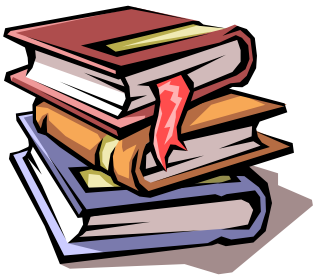
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN

LUYỆN THI LỚP 10

(Liệu hệ tài liệu word môn toán SĐT (zalo) : 039.373.2038)

Tài liệu sưu tầm, ngày 15 tháng 1 năm 2023

CHUYÊN ĐỀ:
RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

DẠNG 1: THU GỌN CÁC BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

1. Phương pháp giải

Biến đổi biểu thức trong căn về dạng $\sqrt{A^2}=|A|$, sau đó dựa vào dấu của A để mở giá trị tuyệt đối nếu có.

- $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A, & A\ge 0\\ -A, & A<0\end{cases}$
- $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}=A\sqrt{B}$ với $A,\ B\ge 0$.
- $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}=-A\sqrt{B}$ với $A<0,\ B\ge 0$.
- $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ với B > 0 (khử căn thức ở mẫu).
- $\dfrac{M}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{M\left(\sqrt{A}\mp\sqrt{B}\right)}{A-B}$ với $A,\ B\ge 0,\ A\ne B$ (trục căn thức).
- $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ với $B\ne 0$.
- $\sqrt[3]{AB}=\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$ với $B\ne 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B}}=\dfrac{\sqrt[3]{A^2}\mp\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{A\pm B}$ với $A\ne\pm B$.

2. Bài tập

Bài 1: Tính giá trị biểu thức:

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$

b) $\sqrt{23+8\sqrt{7}}-\sqrt{7}$

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3+\sqrt{2}$

e) $P=\sqrt{45}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

f) $A=\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

g) $A=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-3\sqrt{12}+2\sqrt{27}\right)$

Lời giải:

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{5-2.2\sqrt{5}+4}-\sqrt{5}=\sqrt{\sqrt{5^2}-2.2\sqrt{5}+2^2}-\sqrt{5}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}-\sqrt{5}$

$= \left|\sqrt{5}-2\right| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$

b) $\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = \sqrt{7+2.4\sqrt{7}+16} - \sqrt{7} = \sqrt{\sqrt{7^2}+2.4\sqrt{7}+4^2} - \sqrt{7} = \sqrt{\left(\sqrt{7}+4\right)^2} - \sqrt{7}$

$= \left|\sqrt{7}+4\right| - \sqrt{7} = \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} = 4$

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{3^2}-2\sqrt{3}+1} - \sqrt{3} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} - \sqrt{3} = \left|\sqrt{3}-1\right| - \sqrt{3} = -1$

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2} = \sqrt{9+2.3\sqrt{2}+2} - 3 + \sqrt{2} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} - 3 + \sqrt{2} = \left|2+\sqrt{2}\right| - 3 + \sqrt{2}$

$= 2 + \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1$

e) $P = \sqrt{45} - \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{9.5} - \sqrt{4-4\sqrt{5}+5} = 3\sqrt{5} - \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = 3\sqrt{5} - \left|2-\sqrt{5}\right|$

$= 3\sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 2 + 2\sqrt{5}$

f) $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{4-2.2\sqrt{5}+5} + \dfrac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{5} + 2$

$= \left|2-\sqrt{5}\right| + \sqrt{5} + 2 = \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 = 2\sqrt{5}$

g) $A = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{27}\right) = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 3\sqrt{4.3} + 2\sqrt{9.3}\right) = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) = 3$

Chú ý: Để tính toán các biểu thức chứa cắn thức, ta cần biến đổi đưa về hằng đẳng thức $\left(A+B\right)^2$ hoặc $\left(A-B\right)^2$, sau đó phá dấu giá trị tuyệt đối rồi tiếp tục tính toán.

Bài 2: Rút gọn biểu thức:

a) $\dfrac{2}{x^2-y^2}.\sqrt{\dfrac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x \ne y$.

b) $\dfrac{2}{2a-1}.\sqrt{5a^2\left(1-4a+4a^2\right)}$ với $a > \dfrac{1}{2}$.

c) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ với $a,\ b > 0$.

d) $\sqrt{\dfrac{y}{1-2x+x^2}}.\sqrt{\dfrac{4y-8xy+4yx^2}{81}}$ với $y > 0,\ x \ne 1$.

Lời giải:

a) $\dfrac{2}{x^2-y^2}.\sqrt{\dfrac{3(x+y)^2}{2}} = \dfrac{2}{(x-y)(x+y)}.\left|x+y\right|.\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{2}{(x-y)(x+y)}.(x+y).\dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{x-y}$

b) $\dfrac{2}{2a-1}.\sqrt{3a^2\left(1-4a+4a^2\right)} = \dfrac{2}{2a-1}.\left|a\right|.\sqrt{5\left(1-2a\right)^2} = \dfrac{2}{2a-1}.a.\sqrt{5}.\left|1-2a\right|$

$= \dfrac{2}{2a-1}.a.\sqrt{5}.(1-2a) = 2a\sqrt{5}$

c) $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{ab}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}.\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{a}{b}}$

d) $\sqrt{\frac{y}{1-2x+x^2}}.\sqrt{\frac{4y-8xy+4yx^2}{81}}=\sqrt{\frac{y}{(1-x)^2}}.\sqrt{\frac{4y(1-2x+x^2)}{9^2}}=\frac{\sqrt{y}}{|1-x|}.\frac{2}{9}.|1-x|.\sqrt{y^2}$

$=\frac{2}{9}\sqrt{y^2}=\frac{2}{9}y$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:

a) $A=\frac{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}$ với x, y > 0.

b) $B=\frac{\sqrt{x^3-1}-1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1$.

c) $C=\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ với $x\ge 2$.

d) $D=\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x,\ y\ge 0,\ x\ne y$.

e) $E=\frac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}$ với $x\ge 0$.

Lời giải:

a)

$A=\frac{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}=\frac{\left(\sqrt{x^2y}+\sqrt{y^2x}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}=x-y$

b) $B=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x^3}-1^3}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$

c) $C=\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=\sqrt{x+2\sqrt{2}.\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2\sqrt{2}.\sqrt{x-2}}$

$=\sqrt{x-2+2\sqrt{2}.\sqrt{x-2}+2}+\sqrt{x-2-2\sqrt{2}.\sqrt{x-2}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)^2}$

$=\left|\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|$

d) $D=\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x+\sqrt{xy}+y$

e) $E=\frac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}=\frac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+\sqrt{3^3}}=\frac{x-\sqrt{3x}+3}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{x-3}$

DẠNG 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC

1. Phương pháp giải

Sử dụng các hằng đẳng thức cơ bản sau:

- $x-y=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$
- $x\pm 2\sqrt{xy}+y=\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2$
- $x\sqrt{x}\pm 1=\sqrt{x^3\pm 1}=\left(\sqrt{x}\pm 1\right)\left(x\mp\sqrt{x}+1\right)$
- $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A, & A\geq 0\\ -A, & A<0\end{cases}$

2. Bài tập

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $A=\left(\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-1$.

a) Tìm điều kiện.

b) Rút gọn A.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $\begin{cases}x-4\neq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 4\\ x\geq 0\end{cases}$

b) $A=\left(\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-1=\left(\dfrac{2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-1$

$=\dfrac{2+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}:\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-1=\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\left(\sqrt{x}+2\right)-1=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-1$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$

Vậy $A=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$.

Hướng dẫn

Bài 2: Cho $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{x-1}{1-x}$.

a) Tìm điều kiện.

b) Rút gọn B.

a) Điều kiện: $\begin{cases}\sqrt{x}-1\neq 0\\ 1-x\neq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\geq 0\end{cases}$

b)

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{x-1}{1-x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+\sqrt{x}-1-x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}-1-x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $B=\frac{2}{\sqrt{x}+1}$.

Bài 3: Rút gọn biểu thức $C=\left(2-\frac{2}{1-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\ 1-\sqrt{x}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\neq 1\end{cases}$

$$C=\left(2-\frac{2}{1-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)=\frac{2-2\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}:\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}:\frac{x+2-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{-2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}:\frac{x+2-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.\left(\sqrt{x}-1\right)=2\sqrt{x}$$

Vậy $C=2\sqrt{x}$ với $x\geq 0,\ x\neq 1$.

Bài 4: Rút gọn biểu thức $D=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-\frac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$

với $0\leq x\neq 1$.

Hướng dẫn

$$D=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-\frac{x\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x+1\right)-\left(x+1\right)} \right) - \frac{\sqrt{x^3}+1}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} \right) - \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} : \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} - \left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} : \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} - \left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} - \left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} - \left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \left(\sqrt{x}+1\right) = \frac{x+1+\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+1+\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $D = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0,\ x \neq 4$.

Bài 5: Rút gọn biểu thức $E = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-4}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0,\ x \neq 4$.

Hướng dẫn

$$E = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-4}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \right) = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-5\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}-5\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = 1$$

Bài 6: Rút gọn $A = \frac{x-\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} + \frac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}$ với x > y > 0.

Hướng dẫn

$$A = \frac{x-\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} + \frac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}} = \frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}} + \frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}$$

$$= \frac{x-\sqrt{xy}+y}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)} + \frac{x+\sqrt{xy}+y}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = \frac{2\sqrt{x}}{x-y}$$

Vậy $A = \frac{2\sqrt{x}}{x-y}$ với $x,\ y > 0$.

Bài 7: Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$. Rút gọn P.

Hướng dẫn

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x+1\right)-\left(x+1\right)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} = \frac{2\sqrt{x}-(x+1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)} : \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}$$

$$= \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)} \cdot \frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy $P = \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \ge 0,\ x \ne 1$.

Bài 8: Cho biểu thức $A = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - 1\right)$.

a) Tìm điều kiện.

b) Rút gọn A.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - 1\right)$

$$= \frac{3\left(x+\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x}-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

b) $A = \frac{3\left(x+\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

$$= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} + \frac{\left(\sqrt{x}-2\right).\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-\left(x-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} + \frac{2\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{2x+3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} + \frac{2\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} + \frac{2\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{2x-3\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{2x-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}. \text{ Vậy } A = \frac{2x-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \text{ với } x \geq 0,\ x \neq 1.$$

DẠNG 3: CHO GIÁ TRỊ CỦA x, TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

1. Phương pháp giải

- Bước 1: Đặt điều kiện và chỉ ra giá rị đã cho của x thỏa mãn điều kiện.
- Bước 2: Tìm giá trị của x (nếu chưa biết) hoặc biến đổi đưa giá trị x về dạng thu gọn rồi thay vào biểu thức rồi rút gọn.
- Bước 3: Tính kết quả, trục căn thức ở mẫu và kết luận.

2. Bài tập

Bài 1: Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ khi:

a) $x = 36$ **b)** $x = 6-2\sqrt{5}$ **c)** $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$ **d)** $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ **e)** $x = \frac{4}{\sqrt{3}+2} - \frac{4}{\sqrt{3}-2}$

Lời giải:

a) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$

Vì $x = 36$ thỏa mãn điều kiện nên thay $x = 36$ vào A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{36}-1}{\sqrt{36}-2} = \frac{6-1}{6-2} = \frac{5}{4}$$

b) Vì $x = 6-2\sqrt{5}$ thỏa mãn điều kiện nên thay vào A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}-1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}-2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}-1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}-2} = \frac{\left|\sqrt{5}-1\right|-1}{\left|\sqrt{5}-1\right|-2} = \frac{\sqrt{5}-1-1}{\sqrt{5}-1-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-3}$$

$= \dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+3\right)}{5-9} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

c) Ta có $x = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 4-2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

Vì $x = \left(\sqrt{3}-1\right)^2$ thỏa mãn điều kiện nên thay vào A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-2} = \frac{\left|\sqrt{3}-1\right|-1}{\left|\sqrt{3}-1\right|-2} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-3} = \frac{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+3\right)}{-6} = \frac{-3+\sqrt{3}}{-6} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

d) Ta có $x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Vì x thỏa mãn điều kiện nên thay vào A ta được:

$$A = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-1}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-2} = \frac{\sqrt{3}-1-2}{\sqrt{3}-1-4} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-4} = \frac{\sqrt{3}-9}{-13} = \frac{9-\sqrt{3}}{13}$$

e) Ta có $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}+2} - \dfrac{4}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{4\left(\sqrt{3}-2\right)-4\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)} = \dfrac{4\sqrt{3}-8-4\sqrt{3}-8}{3-4} = 16$.

Vì x = 16 thỏa mãn điều kiện nên thay vào A ta được: $A = \dfrac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-2} = \dfrac{4-1}{4-2} = \dfrac{3}{2}$.

DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương pháp giải

- Bước 1: Tìm điều kiện để biểu thức xác định.
- Bước 2: Quy đồng mẫu.
- Bước 3: Bỏ mẫu, tìm x, đối chiếu với điều kiện và kết luận.

2. Bài tập

2.1. Đưa về phương trình tích

Bài 1: Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \ge 0$,

$$B = \left(\frac{-2\sqrt{x}+10}{x-25} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}\right) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+5} \text{ với } x \ge 0,\ x \ne 25.$$

a) Tính giá trị biểu thức A tại x = 9.

b) Rút gọn B.

c) Tìm x để $\dfrac{A}{B} = 3$.

Lời giải:

a) Vì x = 9 thỏa mãn điều kiện của A nên thay vào A ta được: $A=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+2}=\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$.

b) Ta có:

$$B=\left(\frac{-2\sqrt{x}+10}{x-25}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}\right):\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+5}=\left(\frac{-2}{\sqrt{x}+5}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}\right).\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+5}.\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy $B=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 25$.

c) Ta có: $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}:\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

Theo bài ra $\frac{A}{B}=3$ nên $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\sqrt{x}-6\Leftrightarrow -2\sqrt{x}=-6\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$.

Kết hợp điều kiện x = 9 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho biểu thức $P=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P=\frac{13}{3}$.

Lời giải:

Điều kiện: x > 0.

