của hệ là:

$(1;0;3),(-3;-2;-5)$.

Thí dụ 5. Giải HPT $\begin{cases} 3xy-x-y=3 \\ 3yz-y-z=13 \\ 3zx-z-x=5 \end{cases}$

(Đề thi TS vào lớp chuyên toán, chuyên tin trường THPT chuyên Hưng Yên năm 2008)

Lời giải. Ta có :

$$\begin{cases} 3xy-x-y=3 \\ 3yz-y-z=13 \\ 3zx-z-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9xy-3x-3y+1=10 \\ 9yz-3y-3z+1=40 \\ 9zx-3z-3x+1=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)(3y-1)=10 \\ (3y-1)(3z-1)=40 \\ (3z-1)(3x-1)=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3x-1)(3y-1)(3z-1)=\pm 80$$

Làm tương tự thí dụ 4 ta nhận được các nghiệm $(x;y;z)$ là : $(1;2;3),\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

Thí dụ 6. Giải HPT

$$\begin{cases} x^2y-4y+x^2=6 \\ 9y-yz^2-z^2=-4 \\ 9x^2+4z^2-x^2z^2=46 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có : $\begin{cases} x^2y-4y+x^2=6 \\ 9y-yz^2-z^2=-4 \\ 9x^2+4z^2-x^2z^2=46 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y-4y+x^2-4=2 \\ 9y-yz^2-z^2+9=5 \\ 9x^2+4z^2-x^2z^2-36=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-4)(y+1)=2 \\ (y+1)(9-z^2)=5 \\ (9-z^2)(x^2-4)=10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2-4)(y+1)(9-z^2)=\pm 10$$

Làm tương tự thí dụ 4 ta nhận được 8 nghiệm

$(x;y;z)=(\sqrt{6};0;2),(-\sqrt{6};0;2)$,

$(\sqrt{6};0;-2),(-\sqrt{6};0;-2)$,

$(\sqrt{2};-2;\sqrt{14}),(-\sqrt{2};-2;\sqrt{14})$,

$(\sqrt{2};-2;-\sqrt{14}),(-\sqrt{2};-2;-\sqrt{14})$

⋆ **Thí dụ 7.** Giải HP $\begin{cases}(x+y)(y+z)=4xy^2z & (1)\\ (y+z)(z+x)=4yz^2x & (2)\\ (x+z)(x+y)=4zx^2y & (3)\end{cases}$

(Đề thi TS vào khối chuyên toán, chuyên tin trường ĐH KHTN năm 1994)

Lời giải. Nếu $x=0$ thì từ (1) suy ra $\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=-z\end{array}\right.$

$\Rightarrow (x;y;z)=(0;0;0)$ là nghiệm HPT. Tương tự, nếu $y=0$ hoặc $z=0$ thì ta cũng được $(x;y;z)=(0;0;0)$ là nghiệm HPT.

Nếu $xyz\neq 0$ nhân vế với vế 3 PT của hệ và sau đó khai phương 2 vế ta có:

$(x+y)(y+z)(z+x)=\pm 8x^2y^2z^2$.

Suy ra $\begin{cases}x+y=2xz\\ x+y=2xy\\ y+z=2yz\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x+z=-2xz\\ x+y=-2xy\\ y+z=-2yz\end{cases}$

Từ đó tìm được nghiệm $(x;y;z)$ của hệ là :

$(1;1;1),(-1;-1;-1)$.

⋆ **Thí dụ 8.** Giải HPT $\begin{cases}6x(y^2+z^2)=13yz\\ 3y(z^2+x^2)=5zx\\ 6z(x^2+y^2)=5xy\end{cases}$

(Đề thi Olympic 30-4 năm 2000)

Lời giải.

Nếu $x=0$ thì từ $(1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ z=0\end{array}\right.$ nghiệm.

Tương tự, nếu $y=0$ hoặc $z=0$ thì ta tìm được thêm $(x_0;0;0)$ (với x_0 tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$)

là nghiệm.