Theo đề bài $P=\frac{13}{3}\Leftrightarrow\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{13}{3}\Leftrightarrow 3x+3\sqrt{x}+3=13\sqrt{x}\Leftrightarrow 3x-10\sqrt{x}+3=0$

$$\Leftrightarrow 3x-10\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow 3x-9\sqrt{x}-\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(3\sqrt{x}+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-3=0\\3\sqrt{x}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=\frac{1}{9}\end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $x=9$ hoặc $x=\frac{1}{9}$ thì $P=\frac{13}{3}$.

Bài 3: Cho biểu thức $M=\frac{3}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $M=\frac{\sqrt{x}}{8}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\\sqrt{x}-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\ne 4\end{cases}$

Theo giải thiết ta có $\frac{3}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}}{8}\Leftrightarrow 24=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)\Leftrightarrow 24=x-2\sqrt{x}\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-24=0$

$$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-16-8=0\Leftrightarrow\left(x-16\right)-2\left(\sqrt{x}+4\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)-2\left(\sqrt{x}+4\right)=0$$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+4=0 \ \ (vô\ lí)\\ 3\sqrt{x}-6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với x = 36 thì $M=\dfrac{\sqrt{x}}{8}$.

2.2. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Trường hợp 1: $\left|f(x)\right|=a$ với a = const > 0 thì $f(x)=a$ hoặc $f(x)=-a$.

Trường hợp 2: $\left|f(x)\right|=g(x)$.

- Cách 1: Với $f(x)\ge 0$ thì $\left|f(x)\right|=f(x) \Rightarrow f(x)=g(x)$.

  Với $f(x)<0$ thì $\left|f(x)\right|=-f(x) \Rightarrow -f(x)=g(x)$.

- Cách 2: $\left|f(x)\right|=g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}g(x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{array}\right.$

Bài 1: Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\ge 0,\ x\ne 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi x = 49.

b) Rút gọn B.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A=B.\left|x-4\right|$.

Hướng dẫn

a) Ta có x = 49 thỏa mãn điều kiện của A nên thay vào A ta được: $A=\dfrac{\sqrt{49}+2}{\sqrt{49}-5}=\dfrac{7+2}{7-5}=\dfrac{9}{2}$.

Vậy với x = 49 thì $A=\dfrac{9}{2}$.

b) $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{x}+5\right)+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$

Vậy $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Ta có $A=B.\left|x-4\right| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}.\left|x-4\right| \Leftrightarrow \left|x-4\right|=\sqrt{x}+2 \quad (*)$

Cách 1:

+) Nếu $x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 4$

$(*) \Leftrightarrow x-4=\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow x=9$

(thỏa mãn $x\ge 4$)

+) Nếu $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$

$(*) \Leftrightarrow 4-x=\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$

(thỏa mãn x < 4)

Kết hợp với điều kiện ta được x = 9 hoặc x = 1.

Cách 2: Vì $\sqrt{x}+2>0 \forall x$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=\sqrt{x}+2 \\ x-4=-\sqrt{x}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x}-6=0 \\ x+\sqrt{x}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}-3=0 \\ \sqrt{x}-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=1 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy x = 9 hoặc x = 1.

Bài 2: Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$. Tìm x để $A=B.\left|x-4\right|$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x}-5\neq 0 \\ x\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq 25 \\ x\geq 0 \end{array}\right.$

Ta có: $A=B.\left|x-4\right| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2=\left|x-4\right|$

Vì $\sqrt{x}+2>0 \forall x$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=\sqrt{x}+2 \\ x-4=-\sqrt{x}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x}-6=0 \\ x+\sqrt{x}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}-3=0 \\ \sqrt{x}-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=1 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy x = 9 hoặc x = 1.

2.3. Đưa về dạng bình phương $m^2+n^2=0$ hoặc $m^2+\sqrt{n}=0$

Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức, đưa phương trình về dạng $m^2+n^2=0$ hoặc $m^2+\sqrt{n}=0$.
- Bước 2: Lập luận do $m^2, n^2 \geq 0$ nên $m^2+n^2\geq 0$ hoặc do $\sqrt{n}\geq 0$ nên $m^2+\sqrt{n}\geq 0$.
- Bước 3: Khẳng định $m^2+n^2\geq 0$ hoặc $m^2+\sqrt{n}\geq 0$ khi m = n = 0.
- Bước 4: Tìm x, đối chiếu với điều kiện và kết luận.

Bài 1: Cho biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P.\sqrt{x}=6\sqrt{x}-3-\sqrt{x-4}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \ge 0$.

Theo đề bài ta có:

$$\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)^2 = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x-4} = 0$$

Do $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \ge 0,\ \sqrt{x-4} \ge 0$ nên $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x-4} \ge 0$.

Do đó $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x-4} = 0$ chỉ xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{x}-2=0\\ \sqrt{x-4}=0\end{cases} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với x = 4 thì $P.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Bài 2: Cho biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$. Tìm x để $P.\sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x > 0$.

Theo đề bài ta có:

$$\frac{x+3}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x + 3 + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{3x} + 3 + x - 1 - 2\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2 + x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 = 0$$

Vì $\begin{cases}\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2 \ge 0\\ \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 \ge 0\end{cases}$ nên $\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 = 0$ khi $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{3}=0\\ \sqrt{x-2}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Vậy với x = 3 thì $P.\sqrt{x} + x - 1 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{x-2}$.

DẠNG 5: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương pháp giải

- Bước 1: Tìm điều kiện cho biểu thức xác định.
- Bước 2: Quy đồng đưa về dạng: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \ge 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \le 0$.
- Bước 3: Giải bất phương trình, đối chiếu với điều kiện và kết luận.

2. Bài tập

Bài 1: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A < 1.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 4 \end{cases}$

Theo đề bài A < 1 nên $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0$

Vì 3 > 0 nên $\frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0$ khi $\sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 0$ suy ra $0 \le x < 4$ thì A < 1.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Bài 2: Cho $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$.

Chú ý: Dạng $\sqrt{P} < m \ (m > 0)$, trước hết ta cần giải điều kiện phụ $P \ge 0$ để $\sqrt{P}$ xác định sau đó mới giải $P \le m^2$.

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 0$.

Ta có $\sqrt{P}$ xác định khi $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \ge 0$ do $\sqrt{x}+1 > 0 \forall x$ nên $\sqrt{x} - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$ (thỏa mãn ĐK)

Ta có:

$$\sqrt{P} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}-8-\sqrt{x}-1}{4\left(\sqrt{x}+1\right)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-9}{4\left(\sqrt{x}+1\right)} < 0$$

Do $4\left(\sqrt{x}+1\right) > 0$ nên $\frac{3\sqrt{x}-9}{4\left(\sqrt{x}+1\right)} < 0$ khi $3\sqrt{x} - 9 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \le 3 \Leftrightarrow 0 \le x \le 9$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 4$ ta được $4 \le x < 9$.

DẠNG 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Phương pháp giải

- Bước 1: Tìm điều kiện để biểu thức xác định.
- Bước 2: Phá dấu giá trị tuyệt đối.

$$|A| = A \ khi \ A \ge 0; \qquad |A| > A \ khi \ A < 0$$
$$|A| = -A \ khi \ A < 0; \qquad |A| > -A \ khi \ A > 0$$

- Giải bất phương trình, kết luận.

2. Bài tập

Bài 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $|P| > P$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 4 \end{cases}$

Ta có $|P| > P$ khi $P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} < 0$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4$

Trường hợp 2: $\begin{cases} \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 4 \end{cases}$ (loại)

Vậy $0 < x < 4$ thì $|P| > P$.

DẠNG 7: SO SÁNH, CHỨNG MINH BẰNG CÁCH XÉT HIỆU

1. Phương pháp giải

- Để chứng minh $x > f(x) > g(x)$, xét hiệu $f(x) - g(x)$.
- Để so sánh X và Y, xét hiệu X – Y rồi đưa về so sánh với số 0.
- Để so sánh P và P^2, xét hiệu $P - P^2 = P(P-1)$.
- Để so sánh P và $\sqrt{P}$ (khi $\sqrt{P}$ có nghĩa), xét $P - \sqrt{P} = \sqrt{P}\left(\sqrt{P} - 1\right) = \sqrt{P}.\dfrac{P-1}{\sqrt{P}+1}$.

  Do $\begin{cases} \sqrt{P} > 0 \\ \sqrt{P} + 1 > 0 \end{cases}$, ta chỉ cần xét P – 1 với số 0 rồi kết luận.

2. Bài tập

Bài 1: Cho $A = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x + 3}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \dfrac{2 - 5\sqrt{x}}{x - 4}$ với $x \ge 0,\ x \ne 4$.

a) Rút gọn P = A.B

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $(6x + 18).P \ge x + 9$.

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2 - 5\sqrt{x}}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right) - 2 + 5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)}$$

$$= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2 - 2 + 5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 2\right)}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

Theo đề bài ta có P = A.B $\Leftrightarrow P = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x + 3}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 3}$.

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

b) Theo đề bài $(6x+18).P\ge x+9\Leftrightarrow (6x+18).\dfrac{\sqrt{x}}{x+3}\ge x+9\Leftrightarrow 6\sqrt{x}\ge x+9$

$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9\le 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-3\le 0\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy với x = 9 thì $(6x+18).P\ge x+9$.

Bài 2: Cho biểu thức $A=\dfrac{x+3}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}$. Chứng minh rằng $A\ge 1$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\ge 0$.

Xét hiệu: $A-1=\dfrac{x+3}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}-1=\dfrac{x+3-2\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

Do $\begin{cases}\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0\\ 2\left(\sqrt{x}+1\right)\ge 0\end{cases}$ nên $\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\ge 0\Leftrightarrow A-1\ge 0\Leftrightarrow A\ge 1$.

Bài 3: Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$, $B=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Khi A > 0 so sánh B với 3.

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ \sqrt{x}-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$

Theo đề bài A > 0 $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}>0$.

Mà $\sqrt{x}+3>0\forall x$ nên để $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}>0$ thì $\sqrt{x}-1>0\Leftrightarrow x>1$ (thỏa mãn).

Xét hiệu $B-3=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-3=\dfrac{x-\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}-1}$.

Do $\begin{cases}\left(\sqrt{x}-2\right)^2\ge 0\forall x>1\\ \sqrt{x}-1>1\forall x>1\end{cases}$ nên $B-3\ge 0\Rightarrow B\ge 3$.

Vậy khi A > 0 thì $B\ge 3$.

Bài 4: Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{4\sqrt{x}}{4-x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \left(\sqrt{3}-2\right)^2$.

b) Rút gọn B.

c) Đặt P = A.B. Tìm tất cả các giá trị của x để $P < P^2$.

Hướng dẫn

a) Ta có $x = \left(\sqrt{3}-2\right)^2$ thỏa mãn điều kiện, thay vào A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-5}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-2} = \frac{\left|\sqrt{3}-2\right|-5}{\left|\sqrt{3}-2\right|-2} = \frac{2-\sqrt{3}-5}{2-\sqrt{3}-2} = \frac{-3-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{-\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$$

Vậy khi $x = \left(\sqrt{3}-2\right)^2$ thì $A = \sqrt{3}+1$.

b) Ta có $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}}{4-x} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} - \frac{2}{\sqrt{x}+2}$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-4\sqrt{x}-2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x+2\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \ge 0,\ x \ne 4$.

c) Ta có $P = A.B = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}.\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$.

Theo đề bài $P - P^2 < 0 \Leftrightarrow P(1-P) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}\left(1-\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{7\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2} < 0$.

Do $\begin{cases} 7 > 0 \\ \sqrt{x}+2 > 0 \end{cases}$ nên $\frac{7\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2} < 0$ khi $\sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 25$.

Kết hợp với điều kiện, khi $0 < x < 25$ và $x \ne 4$ thì $P < P^2$.

Bài 5: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$. Khi $\sqrt{P}$ xác định, so sánh $\sqrt{P}$ và P.

Hướng dẫn

Điều kiện: x > 0.

$\sqrt{P}$ xác định khi $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \ge 0$. Do $\sqrt{x} > 0$ nên $\sqrt{x}-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$.

Xét hiệu $\sqrt{P} - P = \sqrt{P}\left(1-\sqrt{P}\right) = \sqrt{P}.\frac{1-P}{1+\sqrt{P}}$

Do $\begin{cases} P \ge 0 \\ 1+\sqrt{P} > 0 \end{cases}$ và $1-P = 1-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} > 0 \forall x \ge 4$

$\Rightarrow \sqrt{P}.\dfrac{1-P}{1+\sqrt{P}} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{P}-P \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{P} \ge P$.

Vậy $x \ge 4$ thì $\sqrt{P} \ge P$.

DẠNG 8: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Dạng 8.1: Dựa vào điều kiện $x \ge 0$ để tìm min và max

$$P = a + \frac{b}{\sqrt{x}+c} \quad (b>0,\ c>0)$$

$$Q = a - \frac{b}{\sqrt{x}+c} \quad (b>0,\ c>0)$$

- Bước 1: Đặt điều kiện $x \ge 0$ đưa về dạng P hoặc Q.
- Bước 2: Biến đổi.
  - ❖ $\forall x \ge 0$ ta có: $\sqrt{x} \ge 0$

    $\Rightarrow \sqrt{x}+c \ge c \Rightarrow \dfrac{b}{\sqrt{x}+c} \le \dfrac{b}{c} \Rightarrow a+\dfrac{b}{\sqrt{x}+c} \le a+\dfrac{b}{c} \Rightarrow P \le a+\dfrac{b}{c}$
  - ❖ $\forall x \ge 0$ ta có: $\sqrt{x} \ge 0$

    $\sqrt{x}+c \ge c \Rightarrow \dfrac{b}{\sqrt{x}+c} \le \dfrac{b}{c} \Rightarrow -\dfrac{b}{\sqrt{x}+c} \ge -\dfrac{b}{c} \Rightarrow a-\dfrac{b}{\sqrt{x}+c} \ge a-\dfrac{b}{c} \Rightarrow Q \ge a-\dfrac{b}{c}$
- Bước 3: Kết luận $\max P = a+\dfrac{b}{c}$ khi x = 0, $\min Q = a-\dfrac{b}{c}$ khi x = 0.

Bài 1:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \dfrac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}$.

Lời giải:

a) Điều kiện: $x \ge 0$.

Ta có $P = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = 1-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$.

$\forall x \ge 0$ ta có:

$$\sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \ge 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \le \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+1} \ge -\frac{1}{3} \Rightarrow 1-\frac{3}{\sqrt{x}+1} \ge \frac{2}{3} \Rightarrow P \ge \frac{2}{3}$$

Vậy $\min P = \dfrac{2}{3}$ khi x = 0.

b) Điều kiện: $x \ge 0$.

Ta có $Q=\dfrac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2\sqrt{x}+4+2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}=2+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$.

$\forall x\ge 0$ ta có: $\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\le 1\Rightarrow 2+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\le 3\Rightarrow Q\le 3$

Vậy $\max Q=3$ khi x = 0.

Dạng 8.2: Dùng bất đẳng thức Côsi

- Bước 1: Khử x trên tử.
- Bước 2: Dựa vào mẫu để thêm bớt hai vế với một số thích hợp.
- Bước 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi $a+b\ge 2\sqrt{ab}\ \forall a,b\ge 0$. Dấu = xảy ra khi a = b.

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: x > 0. Ta có $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

Vì $\sqrt{x}>0,\dfrac{3}{\sqrt{x}}>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{3}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{3}$.

Dấu = xảy ra khi $\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=3$.

Vậy $\min P=2\sqrt{3}$ khi x = 3.

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{x-\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}+2}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\ge 0$.

Ta có $A=\dfrac{x-\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{x-4-\sqrt{x}-2+16}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}$

$=\sqrt{x}-3+\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}+2+\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}-5$

Vì $\sqrt{x}+2>0$ và $\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}>0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$\sqrt{x}+2+\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right).\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}}=8\Rightarrow\sqrt{x}+2+\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}-5\ge 3\Rightarrow A\ge 3$.

Vậy $\min A=3$ khi $\sqrt{x}+2=\dfrac{16}{\sqrt{x}+2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+2\right)^2=16\Leftrightarrow\sqrt{x}+2=4\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn).

Dạng 8.3: Đưa về bình phương

$A^2\ge 0\Rightarrow A^2+m\ge m\Rightarrow \min=m\ khi\ A=0$.

$-A^2 \le 0 \Rightarrow -A^2 + m \le m \Rightarrow \max = m \ khi \ A = 0$.

Bài 1: Cho $P = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$. Tìm $\min T = P\sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: x > 0.

Ta có $T = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1} = x + 2 + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}$

$= x + 2 + x - 2\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1} = 2 - 2\sqrt{2x} + 2 + x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$

Do $\begin{cases} \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2 \ge 0 \\ \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \ge 0 \Rightarrow T \ge 0$

$\Rightarrow \min T = 0 \ khi \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{2} \ge 0 \\ \sqrt{x-1} - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

Vậy min T = 0 khi x = 2.

Chú ý: Cố gắng ép về hằng đẳng thức $\left(A+B\right)^2$ hoặc $\left(A-B\right)^2$.

Dạng 8.4: Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{x} - m}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Bước 1: Ta thấy trong hai trường hợp $\sqrt{x} - m > 0$ và $\sqrt{x} - m < 0$ thì maxA xảy ra khi $\sqrt{x} - m > 0$ còn minA xảy ra khi $\sqrt{x} - m < 0$.

Bước 2: Kẻ bảng chọn giá trị nếu cần thiết.

Bài 1: Tìm $x \in \mathbb{N}$ để $A = \dfrac{3}{\sqrt{x} - 1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, \ x \ne 1$.

MaxA xảy ra khi $\sqrt{x} - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.

Mà $x \in \mathbb{N}$ nên

$x \in \left\{2; 3; 4; ...\right\} \Rightarrow x \ge 2 \Rightarrow \sqrt{x} \ge \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \ge \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x} - 1} \le \dfrac{3}{\sqrt{2} - 1} = 3\sqrt{2} + 3$

Vậy $\max A = 3\sqrt{2} + 3$ khi $x = 2$.

Chú ý: Trong bài này, ta thường nhầm lẫn với đánh giá sau

$\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \ge -1 \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x} - 1} \ge \dfrac{-1}{3}$, kết luận $\max A = \dfrac{1}{3}$ khi x = 0

do chưa khẳng định được $\sqrt{x} - 1$ âm hay dương nên không thể chia cả hai vế cho $\sqrt{x} - 1$.

Bài 2: Cho $A=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$. Tìm $x\in\mathbb{N}$ để A đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Điều kiện $x\in\mathbb{N},\ x\neq 4$.

Ta có trong hai trường hợp $\sqrt{x}-2>0$ và $\sqrt{x}-2<0$ thì minA xảy ra khi $\sqrt{x}-2<0$.

Ta có $\sqrt{x}-2<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0\le x<4$.

Mà $x\in\mathbb{N}$ nên $x\in\{0;1;2;3\}$.

Lập bảng giá trị ta có $\min A=\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}$ khi x = 3.

DẠNG 9: TÌM x ĐỂ P NHẬN GIÁ TRỊ LÀ SỐ NGUYÊN

1. Phương pháp giải

Đặt điều kiện, biến đổi đưa về dạng $P=a+\dfrac{b}{c\sqrt{x}+d}$.

- Trường hợp 1: $x\in\mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}$ là số vô tỉ $\Rightarrow c\sqrt{x}+d$ là số vô tỉ $\Rightarrow a+\dfrac{b}{c\sqrt{x}+d}$ là số vô tỉ $\Rightarrow P\notin\mathbb{Z}$ (loại)
- Trường hợp 2: $x\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow P\in\mathbb{Z}$ khi $\dfrac{b}{c\sqrt{x}+d}\in\mathbb{Z}\Rightarrow c\sqrt{x}+d\in U(b)$.

2. Bài tập

Bài 1: Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\ge 0$.

Ta có $A=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}=2-\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$.

TH 1: $x\in\mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow 2-\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}$ là số vô tỉ (loại).

TH 2: $x\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow A\in\mathbb{Z}$ khi $\dfrac{7}{\sqrt{x}+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}+3\in U(7)\Rightarrow\sqrt{x}+3\in\{\pm 1;\pm 7\}$.

Do $\sqrt{x}+3\ge 3\Rightarrow\sqrt{x}+3=7\Rightarrow x=16$.

Vậy x = 16 thì $A\in\mathbb{Z}$.

Bài 2: Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị là số tự nhiên.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\ge 0,\ x\neq 4$.

Ta có $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{2\sqrt{x}-4+4}{\sqrt{x}-2}=2+\dfrac{4}{\sqrt{x}-2}$.

Nếu $x\in\mathbb{Z}$ nhưng $\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-2\notin\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{4}{\sqrt{x}-2}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow 2+\dfrac{4}{\sqrt{x}-2}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow P\notin\mathbb{Z}$ (loại).

Nếu $x\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow P\in\mathbb{Z}$ khi $\dfrac{4}{\sqrt{x}-2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x}-2\in U(4)\Rightarrow\sqrt{x}-2\in\left\{\pm1;\pm2;\pm4\right\}$.

Bảng giá trị:

$\sqrt{x}-2$	–4	–2	–1	1	2	4
$\sqrt{x}$	–2	0	1	3	4	6
x		0	1	9	16	36

$\Rightarrow x\in\left\{0;1;9;16;36\right\}$ thỏa mãn điều kiện.

Vì $P\in\mathbb{N}$ nên ta có bảng giá trị sau:

x	0	1	9	16	36
P	0	–2	6	4	3

Từ bảng trên ta được $x\in\left\{0;9;16;36\right\}$ thì $P\in\mathbb{N}$.

DẠNG 10: TÌM THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH P = m CÓ NGHIỆM

1. Phương pháp giải

- Bước 1: Đặt điều kiện để P xác định.
- Bước 2: Từ phương trình P = m rút $\sqrt{x}$ theo m.
- Bước 3: Dựa vào điều kiện của x giải m.

2. Bài tập

Bài 1: Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$. Tìm m để phương trình P = m có nghiệm.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\ge 0$.

Vì P = m nên $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=m\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=m\left(\sqrt{x}+2\right)\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(m-1\right)=-2m-1$.

TH 1: Nếu $m-1=0\Rightarrow 0\sqrt{x}=-3$ (loại)

TH 2: Nếu $m\ne 1\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{-2m-1}{m-1}$.

Do $\sqrt{x}\ge 0$ nên để phương trình có nghiệm thì

$$\frac{-2m-1}{m-1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2m-1\ge 0\\ m-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}-2m-1\le 0\\ m-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le\dfrac{1}{2}\\ m>1\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge\dfrac{-1}{2}\\ m<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{-1}{2}\le m<1$$

Vậy $\frac{-1}{2} \le m < 1$ thì phương trình P = m có nghiệm.

Bài 2: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với x > 0.

a) Tính giá trị biểu thức A với x = 9.

b) Rút gọn $P = \frac{B}{A}$.

c) Tìm m để phương trình P = m có hai nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn

a) Với x = 9 thỏa mãn điều kiện ta có $A = \frac{\sqrt{9}}{9+\sqrt{9}} = \frac{1}{4}$.

b) Ta có $P = \frac{B}{A} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} . \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

Vậy $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với x > 0.

c) $P = m \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = m \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1 = m\sqrt{x} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}\left(1-m\right)+1 = 0 \ (1)$.

Đặt $\sqrt{x} = t \ (t > 0) \Rightarrow t^2 + t\left(1-m\right)+1 = 0 \ (2)$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1-m\right)^2 - 4 > 0 \\ m-1 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right. \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy m > 3 thì P = m có hai nghiệm phân biệt.

II. CÁC BÀI TẬP CƠ BẢN

A. Trắc nghiệm

Câu 1. Căn bậc hai số học của 64 là

A. 8. **B.** -8. **C.** ± 8. **D.** 64.

Câu 2. Kết quả của phép tính $\sqrt{3}.\sqrt{27}$ là

A. 3. **B.** -3. **C.** 9. **D.** -9.

Câu 3. Kết quả của phép tính $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $3-2\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $3+2\sqrt{2}$.

Câu 4. Điều kiện xác định của biểu thức $\frac{1}{2x+4}$ là

A. $x \ne -2$. **B.** $x \le 2$. **C.** $x \ge 2$. **D.** $x < 2$.

Câu 5. Điều kiện xác định biểu thức $\sqrt{3x-9}$ là

A. $x>3$. **B.** $x\ge 3$. **C.** $x\le 3$. **D.** $x<3$.

Câu 6. Điều kiện xác định của biểu thức $\dfrac{2022}{\sqrt{15x-75}}$ là

A. $x\ge 5$. **B.** $x>5$. **C.** $x<5$. **D.** $x\ne 5$.

Câu 7. Điều kiện xác định của biểu thức $\dfrac{2022}{\sqrt[3]{4x-2}}$ là

A. $x\ge \dfrac{1}{2}$. **B.** $x>\dfrac{1}{2}$. **C.** $x\ne \dfrac{1}{2}$. **D.** $x<\dfrac{1}{2}$.

Câu 8. Điều kiện xác định biểu thức $\sqrt{\dfrac{-2022}{4x-8}}$ là

A. $x\ge 2$. **B.** $x>2$. **C.** $x\le 2$. **D.** $x<2$

Câu 9. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{2x^2+1}$ là

A. $x\ge \dfrac{1}{2}$. **B.** $x<\dfrac{1}{2}$. **C.** $x>\dfrac{1}{2}$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Câu 10. Điều kiện xác định của biểu thức $A=\dfrac{2x+1}{3\sqrt{x}-9}$ là

A. $\begin{cases}x>0\\ x\ne 9\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 9\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x\ge 0\\ x>\dfrac{-1}{2}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 3\end{cases}$.

Câu 11. Kết quả rút gọn biểu thức $\sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}$ là

A. 1. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $1+2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}-1$.

Câu 12. Biết kết quả của phép khai phương $\sqrt{7-6\sqrt{3}}=a-b\sqrt{3}$. Giá trị biểu thức $A=a+b+2022$ là

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 2024.

Câu 13. Kết quả rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$ là

A. $\dfrac{1}{x+1}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. **C.** $\sqrt{x}-1$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

Câu 14. Phân tích đa thức $x\sqrt{x}-1$ với $x\ge 0$ thành nhân tử ta được kết quả là

A. $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$. **B.** $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)$.

C. $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$. **D.** $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)$

Câu 15. Phân tích đa thức $ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$ ta được kết quả là

A. $\left(\sqrt{a}+1\right)\left(b\sqrt{a}+1\right)$. **B.** $\sqrt{a}\left(b\sqrt{a}+1\right)$. **C.** $\left(a+1\right)\left(\sqrt{a}+b\right)$. **D.** $\left(a+1\right)\left(b\sqrt{a}+1\right)$.

Câu 16. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x,y\ge 0;x\ne y$ ta được kết quả là

A. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$. **B.** $2\sqrt{x}$. **C.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. **D.** $\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

Câu 17. Kết quả rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$ là

A. $\dfrac{1}{x+1}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. **C.** $\sqrt{x}-1$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

Câu 18. Kết quả rút gọn biểu thức $A=\sqrt{x-4\sqrt{x}+4}+\sqrt{x}$ với $x<2$ là

A. 2. **B.** $2-2\sqrt{x}$. **C.** -2. **D.** $2+2\sqrt{x}$.

Câu 19. Biết biểu thức $9-4\sqrt{5}$ sau khi biến đổi $\left(a-b\sqrt{5}\right)^2$. Giá trị $a.b$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 20. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\dfrac{1}{\sqrt{a}-3b}$ ta được kết quả là

A. $\dfrac{a+3b}{a-3b}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{a}+3b}{a-9b}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{a}+3b}{a+9b}$. **D.** $\dfrac{a-3b}{a+3b}$.

Câu 21. Kết quả rút gọn biểu thức $A=\sqrt{16\,a^2}-\sqrt{4\,a^2}+\sqrt{9\,a^2}$ với $a\ge 0$ là

A. $5\,a$. **B.** $-5\,a$. **C.** $-a$. **D.** a.

Câu 22. Cho biểu thức $P=\dfrac{45}{10-5\sqrt{3}}$, biểu thức P sau khi trục căn thức có dạng $P=a+b\sqrt{3}$.