Nếu $xyz\neq 0$ khi đó biến đổi hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6xz}{y}=13\\ \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6yz}{x}=10\\ \dfrac{6xz}{y}+\dfrac{6yz}{x}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6xz}{y}=13\\ \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6yz}{x}=10\\ \dfrac{6xy}{z}+\dfrac{6xz}{y}+\dfrac{6yz}{x}=14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6yz}{x}=1\\ \dfrac{6xz}{y}=4\\ \dfrac{6xy}{z}=9\end{cases}\Rightarrow xyz=\frac{1}{6}.\text{ Suy ra: }\begin{cases}x^2=1\\ y^2=\dfrac{1}{4}\\ z^2=\dfrac{1}{9}\end{cases}.$$

Với $xyz>0$ ta có các nghiệm của HPT này là:

$\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

Vậy hệ đã cho có các nghiệm:

$\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right),\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

$(0;0;z_0),(0;y_0;0),(x_0;0;0)(x_0,y_0,z_0\in\mathbb{R})$.

4. Hệ dạng $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ F(y,z,x)=0\ (IV)\\ F(z,x,y)=0\end{cases}$

(hệ hoán vị vòng quanh).

Thông thương khi giải hệ (IV) ta sử dụng phroong pháp đánh giá, sử dụng bất đẳng thức, đôi khi sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số để chúng minh $x=y=z$, tù đó tìm nghiệm của HPT.

Thí dụ 9. Giải HPT $\begin{cases}x-\sqrt{y}=1\\ y-\sqrt{z}=1\\ z-\sqrt{x}=1\end{cases}$.

Lời giải. Dễ thấy $x,y,z\geq 1$.

Do HPT không đổi khi hoán vị vòng quanh x,y,z nên ta có thể giả sử $x=\max\{x,y,z\}$ hay $\begin{cases}x\geq y\\ x\geq z\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}x-\sqrt{y}=1\\ y-\sqrt{z}=1\\ z-\sqrt{x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=(x-1)^2\\ z=(y-1)^2\\ x=(z-1)^2\end{cases}$, do đó

$x \ge y$ thì $(z-1)^2 \ge (x-1)^2$

$\Rightarrow z-1 \ge x-1 \Rightarrow z \ge x \Rightarrow x=z$. Suy ra $y=x$.

Với $x=y=z$ giải PT $x-\sqrt{x}-1=0$ được nghiệm

$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện $x \ge 1$.

Vậy HPT có nghiệm $x=y=z=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

*Thí dụ 10. Giải HPT $\begin{cases} x^2=y \\ y^2=z \\ z^2=x \end{cases}$.

Lời giải. Từ hệ suy ra $x, y, z \ge 0$.

Hàm số $f(t)=t^2$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và HPT đã cho có thể viết dưới dạng : $\begin{cases} f(x)=y \\ f(y)=z \\ f(z)=x \end{cases}$

Do hệ không đổi khi hoán vị vòng quanh x, y, z nên ta có thể giả sử $x=\max\{x,y,z\}$ hay $\begin{cases} x \ge y \\ x \ge z \end{cases}$.

Với $x \ge y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \Rightarrow y \ge z$

$\Rightarrow f(y) \ge f(z) \Rightarrow z \ge x \Rightarrow z=x \Rightarrow y=z$.

Do đó $x=y=z$. Giải phương trình $x^2=x$ ta được $x=0, x=1$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)$ là: $(0;0;0);(1;1;1)$.

Thí dụ 11. Giải HPT $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0 \\ z^3-9y^2+27y-27=0 \\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases}$

Lời giải. Cộng vế với vế 3 PT của hệ ta được:

$(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=0\,(1)$.

Nếu $x=3$ thì ta được $y=6, z=0$ hoặc $y=z=3$.

Dễ thấy chỉ có $(x;y;z)=(3;3;3)$ thỏa mãn hệ.

Nếu $x>3$ thì $y^3-27=9x^2-27x>0$

$\Rightarrow y^3>27 \Rightarrow y>3.$

Tương tự, nếu $y>3$ thì $z>3$, mâu thuẫn với (1). Nếu $x<3$ thì ta suy ra được $y, z<3$, mâu thuẫn với (1).