Tính $a.b$

A. 0. **B.** 27. **C.** -162. **D.** 162.

Câu 23. Giá trị x thoả mãn $\sqrt[3]{2-x}=-3$ là

A. 29. **B.** 27. **C.** -29. **D.** -27.

Câu 24. Tổng tất cả các giá trị x thoả mãn $\sqrt{4-4\,x+x^2}=8$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 25. Giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{8}{\sqrt{x}+4}$ với $x\ge 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Câu 26. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** -2

Câu 27. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$. Đặt $P=\dfrac{B}{A}$ khẳng định nào sau đây là đúng

A. $P\le 3$. **B.** $P\ge 3$. **C.** $P<3$. **D.** $\dfrac{B}{A}>3$

Câu 28. Cho biểu thức $M=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0$ tất cả các giá trị của x để biểu thức $M\ge\dfrac{2}{3}$ là

A. $x>49$. **B.** $x\ge 49$. **C.** $0\le x<49$. **D.** $0\le x\le 49$

Câu 29. Giá trị của x để biểu thức $A=-2-2\sqrt{x}+x$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3$

Câu 30. Cho biểu thức $A=\dfrac{2x-5}{x+7}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A đạt giá trị nguyên

A. -32. **B.** -32. **C.** 48. **D.** -48

------- Hết------

Đáp án

1B	**2C**	**3D**	**4A**	**5B**	**6B**	**7C**	**8D**	**9D**	**10B**	**11A**	**12A**	**13B**	**14C**	**15A**
16C	**17B**	**18A**	**19A**	**20B**	**21A**	**22D**	**23A**	**24A**	**25B**	**26D**	**27C**	**28B**	**29B**	**30A**

B. Tự luận

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

b) $B=\left(\sqrt{7}-2\right)\sqrt{9+2\sqrt{14}}$

c) $C=\dfrac{3\sqrt{5}-\sqrt{27}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\sqrt{21-2\sqrt{12}}$

d) $D=\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{45}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

Bài 2: Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{4+\sqrt{8}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

b) $B=\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\sqrt{175}-\dfrac{6\sqrt{2}-4}{3-\sqrt{2}}$

c) $C=\sqrt[3]{18\sqrt{3}-14\sqrt{5}}$

d) $D=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$

e) $E=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}$

Bài 3: Cho $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}\right).\dfrac{3\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}}$ với $x>0,\ x\neq 1$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x=4+2\sqrt{3}$.

Bài 4: Cho $A=\dfrac{x+2\sqrt{x}-11}{x+4\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x\geq 0$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi $x=3-2\sqrt{2}$.

Bài 5: Cho $B=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện của B. Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm x để $2P=2\sqrt{x}+5$.

Bài 6: Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x+4}{x-4}$ với $x\geq 0,\ x\neq 4$.

a) Tính giá trị của A khi x = 9.

b) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

c) Đặt $P=\dfrac{A}{B}$, so sánh P với 2.

Bài 7: Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{2x}{x-9}$ với $x>0,\ x\neq 9$.

a) Tính giá trị của A khi x = 16.

b) Chứng minh rằng $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P < 0 với P = A.B

Bài 8: Cho $A = \dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ với $x \ge 0,\ x \ne 25$.

a) Tính giá trị biểu thức B khi x = 49.

b) Rút gọn A.

c) Tìm x để $\dfrac{B}{A} = |x-4|$.

Bài 9: Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \dfrac{18-\sqrt{x}}{x-4} + \dfrac{4}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ với $x \ge 0,\ x \ne 4$.

a) Tính giá trị của A khi x = 9.

b) Rút gọn B.

c) Đặt P = A : B. Tìm x để $|P| = P$.

Bài 10: Cho $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \ge 0,\ x \ne 4$.

a) Tính giá trị của A khi x = 16.

b) Rút gọn B.

c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P = A.B có giá trị nguyên.

Bài 11: Cho biểu thức $P = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$ và $Q = \left(\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{6x}{x-4}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0,\ x \ne 4$.

a) Tính giá trị biểu thức P tại x = 23.

b) Chứng minh rằng Q = 3.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để P = Q.

Bài 12: Cho $A = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{x-5}{x-1} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{4}{1-\sqrt{x}}$ với $x > 0,\ x \ne 1$.

a) Tính giá trị của A khi x = 9.

b) Rút gọn B.

c) Đặt P = A : B, tìm x để $\sqrt{P} < \dfrac{1}{2}$.

Bài 13: Cho $A = \dfrac{\sqrt{x}+3}{x-4}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{5\sqrt{x}+12}{x-16}$ với $x \ge 0,\ x \ne 16$.

a) Rút gọn B.

b) Tìm m để phương trình $\dfrac{A}{B} = m+1$ có nghiệm.

Bài 14: Cho $A=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{6-\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của A khi $x=3-2\sqrt{2}$.

b) Rút gọn B.

c) Tìm m để phương trình B – A = m có nghiệm.

Bài 15: Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4\sqrt{x}}{x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị A khi $x=\left(\sqrt{3}-2\right)^2$.

b) Rút gọn B.

c) Đặt P = A.B. Tìm tất cả các giá trị x để $P<P^2$.

Bài 16: Cho $A=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{2x+\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 9$.

a) Tính giá trị của A khi $x=6+2\sqrt{5}$.

b) Rút gọn B.

c) Đặt P = A.B, tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 17: Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{4}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x\ge 0,\ x\ne 9$.

a) Đặt $P=\dfrac{B}{A}$, chứng minh rằng $P=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$.

b) Tìm giá trị x nguyên nhỏ nhất để p có giá trị nguyên.

Bài 18: Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ và $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{36}{9-x}\right).\dfrac{7\sqrt{x}-2}{12}$ với $x\ge 0,\ x\ne 9$.

a) Tính giá trị của A khi x = 16.

b) Rút gọn B.

c) Tìm tất cả các giá trị x để P = A.B nhận giá trị là số nguyên dương.

Bài 19: Cho $P=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của P khi x = 9.

b) Rút gọn Q.

c) Tìm x để $\dfrac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 20:

a) Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi x = 36.

b) Rút gọn $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 10$.

c) Với biểu thức A và B nói trên hãy tìm tất cả các giá trị nguyên của x để B(A – 1) là số nguyên.

Bài 21: Cho $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \dfrac{3}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}+5}{x-1}$ với $x \geq 0,\ x \neq 1$.

a) Tính giá trị A khi x = 4.

b) Chứng minh rằng $B = \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

c) Tìm x để $P = 2AB + \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 22: Cho $A = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{4}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}-6}{x+2\sqrt{x}}$ với $x \geq 0,\ x \neq 1$.

a) Rút gọn B.

b) Tìm x nguyên để P = A.B đạt giá trị lớn nhất.

CHUYÊN ĐỀ:

HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. CÁC DANG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1: Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

Phương pháp giải: Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$.

Cách 1: Dùng phương pháp đồ thị.

- Bước 1: Vẽ d và d' trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Bước 2: Xác định giao điểm trên hình vẽ.
- Bước 3: Chứng tỏ giao điểm đó cùng thuộc d và d'.

Chú ý: Do việc xác định tọa độ giao điểm dựa trên hình vẽ nên nhiều trường hợp chưa thật sự chính xác.

Cách 2: Dùng phương pháp đại số.

- Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm d và d': $ax + b = a'x + b'$.
- Bước 2: Giải phương trình tìm x.
- Bước 3: Thay giá trị x vừa tìm được vào (d) hoặc (d'), tìm y.
- Bước 4: Kết luận tọa độ giao điểm của d và d'.

Bài 1: Cho đường thẳng $(d): y = 2x + 1$ và $(d'): y = 3x + 5$. Tìm giao điểm của d và d' bằng hai cách.

Lời giải:

Cách 1.

+) Vẽ đường thẳng $(d): y = 2x + 1$.

Giao Ox: Cho $y = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow A\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$.

Giao Oy: Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B\left(0;1\right)$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng d đi qua $A\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$ và $B\left(0;1\right)$.

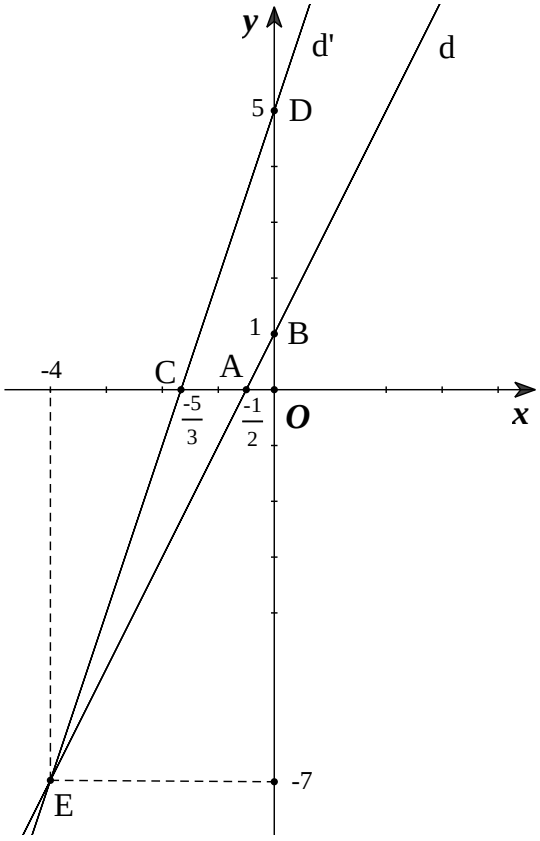
+) Vẽ đường thẳng $(d'): y = 3x + 5$.

Giao Ox: Cho $y = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5}{3} \Rightarrow C\left(\dfrac{-5}{3};0\right)$.

Giao Oy: Cho $x = 0 \Rightarrow y = y \Rightarrow D\left(0;5\right)$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng d đi qua $C\left(\dfrac{-5}{3};0\right)$ và $D\left(0;5\right)$.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038



Dựa vào đồ thị ta thấy d cắt d' tại $E\left(-4;-7\right)$. Thay tọa độ điểm E vào phương trình d và d' ta thấy thỏa mãn.

Vậy d cắt d' tại $E\left(-4;-7\right)$.

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$3x+5=2x+1 \Leftrightarrow 3x-2x=1-5 \Leftrightarrow x=-4$$

Với x = –4 thay vào phương trình đường thẳng d ta được $y=2.(-4)+1=-7$.

Vậy d cắt d' tại $E\left(-4;-7\right)$.

Bài 2: Cho đường thẳng $(d): y=ax+b$. Tìm a, b biết đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;2\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là –2.

Lời giải:

Do đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là –2 nên x = –2 và y = 0 $\Rightarrow 0=-2a+b$ (1)

Do d đi qua $A\left(1;2\right)$ nên $a+b=2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}a+b=2\\-2a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a=2\\a+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-2}{3}\\b=\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

Vậy $a=\frac{2}{3}, b=\frac{4}{3}$.

Dạng 2: Xét tính đồng quy của ba đường thẳng

Phương pháp giải: Ba đường thẳng đồng quy là ba đường thẳng phân biệt và cùng đi qua một điểm.

- Bước 1: Tìm tọa độ giao điểm của hai trong ba đường thẳng.
- Bước 2: Kiểm tra giao điểm vừa tìm được nếu thuộc đường thẳng thứ ba thì kết luận ba đường thẳng đồng quy.

Bài 1: Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 4x - 3$, $(d_2): y = 3x - 1$ và $(d_3): y = 2x + 1$. Chứng minh d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2: $4x - 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Với x = 2 thay vào phương trình d_1 ta được y = 5 $\Rightarrow$ d_1 cắt d_2 tại $A(2;5)$.

Thay tọa độ điểm A vào phương trình d_3 ta thấy 2.2 + 1 = 5.

Vậy d_1, d_2, d_3 đồng quy tại $A(2;5)$.

Bài 2: Tìm m để ba đường thẳng sau đồng quy:

$$(d_1): y = x - 4, (d_2): y = 3x - 8, (d_3): y = mx + 6$$

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm d_1 và d_2: $x - 4 = 3x - 8 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Với x = 2 thay d_1 ta được y = 2.

Vậy d_1 cắt d_2 tại $A(2; -2)$.

Để d_1, d_2, d_3 đồng quy thì $A \in d_3 \Leftrightarrow -2 = 2m + 6 \Leftrightarrow 2m = -8 \Leftrightarrow m = -4$.

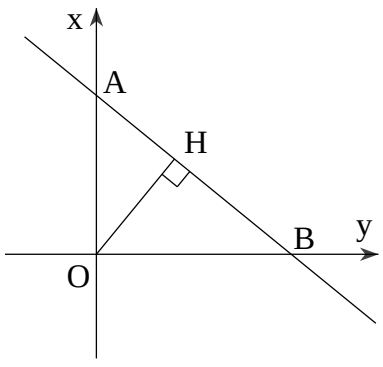
Kết luận m = –4 thì d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Dạng 3: Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến một đường thẳng không đi qua O

Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm giao điểm của d với hai trục Ox và Oy, lần lượt là A và B.
- Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d. Khi đó $OH \perp d$.
- Bước 3: Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d là OH.
- Bước 4: Xét tam giác OAB vuông tại O có đường cao AH, dùng hệ thức lượng:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$



Bài 1: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 2x - 2$ và điểm $I(3; -2)$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm O đến đường thẳng d.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

b) Từ điểm I đến đường thẳng d.

Lời giải:

a) Gọi A và B lần lượt là giao điểm của d với trục Ox và Oy. Ta có $A\left(0;1\right)$, $B\left(0;-2\right)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d $\Rightarrow d\left(0;d\right)=OH$.

Xét tam giác OAB vuông tại O có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{1^2}=\frac{5}{4}\Rightarrow OH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) Từ I dựng đường thẳng $d_1\perp Ox$, d_1 cắt d tại $C\left(3;4\right)$.

Từ I dựng đường thẳng $d_2\perp Oy$, d_2 cắt d tại $D\left(0;-2\right)$.

Gọi K là hình chiếu của I lên đường thẳng d $\Rightarrow d\left(I;d\right)=IK$.

Xét tam giác ICD vuông tại I có: $\frac{1}{IK^2}=\frac{1}{IC^2}+\frac{1}{ID^2}=\frac{1}{6^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{5}{36}\Rightarrow IK=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Bài 2: Cho hàm số $y=\left(m-2\right)x+5$ có đồ thị là đường thẳng d (m là tham số, $m\neq 2$).

a) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.

b) Tìm m để khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d bằng 3.

Lời giải:

a) Vì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên $x=2,\ y=0$

$\Rightarrow 0=\left(m-2\right).2+5\Leftrightarrow 2m-4+5=0\Leftrightarrow m=\frac{-1}{2}$

Vậy khi $m=\frac{-1}{2}$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.

b) Gọi A là giao điểm của đường thẳng d với trục Ox

$\Rightarrow \left(m-2\right)x+5=0\Leftrightarrow x=\frac{-5}{m-2}\Rightarrow A\left(\frac{-5}{m-2};0\right)$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng d với trục Oy $\Rightarrow y=6\Rightarrow B\left(0;5\right)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d, khi đó $OH\perp d$.

$\Rightarrow$ OH là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d $\Rightarrow$ OH = 3.

Xét tam giác OAB vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{9}=\frac{\left(m-2\right)^2}{25}+\frac{1}{25}\Leftrightarrow\frac{\left(m-2\right)^2}{25}=\frac{16}{225}\Leftrightarrow\left(m-2\right)^2=\frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-2=\frac{4}{3}\\m-2=\frac{-4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{10}{3}\\m=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Vậy $m=\frac{2}{3}$ hoặc $m=\frac{10}{3}$ thì khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d bằng 3.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

Dạng 5: Tìm điểm cố định của đường thẳng phụ thuộc tham số

Cho đường thẳng $y = ax + b$ phụ thuộc vào tham số m. Điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ gọi là điểm cố định của đường thẳng d nếu I luôn thuộc d với mọi giá trị của tham số m.

- Bước 1: Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định của d $\Rightarrow y_0 = ax_0 + b$.
- Bước 2: Biến đổi $y_0 = ax_0 + b$ về dạng $f\left(x_0;y_0\right)m + g\left(x_0;y_0\right) = 0$.
- Bước 3: Sử dụng đồng nhất thức $\begin{cases} f\left(x_0;y_0\right) = 0 \\ g\left(x_0;y_0\right) = 0 \end{cases}$
- Bước 4: Giải hệ tìm x_0, y_0 và kết luận.

Bài 1: Cho hàm số $y = \left(m-1\right)x + 3 + m$. Tìm điểm cố định mà hàm số đi qua với mọi m.

Lời giải:

Gọi điểm cố định mà đồ thị hàm số đi qua là $M\left(x_0;y_0\right)$.

Do M thuộc đồ thị hàm số nên

$y_0 = \left(m-1\right)x_0 + 3 + m \Leftrightarrow y_0 = mx_0 - x_0 + 3 + m \Leftrightarrow m\left(x_0+1\right) - y_0 - x_0 + 3 = 0$

$\begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ -y_0 + x_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $M\left(1;-2\right)$.

Dạng 6: Tìm tham số m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng cho trước là lớn nhất

Cách 1:

- Bước 1: Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy, H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d.
- Bước 2: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$.
- Bước 3: Tìm điều kiện để OH lớn nhất.

Cách 2:

- Bước 1: Tìm I là điểm cố định mà d luôn đi qua.
- Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d $\Rightarrow OH \le OI = const$.
- Bước 3: $OH_{\max} = OI \Leftrightarrow$ d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với OI.
- Bước 4: Tìm m, kết luận.

Bài 1: Cho đường thẳng $(d): y = mx - 2m - 1$ với m là tham số. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến d là lớn nhất.

Lời giải:

Cách 1:

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục Ox, Oy. Ta có $A\left(\frac{2m+1}{m};0\right)$ và $B\left(0;-2m-1\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d, khi đó khoảng cách từ O đến d là OH.
Xét tam giác OAB vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{m^2}{\left(2m+1\right)^2}+\frac{1}{\left(2m+1\right)^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{m^2}{\left(2m+1\right)^2}+\frac{1}{\left(2m+1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{m^2+1}{\left(2m+1\right)^2}\Leftrightarrow OH^2=\frac{\left(2m+1\right)^2}{m^2+1}\Leftrightarrow OH^2-5=\frac{4m^2+4m+1}{m^2+1}-5$$

$$\Leftrightarrow OH^2-5=\frac{-m^2+4m-4}{m^2+1}\Leftrightarrow OH^2-5=\frac{-\left(m-2\right)^2}{m^2+1}\le 0\Leftrightarrow OH^2\le 5\Leftrightarrow OH\le\sqrt{5}$$

Vậy $d\left(0;d\right)$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $m-2=0\Leftrightarrow m=2$.

Cách 2:

Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng d đi qua

$$\Rightarrow y_0=mx_0-2m-1\Leftrightarrow m\left(x_0-2\right)-1-y_0=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-2=0\\-1-y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=2\\y_0=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng d luôn đi qua điểm cố định $I\left(2;-1\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d $\Rightarrow OH\le OI$.

Ta có $OI=\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow OI\le\sqrt{5}$.

Vậy $\max OH=\sqrt{5}$ khi d đi qua I và vuông góc với OI.

Do d đi qua $O\left(0;0\right)$ và $I\left(2;-1\right)$ nên $a=\frac{-1}{2}$ và b = 0 $\Rightarrow OI:y=\frac{-1}{2}x$.

Do d đi qua I và vuông góc với OI nên $\begin{cases}\frac{-1}{2}m=-1\\2m-2m-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Vậy m = 2 thì khoảng cách từ điểm O đến d đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{5}$.

Bài 2: Cho đường thẳng $(d):y=\left(m+1\right)x-1$. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến d đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với các trục Ox, Oy. Ta có $A\left(\frac{1}{m+1};0\right)$ và $B\left(0;-1\right)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d $\Rightarrow$ khoảng cách từ điểm O đến d bằng OH.
Xét tam giác OAB vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\left(m+1\right)^2+1=m^2+2m+2$$

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{1}{m^2+2m+2} \Leftrightarrow OH^2 - 1 = \frac{1}{m^2+2m+2} - 1 \Leftrightarrow OH^2 - 1 = \frac{-m^2-2m-1}{(m+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow OH^2 - 1 = \frac{-(m+1)^2}{(m+1)^2+1} \le 0 \Leftrightarrow OH^2 \le 1 \Leftrightarrow OH \le 1$$

Vậy $\max OH = 1$ khi $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Dạng 7: Tìm m sao cho đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt tạo thành một tam giác thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải:

- Bước 1: Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục Ox và Oy.
- Bước 2: Tính độ dài OA, OB.
- Bước 3: Từ điều kiện của tam giác OAB tìm m.
- Bước 4: Kết luận.

Bài 1: Cho hàm số bậc nhất $y=(m-1)x+4(m+1)$ có đồ thị là đương thẳng d. Tìm m để đường thẳng d tạo với trục tung và trục hoành một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải:

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục Ox và Oy. Ta có $A\left(\frac{4}{1-m};0\right)$ và $B(0;4)$.

Ta có $OA = \left|\frac{4}{1-m}\right|$, $OB = 4$.

Do tam giác OAB vuông tại O nên:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2}.\left|\frac{4}{1-m}\right|.4 \Leftrightarrow \frac{2}{|1-m|} = 1 \Leftrightarrow |1-m| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-m=2 \\ 1-m=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$$

Vậy m = –1 hoặc m = 3 thì d tạo với trục tung và trục hoành một tam giác có diện tích bằng 4.

Bài 2: Cho hàm số $y=mx+3\ (m\neq 0)$ có đồ thị là đường thẳng d_1 và hàm số $y=\frac{-1}{m}x+3\ (m\neq 0)$ có đồ thị là đường thẳng d_2. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2, B và C lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoành. Tìm m để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất, tính diện tích đó.

Giải:

Do A là giao điểm d_1 và d_2 nên hoành độ điểm A thỏa mãn phương trình:

$$mx+3=\frac{-1}{m}x+3 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A(0;3)$$

Do B là giao điểm của d_1 và trục hoành nên $B\left(\frac{-3}{m};0\right)$.

Do C là giao điểm của d_2 và trục hoành nên $C(3m;0)$.

Ta có $\frac{-3}{m}.3m = -9 < 0 \forall m \neq 0 \Rightarrow$ B, C nằm về hai phía của trục Oy.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

$\Rightarrow BC = OB + OC = \left|3m\right| + \left|\dfrac{3}{m}\right|$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.BC.OA = \dfrac{1}{2}\left(\left|3m\right| + \left|\dfrac{3}{m}\right|\right).3 \ge \dfrac{3}{2}.\left|3m.\dfrac{3}{m}\right| = \dfrac{9}{2}$.

Dấu = xảy ra khi $3m = \dfrac{3}{m} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $\min S_{ABC} = \dfrac{9}{2}$ khi $m = \pm 1$.

Bài 3: Cho hàm số bậc nhất $y = \left(m-1\right)x + m - 3\ \left(m \ne 1\right)$ có đồ thị là đường thẳng d. gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với hai trục tọa độ. Tìm m sao cho tam giác OAB cân.

Lời giải:

Do A, B lần lượt là giao điểm của d với hai trục tọa độ nên $A\left(0;m-3\right)$ và $B\left(\dfrac{3-m}{m-1};0\right)$.

Ta có $OA = \left|m-3\right|,\ OB = \left|\dfrac{3-m}{3-1}\right|$.

Do tam giác OAB cân nên $OA = OB \Leftrightarrow \left|m-3\right| = \left|\dfrac{3-m}{m-1}\right| \Leftrightarrow \left|m-3\right| - \left|\dfrac{3-m}{m-1}\right| = 0$

$\Leftrightarrow \left|m-3\right|.\left(1 - \left|\dfrac{1}{m-1}\right|\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|m-3\right| = 0\\ \left|\dfrac{1}{m-1}\right| = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 3\\ \left|m-1\right| = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = 0\\ m = 2\end{array}\right.$

Vậy m = 0 hoặc m = 2 hoặc m = 3 thì d cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.

Dạng 8: Xác định phương trình đường thẳng

8.1. Xác định phương trình đường thẳng biết nó đi qua hai điểm $A\left(x_A;y_A\right),\ B\left(x_B;y_B\right)$

Phương pháp giải:

- Bước 1: Giả sử phương trình đường thẳng là $y = ax + b\ (a \ne 0)$.
- Bước 2: Do đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(x_A;y_A\right),\ B\left(x_B;y_B\right)$ nên

  $y_A = ax_A + b\ \ (1),\ y_B = ax_B + b\ \ (2)$

  Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}ax_A + b = y_A\\ ax_B + b = y_B\end{cases}$
- Bước 3: Giải hệ phương trình tìm a, b.
- Bước 4: Kết luận.

Bài 1: Viết phương trình đường thẳng d biết d đi qua a $A\left(1;2\right)$ và $B\left(-1;4\right)$.

Lời giải:

Giả sử phương trình đường d là $y = ax + b\ (a \ne 0)$.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

Do d đi qua $A\left(1;2\right)$ nên $a+b=2\Leftrightarrow a=2-b\ \ (1)$.

Do d đi qua $B\left(-1;4\right)$ nên $-a+b=4\ \ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được: $-\left(2-b\right)+b=4\Leftrightarrow 2b=6\Leftrightarrow b=3$.

Thay b = 3 vào (1) ta được a = 1.
Vậy phương trình đường thẳng d là $y=x+3$.

Bài 2: Viết phương trình đường thẳng d biết d đi qua điểm $A\left(-2;3\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng –1.

Lời giải:

Gọi phương trình đường thẳng d là $y=ax+b\ (a\neq 0)$.

Do d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là –1 nên $x=-1,y=0\Rightarrow -a+b=0\Leftrightarrow b=a\ (1)$

Do d đi qua điểm $A\left(-2;3\right)$ nên $-2a+b=3\ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được $-2a+3=3\Leftrightarrow a=-3\Rightarrow b=-3$.
Vạy phương trình đường thẳng d là $y=-3a-3b$.

Bài 3: Viết phương trình đường thẳng d viết d đi qua $M\left(-3;5\right)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Lời giải:

Gọi phương trình đường thẳng d là $y=ax+b\ (a\neq 0)$.

Do d đi qua điểm $M\left(-3;5\right)$ nên $-3a+b=5\ (2)$.

Do d cắt trục tung tại điểm có tung độ là –1 nên $x=0,y=2\Rightarrow b=-2\Rightarrow a=-1$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y=-x+2$.

8.2. Viết phương trình đường thẳng biết đường thẳng cần tìm song song, trùng, vuông góc với đường thẳng khác và đi qua một điểm cho trước

- Bước 1: Gọi phương trình đường thẳng d là $y=ax+b\ (a\neq 0)$.
- Bước 2: Do d đi qua $A\left(x_A;\ y_A\right)$ nên $y_A=ax_A+b$.

  Nếu d song song với $(d'):y=a'x+b'$ thì $\begin{cases}a=a'\\ b\neq b'\end{cases}$.

  Nếu d vuông góc với d’ thì $a.a'=1$.
  Nếu d trùng với d’ thì $a=a',\ b=b'$.

Bài 1: Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua $M\left(2;5\right)$ và song song với đường thẳng $(d'):y=-3x+5$.

b) d đi qua $A\left(1;2\right)$ và vuông góc với đường thẳng $(d'):y=\dfrac{-1}{2}x+8$.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

c) d song song với đường thẳng $(d'): y = -3x + 2$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): y = 2x - 4$ và $(d_2): y = 3x - 5$.

Lời giải:

a) Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ (a \neq 0)$.

Do d song song với d' nên $\begin{cases} a = -3 \\ b \neq 5 \end{cases} \Rightarrow (d): y = -3x + b$.

Do d đi qua $M(2;5)$ nên $5 = -32 + b \Leftrightarrow b = 11$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y = -3x + 11$.

b) Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ (a \neq 0)$.

Do d đi qua $A(1;2)$ nên $2 = a + b\ (1)$.

Do d vuông góc với d' nên $a.\left(\frac{-1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow a = 2\ (2)$.

Thay a = 2 vào (1) ta được b = 0.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y = 2x$.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là: $2x - 4 = 3x - 5 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$.

$\Rightarrow d_1$ cắt d_2 tại điểm $A(1;-2)$.

Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ (a \neq 0)$.

Do d song song với d' nên $\begin{cases} a = -3 \\ b \neq 2 \end{cases} \Rightarrow (d): y = -3x + b$.

Do d đi qua $A(1;-2)$ nên $-2 = -3.1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y = -3x + 1$.