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(3;3;3)$

Thí dụ 12. Giải HPT $\begin{cases} z=\dfrac{2y}{\sqrt{y}+\sqrt{2-y}} \\ y=\dfrac{2x}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} \end{cases}$.

Lời giải. ĐK: $0 \le x, y, z \le 2$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có :

$\sqrt{x}+\sqrt{2-x} \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x+2-x}=2$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} \ge 1$

(đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{1}=\dfrac{\sqrt{2-x}}{1} \Leftrightarrow x=1$)

Tương tự: $\dfrac{2}{\sqrt{y}+\sqrt{2-y}} \ge 1; \dfrac{2}{\sqrt{z}+\sqrt{2-z}} \ge 1$.

Từ HPT ta có:

$$|y|=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\cdot|x| \ge |x|=\frac{2}{\sqrt{z}+\sqrt{2-z}}\cdot|z|$$
$$\ge |z|=\frac{2}{\sqrt{y}+\sqrt{2-y}}\cdot|y| \ge |y|$$

$\Rightarrow |x|=|y|=|z| \Rightarrow x=y=z=1$ (thỏa mãn) HPT đã cho)

Vậy HPT có nghiệm $(x;y;z)=(1;1;1)$.

5, Phương pháp thế

Thí dụ 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=12 & (1) \\ x(y+z)=20 & (2) \\ y(x+z)=32 & (3) \end{cases}$

Lời giải.

Từ (1) , (2) ta có:

$\begin{cases} x=12-(y+z) \\ x=\dfrac{20}{y+z} \end{cases}$ (do $y+z \ne 0$)

$\Rightarrow 12-(y+z)=\dfrac{20}{y+z} \Rightarrow y+z=2$

hoặc $y+z=10$.

Nếu $y + z = 2$ ta có $x = 10$,

do vậy $\begin{cases} y + z = 2 \\ y(10 + z) = 32 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4, z = -2 \\ y = 8, z = -6 \end{array}\right.$

Nếu $y + z = 10$ ta có $x = 2$,

do vậy $\begin{cases} y + z = 10 \\ y(2 + z) = 32 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 8, z = 2 \\ y = 4, z = 6 \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm

$(x, y, z) \in \{(10;4;-2), (10;8;-6), (2;8;2), (2;4;6)\}$

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} xz = x + 4 & (1) \\ 2y^2 = 7xz - 3x - 14 & (2) \\ x^2 + y^2 = 35 - z^2 & (3) \end{cases}$$

(Vòng 1,Khối THPT Chuyên – Đại học Sư phạm Hà Nội , năm học 2006 – 2007)

Lời giải.

Từ (1) ta có: $x = xz - 4$, thay vào (2) ta được:

$2y^2 = 7xz - 3(xz - 4) - 14 \Leftrightarrow y^2 = 2xz - 1$

thay vào (3) ta có

$x^2 + z^2 = 36 - 2xz$

$\Leftrightarrow (x + z)^2 = 36 \Leftrightarrow x + z = \pm 6.$

Nếu $x + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x$

thay vào (1) ta có $x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 1; x = 4.$

Nếu $x + z = -6 \Rightarrow z = -6 - x$ thay vào (1) ta có x

$$\text{Vậy } (x;y;z) \in \left\{ \begin{array}{l} (1;-3;5), (1;3;5), \\ (4;\sqrt{15};2), (4;-\sqrt{15};2), \\ \left(\dfrac{-7 + \sqrt{33}}{2}; \sqrt[4]{33}; \dfrac{-5 - \sqrt{33}}{2}\right), \\ \left(\dfrac{-7 + \sqrt{33}}{2}; -\sqrt[4]{33}; \dfrac{-5 - \sqrt{33}}{2}\right) \end{array} \right\}$$

Ví dụ 15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + yz - zx = 7 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 & (3) \end{cases}$$

(Vòng 1,Khối THPT Chuyên , Đại học Sư phạm Hà Nội , năm học 2005 – 2006)

Lời giải. Từ (1) và (3) ta có:

$(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = 36$

$\Leftrightarrow 14 + 2(xy + yz + zx) = 36$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 11 \quad (4)$

Từ (2) và (4) ta có: $xz = 2$, thay vào (1), (2) ta được:

$$\begin{cases} y + (x + z) = 6 \\ y.(x + z) = 9 \end{cases} \Rightarrow y = 3, x + z = 3.$$

Từ đó suy ra hệ có nghiệm $(x;y;z) \in \{(2;3;1), (1;3;2)\}$

.