Bài 2: Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $(d'): y = x + 5$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.

Lời giải:

Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ (a \neq 0)$.

Do d song song với d' nên $\begin{cases} a = -1 \\ b \neq 5 \end{cases} \Rightarrow (d): y = -x + b$.

Do d cắt trục hoành tại d'có hoành độ là 2 nên $-1.2 + b = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Vậy đường thẳng cần tìm là $y = -x + 2$.

8.3. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết hệ số góc

Cho đường thẳng $(d): y = ax + b\ (b \neq 0)$.

+) Hệ số góc của d là a.

+) Gọi α là góc tạo bởi d và trục Ox. Ta có:

Nếu $\alpha > 0 \Rightarrow a > 0$ và $a = \tan\alpha$.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

Nếu $\alpha < 0 \Rightarrow a < 0$ và $a = -\tan\left(180° - \alpha\right)$.

Phương pháp giải: Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ \left(a \neq 0\right)$.

Do d đi qua $M\left(x_0; y_0\right)$ nên $y_0 = ax_0 + b$ (1).

Do d có hệ số góc là k nên a = k (2), thay vào (1) tìm b.

Bài 1: Xác định đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) đi qua $H\left(-1;3\right)$ và có hệ số góc k = 5.

b) đi qua $U\left(-3;6\right)$ và tạo với trục Ox một góc $60°$.

c) đi qua $N\left(-2;1\right)$ và tạo với trục Ox một góc $135°$.

d) đi qua giao điểm G của hai đường thẳng $(d_1): y = 4x - 3$ và $(d_2): y = 2x - 5$ và có hệ số góc k = 3.

Lời giải:

a) Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ \left(a \neq 0\right)$.

Do d đi qua điểm $H\left(-1;3\right)$ và có hệ số góc k = 5 nên $\begin{cases} a = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 5x - 2$.

b) Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ \left(a \neq 0\right)$.

Do d tạo với trục Ox một góc $60°$ nên $a = \tan 60° = \sqrt{3}$.

Do d đi qua điểm $U\left(-3;6\right)$ nên $6 = -3\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 6 + 3\sqrt{3} \Rightarrow (d): y = \sqrt{3}x + 6 + 3\sqrt{3}$.

c) Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ \left(a \neq 0\right)$.

Do d tạo với trục Ox một góc $135°$ nên $a = \tan\left(180° - 35°\right) = -1$.

Do d đi qua $N\left(-2;1\right)$ nên $1 = -1.(-2) + b \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow (d): y = -x - 3$.

d) Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2: $4x - 3 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -7$.

$\Rightarrow d_1$ cắt d_2 tại $A\left(-1;7\right)$.

Gọi phương trình đường thẳng d là $y = ax + b\ \left(a \neq 0\right)$.

Do d đi qua $A\left(-1;7\right)$ và có hệ số góc k = 3 nên $\begin{cases} a = 3 \\ 7 = -1.3 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 3x + 10$.

Dạng 9: Xác định hệ số góc của đường thẳng và trục Ox

Cách 1:

- Bước 1: Vẽ đường thẳng d trên hệ họa độ Oxy.
- Bước 2: Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn.
- Bước 3: Kết luận.

Cách 2:

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

- Bước 1: Goi α là góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng d.
- Bước 2: Nếu $\alpha < 90°$ thì a > 0 và $a = \tan\alpha$.

  Nếu $\alpha > 90°$ thì a < 0 và $a = -\tan\left(180° - \alpha\right)$.
- Bước 3: Kết luận.

Bài 1: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = x + 1$ và $(d_2): y = -x\sqrt{3} - 3$. Xác định góc giữa d_1, d_2 với trục Ox.

Lời giải:

Cách 1:

+) Vẽ d_1.

Giao Oy: Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ d1 cắt Oy tại $A\left(0;1\right)$.

Giao Ox: Cho $y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ d1 cắt Ox tại $B\left(-1;0\right)$.

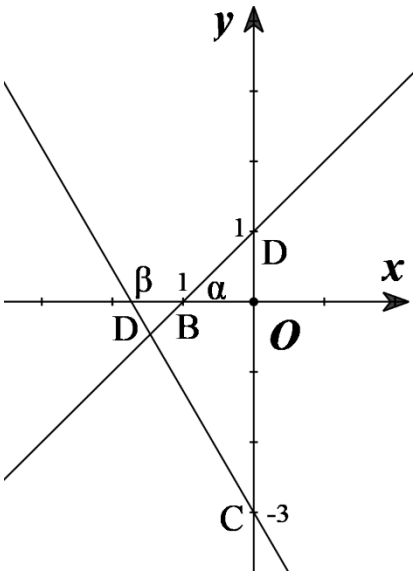
$\Rightarrow d_1$ đi qua hai điểm A, B.

+) Vẽ d_2.

Giao Oy: Cho $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ d2 cắt Oy tại $C\left(0;-3\right)$.

Giao Ox: Cho $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ d2 cắt Ox tại $D\left(-\sqrt{3};0\right)$.

$\Rightarrow d_2$ đi qua hai điểm C, D.



Gọi α là góc tạo bởi d_1 và trục Ox $\Rightarrow \alpha = \widehat{ABO}$. Xét tam giác ABO vuông tại O có:

$\tan\alpha = \dfrac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.

Gọi β là góc tạo bởi d_2 và trục Ox $\Rightarrow \beta = 180° - \widehat{OCD}$. Xét tam giác ABO vuông tại O có:

$\tan OCD = \dfrac{OC}{OB} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OCD} = 60° \Rightarrow \beta = 180° - 60° = 120°$.

Cách 2:

Gọi α là góc tạo bởi d1 và Ox. Ta có $a > 1 \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.

Gọi β là góc tạo bởi d2 và Ox. Ta có $a < 0 \Rightarrow \beta = -\tan\left(180° - \beta\right)$.

$\Leftrightarrow -\sqrt{3} = -\tan\left(180° - \beta\right) \Leftrightarrow 180° - \beta = 60° \Leftrightarrow \beta = 120°$.

Bài 2: Cho đường thẳng $(d_1): y = x + 1$ và $(d_2): y = x\sqrt{3} - 3$.

a) Vẽ d1 và d2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d1 và d2 với trục tung, C là giao điểm của d1 và d2. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

c) Tính diện tích tam giác ABC.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

Lời giải:

a) +) Vẽ d_1.

Giao Oy: Cho $x=0\Rightarrow y=1\Rightarrow$ d1 cắt Oy tại $A\left(0;1\right)$.

Giao Ox: Cho $y=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow$ d1 cắt Ox tại $M\left(-1;0\right)$.

$\Rightarrow d_1$ đi qua hai điểm A, M.

+) Vẽ d_2.

Giao Oy: Cho $x=0\Rightarrow y=-3\Rightarrow$ d2 cắt Oy tại $B\left(0;-3\right)$.

Giao Ox: Cho $y=0\Rightarrow x=\dfrac{-3}{\sqrt{3}}\Rightarrow$ d2 cắt Ox tại $N\left(\sqrt{3};0\right)$.

$\Rightarrow d_2$ đi qua hai điểm B, N.

b) Do C là giao điểm của d1 và d2 nên hoành độ điểm C thỏa mãn phương trình:

$x+1=x\sqrt{3}-3\Leftrightarrow x\left(1-\sqrt{3}\right)=-4\Leftrightarrow x=2+2\sqrt{3}\Rightarrow y=3+2\sqrt{3}\Rightarrow C\left(2+2\sqrt{3};\,3+2\sqrt{3}\right)$.

Xét tam giác vuông OBN có $\tan OBN=\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \widehat{OBN}=30^\circ\Rightarrow \widehat{ABC}=30^\circ$.

Xét tam giác OAM vuông cân tại O $\Rightarrow \widehat{MAO}=45^\circ\Rightarrow \widehat{BAC}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

$\widehat{ACB}=180^\circ-135^\circ-30^\circ=15^\circ$.

c) Ta có $OA=4$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của C lên trục Ox $\Rightarrow OI=2+2\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}.AB.OI=\dfrac{1}{2}.4.\left(2+2\sqrt{3}\right)=4+4\sqrt{3}$ (đơn vị diện tích).

B. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=\left(m-1\right)x+m+2$ (1)

a) Tìm m để hàm số (1) là hàm bậc nhất.

b) Tìm m đề đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y=5x-3$.

c) Tìm m để đồ thị hàm số (1) đi qua $M\left(1;2\right)$. Với giá trị m vừa tìm được, tính khoảng cách từ gốc O đến đồ thị hàm số (1).

Bài 2: Cho hàm số $y=\left(m-2\right)x$ có đồ thị là đường thẳng d (m là tham số, $m\neq 0$).

a) Vẽ đồ thị hàm số trên với m = 4.

b) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.

c) Tìm m để khoảng cách từ O đến d bằng 3.

Bài 3: Cho hàm số $y=\left(m-3\right)x-m$ (1).

a) Tìm m để đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $A\left(-1;2\right)$.

b) Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số (1) cắt đồ thị hàm số $y=\left(2m+1\right)x-1$ (2)?

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

Bài 4: Cho hàm số $y = \left(2 - m\right)x + 3m + 1$ (m là tham số).

a) Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng –2.

Bài 5: Cho hàm số bậc nhất $(d): y = \left(m - 1\right)x - 4$ với $m \neq 1$.

a) Vẽ đồ thị hàm số khi m = 2.

b) Tìm m để d song song với đồ thị hàm số $y = -2x + 2$.

c) Tìm m để d cắt đồ thị hàm số $(d'): y = x - 7$ tại một điểm nằm bên trái trục tung.

Bài 6: Cho hàm số bậc nhất $y = \left(m + 3\right)x + 3m - 1$ có đồ thị là d (m là tham số, $m \neq -3$).

a) Vẽ đồ thị (d) khi m = 0.

b) Tìm m để đường thẳng d cắt trục tung.

c) Xác định m để d trùng với đường thẳng $y = 2x - 4$.

Bài 7: Cho hàm số bậc nhất $y = \left(2m + 1\right)x - 2$ (m là tham số, $m \neq \frac{-1}{2}$) có đồ thị là đường thẳng d.

a) Vẽ đồ thị với m = 0.

b) Tìm m để d song song với đường thẳng $y = 4x + 3$.

c) Tìm m để d cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Bài 8: Cho hàm số $y = \left(m - 1\right)x + 4$ (m là tham số, $m \neq 1$) có đồ thị là đường thẳng d.

a) Tìm m để d song song với $(d'): y = 2x - 3$. Hãy vẽ đồ thị với giá trị m vừa tìm được.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến d bằng 2.

Bài 9: Cho hàm số bậc nhất $y = \left(m - 1\right)x + 4$ có đồ thị là đường thẳng d.

a) Tìm m để d đi qua điểm $C\left(2;8\right)$. Vẽ đồ thị ứng với tham số m vừa tìm được.

b) Tìm m để d song song với đồ thị hàm số $y = 3 - 2x$.

c) Tìm m để d tạo với trục tung và trục hoành một tam giác có diện tích bằng 4.

Bài 10: Cho hàm số $y = mx + 3$ có đồ thị là d_1 và hàm số $y = \frac{-1}{m}x + 3$ có đồ thị là d_2 ($m \neq 0$).

1. Với m = 1.

a) Vẽ các đồ thị d_1 và d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm giao điểm của d_1 và d_2.

2. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2, B và C lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoành. Tìm m để diện tích tam giác ABC lớn nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

Bài 11: Cho hàm số $y = \left(m - 1\right)x + m - 3$ (1) với m là tham số, $m \neq 1$.

a) Khi m = 0, hãy vẽ đồ thị hàm số (1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

c) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với hai trục Ox, Oy. Tìm m sao cho tam giác OAB cân.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

Bài 12: Cho hàm số bậc nhất $y=\left(2m-1\right)x-2m+5$ (m là tham số, $m\neq\frac{1}{2}$) có đồ thị là đường thẳng d và hàm số $y=2x+1$ có đồ thị là đường thẳng d'.

a) Tìm m để d đi qua $A\left(2;-3\right)$.

b) Tìm m để d song song với d'. Với giá trị m vừa tìm được, vẽ đường thẳng d và tính góc α tạo bởi d với trục Ox (làm tròn đến phút).

Bài 13: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(d):y=\left(m+1\right)x+m$ và $(d'):y=-2x+m^2+2$ (m là tham số).

a) Khi m = 2 vẽ đường thẳng d trên hệ trục tọa độ Oxy và tính khoảng cách từ O đến đường thẳng vừa vẽ.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt d' tại một điểm nằm trên trục tung.

c) Tìm tất cả các giá trị m để d tiếp xúc với đường tròn có tâm tại gốc tọa độ O và bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài 14: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(d):y=\left(m-1\right)x-m$ (m là tham số).

a) Vẽ đường thẳng d khi m = 3.

b) Tìm m để d đi qua điểm $A\left(-1;3\right)$.

c) Tìm m để d cùng $(d_1):y=x-\frac{2}{3}$ và $(d_2):y=-x+1$ đồng quy.

Bài 15: Cho hàm số $y=\left(m-1\right)x-4$ có đồ thị là đường thẳng d.

a) Tìm m để d song song với đường thẳng $y=2x+5$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số trên với giá trị m vừa tìm được ở câu a.

c) Đường thẳng d cắt trục Ox tại A, cắt Oy tại B. Tìm m để tam giác OAB cân.

Bài 16: Cho hàm số $y=x-2$ có đồ thị là đường thẳng d.

a) Vẽ đường thẳng d.

b) Xác định hệ số a, b của hàm số bậc nhất $y=ax+b$, biết đồ thị hàm số này là đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;-5\right)$ và song song với d.

c) Tìm giá trị của m để đường thẳng $y=\left(m-3\right)x+5$ (m là tham số, $m\neq3$) cắt đường thẳng d tại một điểm nằm bên phải trục tung.

Bài 17: Cho $(d):y=\left(k+1\right)x+k$.

a) Tìm giá trị của k để d đi qua $A\left(1;2\right)$.

b) Tìm giá trị của k để d song song với $y=2x+3$.

c) Tìm điểm cố định mà d đi qua với mọi k.