Ví dụ 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 48 \\ xy + y^2 + yz = 12 \\ xz + yz + z^2 = 84 \end{cases}$

Lời giải. Cộng từng vế của các phương trình ta được

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 144$

$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 144 \Leftrightarrow x + y + z = \pm 12$

Nếu $x + y + z = 12$ ta có:

$$\begin{cases} x(x + y + z) = 48 \\ y(x + y + z) = 12 \Rightarrow x = 4, y = 1, z = 7 \\ z(x + y + z) = 84 \end{cases}$$

Tương tự nếu $x + y + z = -12$ ta được

$x = -4, y = -1, z = -7$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z) \in \{(4;1;7), (-4;-1;-7)\}$

5, Phương pháp đánh giá

Ví dụ 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \\ \dfrac{2}{xy} - \dfrac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x, y, z \neq 0$

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$ ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2ab - c^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 - c \\ 2ab = 4 + c^2 \end{cases}$$

Do đó a, b là các nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (2 - c)t + \frac{4 + c^2}{2} = 0$$

$$\Delta = -(c + 2)^2 \leq 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow a = b = 2$$

Do đó hệ có nghiệm $(x;y;z) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{2}\right)$

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x^2+1)y=2x^2\\(y^2+1)z=2y^2\\(z^2+1)x=2z^2\end{cases}$

Lời giải. Nếu một trong ba số *x, y, z* có một số bằng 0, chẳng hạn *x* = 0, thì dễ dàng suy ra *y = z = 0*

Vậy *x = y = z = 0* là một nghiệm của hệ.

Nếu $x,y,z\neq 0$ suy ra *x > 0, y > 0, z > 0* và nhân vế với vế các phương trình của hệ ta được: $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=8xyz\quad(1)$

Mặt khác, $x^2+1\geq 2x, y^2+1\geq 2y, z^2+1\geq 2z$ nên $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=8xyz$

Theo (1) thì dấu bằng ở bất đẳng thức trên phải xảy ra. Từ đó suy ra $x=y=z=1$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)\in\{(0;0;0),(1;1;1)\}$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^3=2y^2+y+1 & (1)\\4y^3=2z^2+z+1 & (2)\\4z^3=2x^2+x+1 & (3)\end{cases}$

***Lời giải*.** Ta có $4x^3=\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+\dfrac{3}{4}>0\Rightarrow x>0$ tương tự ta có y > 0, z > 0.

Nếu x > y $\Rightarrow 4x^3>4y^3$ hay $2y^2+y+1>2z^2+z+1\Rightarrow y>z\Rightarrow 4y^3>4z^3$

hay $2z^2+z+1>2x^2+x+1\Rightarrow z>x$, vôlis

Tương tự *y > x* vô lí. Vậy *x = y*

Chứng minh tương tự ta có *y = z*, do đó *x = y = z*.

Thay vào (1) ta được: $4x^3-2x^2-x-1=0\Leftrightarrow(x-1)(4x^2+2x+1)=0$

Vậy hệ có nghiệm *x = y= z = 1*

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x=y^3+y^2+y-12\\y=z^3+z^2+z-12\\z=x^3+x^2+x-12\end{cases}$

Lời giải. Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t-12$ ta chứng minh *f(t)* là hàm số đồng biến.