Bài 18: Cho $(d_1):y=\left(m-1\right)x+2m+1$.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

a) Tìm m để d_1 cắt trục tung tại điểm có tung độ là –3. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được và chứng tỏ giao điểm của đồ thị hàm số vừa tìm được với đường thẳng $(d): y = x + 1$ nằm trên trục hoành.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d_1 đạt giá trị lớn nhất.

Liên hệ tài liệu word toán SĐT(zalo): 039.373.2038

CHUYÊN ĐỀ: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Hệ phương trình không chưa tham số

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất đối với x và y

Phương pháp giải:

- Bước 1: Đưa hệ phương trình đã cho về dạng $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.
- Bước 2: Dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số.
- Bước 3: Giải phương trình tìm x và y.
- Bước 4: Kết luận.

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+4)(y+4)=xy+216 \\ (x+2)(y-5)=xy-30 \end{cases}$.

Lời giải:

$$\begin{cases} (x+4)(y+4)=xy+216 \\ (x+2)(y-5)=xy-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+4x+4y+16=xy+216 \\ xy-5x+2y-10=xy-50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4y=200 \\ -5x+2y=-40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y=200 \\ -10x+4y=-80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x=280 \\ 4x+4y=200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ 4y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=30 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(20;30)$.

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+1)+3(x+y)=15 \\ 4(x-1)-(x+2y)=0 \end{cases}$.

Lời giải:

$$\begin{cases} 2(x+1)+3(x+y)=15 \\ 4(x-1)-(x+2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2+3y+3x=15 \\ 4a-4-x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y=13 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+6y=26 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19x=38 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 6-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;-1)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases}$.

Lời giải:

$$\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3+2x+4y=4 \\ 4x+4-x-2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=1 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=1 \\ 6x-4y=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x=11 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;-1)$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ.

Đặt $\begin{cases} x+1=a \\ x+2y=b \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 3a+2b=4 \\ 4a-b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=4 \\ 8a-2b=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=4 \\ 11a=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;-1)$.

Dạng 2: Hệ phương trình chưa phân thức

Phương pháp giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện xác định.
- Bước 2: Giải hệ đã cho bằng cách đặt ẩn phụ hoặc giải trực tiếp.
- Bước 3: Sử dụng phương pháp thế hặc cộng đại số.
- Bước 4: Thay giá trị vừa tìm được vào bước 2 tìm ẩn ban đầu.
- Bước 4: Kết luận.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=2 \\ \dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1 \end{cases}$.

Lời giải:

Cách 1:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\neq 0 \\ y+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ y\neq -2 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}=a \\ \dfrac{1}{y+2}=b \end{cases}$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2a+b=2 \\ 8a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+3b=6 \\ 8a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14a=7 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(3;-1)$.

Cách 2:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=2\\ \dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{3}{y+2}=6\\ \dfrac{8}{x-1}-\dfrac{3}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{14}{x-1}=7\\ \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}=1\\ 1+\dfrac{1}{y+2}=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\ \dfrac{1}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(3;-1)$.

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4\\ \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}$.

Lời giải:

Cách 1:

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\neq 0\\ y+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ y\neq -2\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}=a\\ \dfrac{1}{y+2}=b\end{cases}$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}3a+2b=4\\ 2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=4\\ 4a+2b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=14\\ 2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}=2\\ \dfrac{1}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x-2\\ y+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(2;-1)$.

Cách 2:

$$\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4\\ \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4\\ \dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{2}{y+2}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{7x}{x-1}=14\\ \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}=2\\ 2x+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x-2\\ \dfrac{1}{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(2;-1)$.

Dạng 3: Hệ chứa căn

Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ hoặc giải trực tiếp.
- Bước 3: Đối với đặt ẩn phụ, thay vào hệ phương trình tìm ẩn ban đầu.
- Bước 4: Kết luận.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\\2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$.

Cách 1: Đặt $\begin{cases}\sqrt{x}=a\\\sqrt{y}=b\end{cases}(a,b\ge 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}4a-3b=4\\2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b=4\\6a+3b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a=10\\2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1\\\sqrt{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;0)$.

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=10\\2\sqrt{x+2}-3\sqrt{y-1}=-6\end{cases}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x+2\ge 0\\y-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\y\ge 1\end{cases}$.

Cách 1: Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+2}=a\\\sqrt{y-1}=b\end{cases}(a,b\ge 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}2a+b=10\\2a-3b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4b=16\\2a+b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}=3\\\sqrt{y-1}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=9\\y-1=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=17\end{cases}$$ (thỏa mãn đk)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(7;17)$.

Cách 2:

$$\begin{cases}2\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=10\\2\sqrt{x+2}-3\sqrt{y-1}=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\sqrt{y-1}=16\\2\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y-1}=4\\2\sqrt{x+2}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-1=16\\\sqrt{x+2}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=17\\x+2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=17\end{cases}$$ (thỏa mãn đk)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(7;17)$.

Dạng 4: Hệ pương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ.
- Bước 3: Dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số tìm ẩn.
- Bước 4: Kết luận.

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2}{x+3}+\left|y-1\right|=1\\ \dfrac{1}{x+3}+2\left|y-7\right|=-7\end{cases}$.

Lời giải:

Điều kiện: $x+3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -3$.

Cách 1: Đặt $\begin{cases}\dfrac{1}{x+3}=a\\ \left|y-1\right|=b\end{cases}(b\geq 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}2a+b=1\\ a-2b=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=2\\ a-2b=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a=5\\ a-2b=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+3}=-1\\ \left|y-1\right|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=-1\\ \left[\begin{array}{l}y-1=3\\ y-1=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=-1\\ \left[\begin{array}{l}y=4\\ y=-2\end{array}\right.\end{cases}$$ (thỏa mãn đk)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\left\{(-4;4),(-4;-2)\right\}$.

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left|x-2\right|+4\sqrt{y-1}=5\\ 3\left|x-2\right|-2\sqrt{y-1}=1\end{cases}$.

Lời giải:

Điều kiện: $y-1\geq 0\Leftrightarrow y\geq 1$.

Cách 1: Đặt $\begin{cases}\left|x-2\right|=a\\ \sqrt{y-1}=b\end{cases}(a,b\geq 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}a+4b=5\\ 3a-2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+4b=5\\ 6a-4b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=7\\ a+4b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|x-2\right|=1\\ \sqrt{y-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-2=1\\ x-2=-1\end{array}\right.\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=1\end{array}\right.\\ y=2\end{cases}$$ (thỏa mãn đk)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\left\{(3;2),(1;2)\right\}$.

Cách 2:

$$\begin{cases}\left|x-2\right|+4\sqrt{y-1}=5\\ 3\left|x-2\right|-2\sqrt{y-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x-2\right|+4\sqrt{y-1}=5\\ 6\left|x-2\right|-4\sqrt{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x-2\right|+4\sqrt{y-1}=5\\ 7\left|x-2\right|=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+4\sqrt{y-1}=5\\ \left|x-2\right|=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{array}\right. \\ \sqrt{y-1}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \{(3;2),(1;2)\}$.

Dạng 5: Mối liên hệ giữa hệ phương trình và phương trình đường thẳng

Phương pháp giải:

- Bước 1: $(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} by=-ax+c \\ b'y=-a'x+c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-a}{b}x+\dfrac{c}{b} \quad (d) \\ y=\dfrac{-a'}{b'}x+\dfrac{c'}{b'} \quad (d') \end{cases}$
- Bước 2:

  Nếu d cắt d' thì $\dfrac{-a}{b} \neq \dfrac{-a'}{b'} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'} \Rightarrow$ Hệ (I) có một nghiệm duy nhất.

  Nếu d // d' thì $\begin{cases} \dfrac{-a}{b}=\dfrac{-a'}{b'} \\ \dfrac{c}{b} \neq \dfrac{c'}{b'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'} \\ \dfrac{c}{c'} \neq \dfrac{b}{b'} \end{cases} \Rightarrow$ Hệ (I) vô nghiệm.

  Nếu $d \equiv d'$ thì $\begin{cases} \dfrac{-a}{b}=\dfrac{-a'}{b'} \\ \dfrac{c}{b}=\dfrac{c'}{b'} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'} \Rightarrow$ Hệ (I) có vô số nghiệm.
- Bước 3: Kết luận.

Bài 1: Không giải hệ phương trình, kiểm tra xem hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiêm.

$a)\begin{cases} y=3-2x \\ y=3x-5 \end{cases}$ $b)\begin{cases} y=\dfrac{-1}{2}x+2022 \\ y=\dfrac{-1}{2}x+1 \end{cases}$

$c)\begin{cases} 2x-3y+6=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ $d)\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x-6y=10 \end{cases}$

Lời giải:

a) $\begin{cases} y=3-2x \\ y=3x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+3 \\ y=3x-5 \end{cases}$.

Do $-2 \neq 3$ nên hệ phương trình có một nghiệm $(x;y)$.

b) Ta có $\begin{cases} \dfrac{-1}{2}=\dfrac{-1}{2} \\ 2022 \neq 1 \end{cases}$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

c) Ta có $\frac{a}{a'}=2, \frac{b}{b'}=3 \Rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

d) Ta có $\frac{a}{a'}=\frac{1}{2}, \frac{b}{b'}=\frac{1}{2}, \frac{c}{c'}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \Rightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm.

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=5 \\ x+my=2022 \end{cases}$. Tìm m để:

d) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
b) Hệ phương trình vô nghiệm.

Lời giải:

a) Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $\frac{m}{1} \neq \frac{1}{m} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy với $m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình có nghiệm.

b) Để hệ phương trình vô nghiệm thì $\begin{cases} \frac{m}{1}=\frac{1}{m} \\ 5 \neq 2022 \end{cases} \Rightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Với $m=\pm 1$ thi hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x+y=7 \\ 2x+my=7 \end{cases}$. Tìm m để:

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
b) Hệ phương trình vô nghiệm.

Lời giải:

a) Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì

$$\frac{m+1}{2} \neq \frac{1}{m} \Leftrightarrow m^2+m \neq 2 \Leftrightarrow m^2+m-2 \neq 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy với $m \neq -2$ và $m \neq 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Để hệ phương trình vô nghiệm thì $\begin{cases} \frac{m+1}{2}=\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right. \\ m=1 \end{cases}$.

Vậy với m = 1 thì hệ phương trình vô nghiệm.

Dạng 5: Giải và biện luận số nghiệm của hệ phương trình

Phương pháp giải:

- Bước 1: Dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số đưa hệ đã cho về phương trình bậc nhất dạng Ax = B.
- Bước 2:

  Hệ có nghiệm duy nhất khi $A \neq 0$ và $B \neq 0$.

  Hệ vô nghiệm khi $A=0$ và $B \neq 0$.

  Hệ có vô số nghiệm khi A = 0 và B = 0.

- Bước 3: Kết luận.

Bài 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=8\\4x+my=2m+18\end{cases}$ với m là tham số. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases}2x+y=8\\4x+my=2m+18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8-2x\\4x+m(8-2x)=2m+18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8-2x\\4x+8m-2mx=2m+18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=8-2x\\x(4-2m)=8-16m\end{cases}\quad(*)$$

Nếu $4-2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$ thì (*) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{18-6m}{4-2m}=\dfrac{9-3m}{2-m}$

$$\Rightarrow y=8-2.\frac{9-3m}{2-m}=\frac{16-8m-18+6m}{2-m}=\frac{-2-2m}{2-m}$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{9-3m}{2-m};\dfrac{-2-2m}{2-m}\right)$.

Nếu $4-2m=0\Leftrightarrow m=2\Rightarrow 0x=6\ (vô\ lí)\Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Với $m\neq 2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{9-3m}{2-m};\dfrac{-2-2m}{2-m}\right)$.

Với m = 2 hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x-my=2m-2\\2x-y=m+5\end{cases}$ (m là tham số). Giải và biện luận hệ phương trình.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases}(m-1)x-my=2m-2\\2x-y=m+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)x-m(2x-m-5)=2m-2\\y=2x-m-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)x-2mx+m^2+5m=2m-2\\y=2x-m-5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(-m-1)=-m^2-3m-5\\y=2x-m-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(-m-1)=-m^2-3m-5\\y=2x-m-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(m+1)=(m+1)(m+2)\\y=2x-m-5\end{cases}\quad(*)$$

Nếu $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}-2x+y=-4\\2x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow 2x-y=4\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\in\mathbb{R}\\y=2a-4\end{cases}$$

Nếu $m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$. Từ (*) ta có $x=m+2\Rightarrow y=2(m+2)-m-5=m-1$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(m+2;m-1)$.

Kết luận: Với m = –1 thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(a;\,2a-4),\ a\in\mathbb{R}$.

Với $m\neq -1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(m+2;m-1)$.

Dạng 6: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải:

- Bước 1: Dunhf phương pháp cộng đại số hoặc thế để tìm điều kiện hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- Bước 2: Thay nghiệm duy nhất vào điều kiện đề bài tìm m.
- Bước 3: Kết luận.

Bài 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+2y=m+1 \\ 2x+my=2m-1 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất, tìm m để x + y = 3.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} mx+2y=m+1 \\ 2x+my=2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-mx+m+1}{2} \\ 2x+m.\dfrac{-mx+m+1}{2}=2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-mx+m+1}{2} \\ 4x-m^2x+m^2+m=4m-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-mx+m+1}{2} \\ 4x-m^2x+m^2+m=4m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-mx+m+1}{2} \\ x(2-m)(2+m)=-m^2+3m-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-mx+m+1}{2} \\ x(2-m)(2+m)=-(m-1)(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-mx+m+1}{2} \quad (2) \\ x(m-2)(m+2)=(m-1)(m-2) \quad (1) \end{cases}$

Nếu $(m-2)(m+2)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m-1}{m+2}$, thay vào (2) ta được:

$$y=\frac{\dfrac{-m^2+m}{m+2}+m+1}{2}=\frac{-m^2+m+m^2+3m+2}{2(m+2)}=\frac{4m+2}{2(m+2)}=\frac{m+1}{m+2}$$

Vậy với $m\neq \pm 2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{m-1}{m+2};\dfrac{m+1}{m+2}\right)$.

b) Theo phần a kết hợp giả thiết $x+y=3$ ta được:

$\dfrac{m-1}{m+2}+\dfrac{m+1}{m+2}=3 \Leftrightarrow 2m=3m+6 \Leftrightarrow m=-6$ (thỏa mãn đk)

Vậy với m = –6 thì hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x+y=3$.