Với t_1,t_2 bất kì mà $t_1<t_2$, ta có

$$f(t_1)-f(t_2)=t_1^3-t_2^3+t_1^2-t_2^2+t_1-t_2=(t_1-t_2)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2+t_1+t_2+1)$$

$$=\frac{1}{2}(t_1-t_2)\left[(t_1+t_2+1)^2+t_1^2+t_2^2+1\right]<0$$

Do đó $f(t_1)<f(t_2)$ nên $f(t_1)$ là hàm số đồng biến.

Nếu *x < y* thì *f(x) < f(y)* hay $z<x\Rightarrow f(z)<f(x)$ hay *y < z (vô lí)*

Tương tự tự *y< z* vô lí,do đó $x=y\Rightarrow f(x)=f(y)$ hay x = z

Vậy *x = y = z*, từ đó ta có $x^3+x^2-12=0\Leftrightarrow(x-2)(x^2+3x+6)=0$

Vậy hệ có nghiệm *x = y = z = 2*

Ví dụ 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \dfrac{3z^3}{z^4+z^2+1} = x \\ \dfrac{4x^4}{x^6+x^4+x^2+1} = y \end{cases}$

Lời giải. Dễ nhận thấy rằng nếu một trong ba số x, y , z bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng 0

Nếu $xyz \neq 0$, từ đó suy ra x, y, z là các số dương

Ta có $y(y^2+1) = y^3 + y \geq 2y^2 \Rightarrow y \geq \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z;$

$$z(z^4+z^2+1) = z^5+z^3+z \geq 3z \Rightarrow z \geq \frac{3z^2}{z^4+z^2+1} = x;$$

$$x(x^6+x^4+x^2+1) = x^7+x^5+x^3+x \geq 4x \Rightarrow \frac{4x^4}{x^6+x^4+x^2+1} = y$$

Từ đó suy ra x = y = z, thay vào phương trình đầu ra được x = y = z = 1.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z) \in \{(0;0;0),(1;1;1)\}$

Ví dụ 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 14 & (1) \\ \left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{6z}\right)\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}\right) = 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)(3x+2y+z) = 36 \Leftrightarrow 6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+3\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right) = 22$$

Mặt khác so *x, y, z > 0*, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+3\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right) \geq 6.2+3.2+2.2 = 22$$

Đẳng thức xảy ra khi *x = y = z > 0*. Hệ có nghiệm *(x; y; z) = (2; 2; 2)*

Ví dụ 23. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z = 6 & (1) \\ x^4+y^4+z^4 = 6xyz & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2 \geq 2ab$ ta có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

Mặt khác $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xy^2z+yz^2x+zx^2y = xyz(x+y+z)$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z) = 6xyz$ (do $x+y+z=6$)

Theo đề bài, dấu bằng xảy ra, nên *x = y = z = 2.*

III. Bài tập vận dụng

1 Giải HPT $\begin{cases} 4x - y + 4z = 0 \\ x + 5y - 2z = 3 \\ -x + 8y - 2z = 1 \end{cases}$

2 Giải HPT $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\sqrt{yz}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{\sqrt{zx}}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

ĐS: $(x;y;z) = (1;4;9)$.

3 Giải HPT $\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases}$

(Đề thi ĐH Thương mại 1997) ĐS: $(x;y;z) = (1;0;4), (-3;-2;-6)$.

4 Giải HPT $\begin{cases} x\sqrt{yz} = 4 \\ y\sqrt{xz} = 9 \\ z\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$

ĐS: $(x;y;z) = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{27}{8};\dfrac{32}{3}\right)$.

5 Giải HPT $\begin{cases} x(x + y + z) = 2 - yz \\ y(x + y + z) = 3 - zx \\ z(x + y + z) = 6 - xy \end{cases}$ ĐS: $(x;y;z) = (0;1;2), (0;-1;-2)$.

6 Giải HPT $\begin{cases} x^3 + x^2 + x - 2 = y \\ y^3 + y^2 + y - 2 = z \\ z^3 + z^2 + z - 2 = x \end{cases}$ ĐS: $(x;y;z) = (1;1;1)$.

7 iải HPT $\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$ ĐS: $(x;y;z) = (2;2;2)$