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thoả mãn $x^2-2y^2=-2$.

Lời giải:

Ta có:

$\begin{cases}2x+y=5m-1\\x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(2+2y)+y=5m-1\\x=2+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=5m-5\\x=2+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=m-1\\x=2+2(m-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=m-1\\x=2m\end{cases}$

Vậy với mọi giá trị của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2m;m-1)$.

Theo bài ra:

$x^2-2y^2=-2\Leftrightarrow(2m)^2-2(m-1)^2=2\Leftrightarrow4m^2-2(m^2-2m+1)=-2\Leftrightarrow2m^2+4m=0$

$\Leftrightarrow2m(m+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.$

Vậy m = 0, m = –2 thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x^2-2y^2=-2$.

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+my=m+1\\mx+y=2m\end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi m = 2.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x\ge2,\ y\ge1$.

Lời giải:

a) Với m = 2 ta có:

$\begin{cases}x+2y=3\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=6\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y=2\\x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\x+\dfrac{4}{3}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\x=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

b) Ta có: $\begin{cases}x+my=m+1\\mx+y=2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2m-mx\\x+m(2m-mx)=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2m-mx\\x+2m^2-m^2x=m+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2m-mx\\x(1-m^2)=-2m^2+m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2m-mx\\x(m^2-1)=2m^2-m-1\end{cases}\quad(*)$

Nếu $m^2-1\ne0\Leftrightarrow m\ne\pm1$ thì (*) có nghiệm duy nhất

$x=\dfrac{2m^2-m-1}{m^2-1}=\dfrac{2(m-1)\left(m+\dfrac{1}{2}\right)}{(m-1)(m+1)}=\dfrac{2m+1}{m+1}\Rightarrow y=2m-\dfrac{m(2m+1)}{m+1}=\dfrac{2m^2+2m-2m^2-m}{m+1}=\dfrac{m}{m+1}$

Vậy với $m\ne\pm1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{2m+1}{m+1};\dfrac{m}{m+1}\right)$.

Theo bài ra: $\begin{cases}x\ge2\\y\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m+1}{m+1}\ge2\\\dfrac{m}{m+1}\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m+1}{m+1}-2\ge0\\\dfrac{m}{m+1}-1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-1}{m+1}\ge0\\\dfrac{-1}{m+1}\ge0\end{cases}\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1.$

Kết hợp điều kiện $m\ne\pm1$ ta có với m < –1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4: Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-y=3\\ mx+y=m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn x, y là các số nguyên.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}(m+1)x-y=3\\ mx+y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)x+mx=3+m\\ mx+y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(2m+1)=3+m\ \ (*)\\ mx+y=m\end{cases}$.

Nếu $2m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{-1}{2}$ thì (*) có nghiệm duy nhất $x=\frac{3+m}{2m+1}$.

$\Rightarrow y=m-\frac{m(3+m)}{2m+1}=\frac{2m^2+m-3m-m^2}{2m+1}=\frac{m^2-2m}{2m+1}$.

Nếu $m,x\in\mathbb{Z}$ thì $y=m-mx\in\mathbb{Z}$

Do đó ta cần chỉ ra $x\in\mathbb{Z}$.

Mặt khác $2x=\frac{6+2m}{2m+1}=1+\frac{5}{2m+1}$.

Ta có $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{2m+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2m+1\in U(5)=\{\pm1;\pm5\}$.

Bảng giá trị:

2m + 1	–5	–1	1	5
m	–3	–1	0	2

Bài 5: Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=3\\ 2x+my=9\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ sao cho biểu thức $A=3x-y$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}mx-y=3\\ 2x+my=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=mx-3\\ 2x+m^2x-3m=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=mx-3\\ x(2+m^2)=9+3m\ \ (*)\end{cases}$

Ta có $m^2+2>0\forall m\Rightarrow$ (*) luôn có nghiệm với mọi m

$\Rightarrow x=\frac{9+3m}{2+m^2}\Rightarrow y=\frac{9m+3m^2}{2+m^2}-3=\frac{9m-6}{2+m^2}$

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{9+3m}{2+m^2};\frac{9m-6}{2+m^2}\right)\forall m$.

Theo đề bài ta có $A=3x-y=3.\frac{9+3m}{2+m^2}-\frac{9m-6}{2+m^2}=\frac{27+9m}{2+m^2}-\frac{9m-6}{2+m^2}=\frac{33}{2+m^2}$.

Để A nhận giá trị nguyên thì $2+m^2\in U(33)=\{\pm1;\pm3;\pm11;\pm33\}$.

Do $2+m^2>2\Rightarrow 2+m^2\in\{3;11;33\}$.

Bảng giá trị:

$2+m^2$	3	11	33

m	±1	±3	

Vậy với $m = \pm 1$ hoặc $m = \pm 3$ thì $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên.

Bài 6: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = -3m - 4 \\ 2x + 3y = 8m - 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn:

a) biểu thức $P = y^2 + 3x - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) biểu thức $S = x^2 - y^2$ đạt giá trị lớ nhất.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} x - 2y = -3m - 4 \\ 2x + 3y = 8m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3m - 4 \\ 2(2y - 3m - 4) + 3y = 8m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3m - 4 \\ 4y - 6m - 8 + 3y = 8m - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3m - 4 \\ 7y = 14m + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(2m + 1) - 3m - 4 \\ y = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4m + 2 - 3m - 4 \\ y = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ y = 2m + 1 \end{cases}$$

Vậy với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm $(x;y) = (m - 2; 2m + 1)$.

a) Ta có:

$$P = y^2 + 3x - 1 = (2m + 1)^2 + 3(m - 2) - 1 = 4m^2 + 4m + 1 + 3m - 6 - 1 = 4m^2 + 7m - 6$$

$$= (2m)^2 + 2.\frac{7}{4}.2m + \frac{49}{16} - \frac{49}{16} - 6 = \left(2m + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{145}{16} \geq \frac{-145}{16} \ \forall m.$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{-145}{16}$ khi $2m + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-7}{8}$.

b) Ta có:

$$S = x^2 - y^2 = \left(m - 2\right)^2 - \left(2m + 1\right)^2 = m^2 - 4m + 4 - 4m^2 - 4m - 1 = -3m^2 - 8m + 3$$

$$= -3\left(m^2 + \frac{8}{3}m - 1\right) = -3\left(m^2 + 2.\frac{4}{3}m + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} - 1\right) = -3\left(m + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{25}{3} \leq \frac{25}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{25}{3}$ khi $m = \frac{-4}{3}$.

Dạng 7: Tìm hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số

Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$.
- Bước 2: Biểu diễn x, y theo tham số m.
- Bước 3: Cộng, trừ, nhân, chia với một số thích hợp triệt tiêu m.

Bài 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = -2m \\ mx - 4y = -m - 6 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$.

b) Tìm hệ thức liện hệ giữa x_0, y_0 không phụ thuộc vào m trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{cases} x - my = -2m \\ mx - 4y = -m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2m + my \\ mx - 4y = -m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2m + my \\ m(-2m + my) - 4y = -m - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2m + my \\ -2m^2 + m^2 y - 4y = -m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2m + my \\ y(m^2 - 4) = 2m^2 - m - 6 \quad (*) \end{cases}$$

(*) có nghiệm duy nhất khi $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Với $m \neq \pm 2$, $(*) \Leftrightarrow y = \dfrac{2m^2 - m - 6}{(m-2)(m+2)} = \dfrac{2(m-2)\left(m + \dfrac{3}{2}\right)}{(m-2)(m+2)} = \dfrac{2m+3}{m+2}$

$$\Rightarrow x = -2m + m.\left(\frac{2m+3}{m+2}\right) = \frac{-2m^2 - 4m + 2m^2 + 3m}{m+2} = \frac{-m}{m+2}$$

Vậy với $m \neq \pm 2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Với $m \neq \pm 2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0) = \left(\dfrac{-m}{m+2}; \dfrac{2m+3}{m+2}\right)$.

Ta có: $x_0 + 2y_0 = \dfrac{-m}{m+2} + \dfrac{4m+6}{m+2} = \dfrac{3m+6}{m+2} = 3 \ \ (m \neq -2)$.

Vậy $x_0 + 2y_0 = 3 \ \ (m \neq -2)$.

Chú ý: Tùy từng bài toán cụ thể ta cần nhân một số thích hợp vào x_0 hoặc y_0 sao cho có thể giản ước tử và mẫu đưa về biểu thức không chứa tham số.

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ 8x + my = m + 2 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x_0; y_0\right)$.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_0 và y_0 không phụ thuộc vào m.

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ 8x + my = m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2mx \\ 8x + m\left(2 - 2mx\right) = m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2mx \\ 8x + 2m - 2m^2 x = m + 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2mx \\ x\left(8 - 2m^2\right) = 2 - m \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi $8 - 2m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Với $m \neq \pm 2$ ta có $x = \dfrac{2-m}{2(2-m)(2+m)} = \dfrac{1}{4+2m} \Rightarrow y = 2 - 2m.\dfrac{1}{4+2m} = \dfrac{8+4m-2m}{4+2m} = \dfrac{4+m}{2+m}$

Vậy với $m \neq \pm 2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x_0; y_0\right) = \left(\dfrac{1}{4+2m}; \dfrac{4+m}{2+m}\right)$.

b) Theo phần a với $m \neq \pm 2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0) = \left(\frac{1}{4+2m};\frac{4+m}{2+m}\right)$

Ta có: $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{4+2m} \\ y_0 = \frac{4+m}{2+m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_0 = \frac{-2}{2+2m} \\ y_0 = \frac{4+m}{2+m} \end{cases} \Leftrightarrow y_0 - 4x_0 = \frac{4+m}{2+m} - \frac{-2}{2+2m} = 1$

Vậy $y_0 - 4x_0 = 1$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$a)\ \begin{cases} (x+4)(y+4) = xy + 216 \\ (x+2)(y-5) = xy - 50 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 2 \\ \frac{8}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 2\sqrt{x+2} + \sqrt{y-1} = 10 \\ 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt{y-1} = -6 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|1-2y|} = 3 \end{cases}$

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m \\ x - my = m + 6 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với m = 1.

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

c) Tìm m để $6x - 2y = 13$.

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3mx + y = 2m \\ -3x - my = -1 + 3m \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để hệ phương trình:

a) có nghiệm duy nhất.

b) vô nghiệm.

c) có vô số nghiệm.

Bài 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ x + 2my = 4 - 4m \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$ sao cho x_0 và y_0 cùng nguyên.

Bài 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để hệ phương trình co nghiệm $(x_0;y_0)$ thỏa mãn $x_0 > 2$ và $y_0 > 0$.

Bài 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với m = 1.

b) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0 - y_0 = 2$.

Bài 7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ 8x + my = m + 2 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; -6)$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

c) Với điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất, tìm m để biểu thức $P = y^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất.

bài 8: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ mx - y = m \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với m = 2.

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

c) Trong trường hojep hệ phương trình có nghiệm duy nhất, tìm m để biểu thức $P = y^2 - 2x$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 9: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx - 3y = 2m - 1 \\ 4x - (m + 5)y = 2 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m đẻ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$.

b) Khi m có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$, tìm hệ thức liện hệ giữa x_0 và y_0 không phụ thuộc vào m.

Bài 10: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + my = 2m + 18 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$, tìm nghiệm duy nhất đó.

b) Với $(x_0; y_0)$ là no duy nhất của hệ phương trình, tìm m để $x_0 - 3y_0 > 0$.

CHUYÊN ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI – ĐỊNH LÝ VI – ÉT

Dạng 1: Tìm m để phương trình bậc hai có hai nghiệm là số nguyên

Bài 1: Cho phương trình: $x^2+2(m-1)x-5=0$ (1) (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là các số nguyên.

Lời giải

Ta có: $a=1, b=2(m-1), c=-5$. Xét $\Delta = b^2-4ac = 4(m-1)^2+20 > 0, \forall m.$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Theo Vi – ét: $\begin{cases} x_1+x_2=-2(m-1) \\ x_1.x_2=-5 \end{cases}$. Vì x_1, x_2 là các số nguyên nên: $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-5 \end{cases}$ thay vào tổng $x_1+x_2=-2(m-1)$ ta được $-2(m-1)=-4 \Leftrightarrow m=3$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{cases}$ thay vào tổng $x_1+x_2=-2(m-1)$ ta được $-2(m-1)=4 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $m=3$ hoặc $m=-1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho phương trình: $x^2-7x+2m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 đều là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có: $a=1, b=-7, c=2m-1$. Xét $\Delta = b^2-4ac = 49-4(2m-1) = 53-8m$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 53-8m>0 \Leftrightarrow m < \frac{53}{8}$ (*)

Theo Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1.x_2=2m-1 \end{cases}$.

Vì x_1, x_2 là các số nguyên tố khác nhau và $x_1+x_2=7=2+5$ nên: $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=2 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=5 \end{cases}$ thay vào tích $x_1.x_2=2m-1$ ta được $2m-1=10 \Leftrightarrow m=\frac{11}{2}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=2 \end{cases}$ thay vào tích $x_1.x_2=2m-1$ ta được $2m-1=10 \Leftrightarrow m=\frac{11}{2}$.

thay vào tích $x_1.x_2=2m-1$ ta được $2m-1=10 \Leftrightarrow m=\frac{11}{2}$.

Kết hợp với điều kiên (*) ta được $m=\frac{11}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3. Cho phương trình $x^2-12x+m-3=0$ (1). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều là số chính phương.

Bài giải

Ta có: $a=1; b=-13; c=m-3$. Xét $\Delta=b^2-4ac=169-4(m-3)=169-4m+12=181-4m$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta>0 \Leftrightarrow 181-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{181}{4}$ (*).

Theo Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=13 \\ x_1.x_2=m-3 \end{cases}$.

Do x_1, x_2 là số chính phương và $x_1+x_2=13=4+9$ nên $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1=9 \\ x_2=4 \end{cases}$.

Thay giá trị x_1, x_2 trên vào tích $x_1.x_2=m-3$ ta được $m-3=36 \Leftrightarrow m=39$.

Kết hợp với (*) ta được $m=39$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. Cho phương trình $x^2-2mx+2m^2+3m-4=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trong đó có ít nhất một nghiệm nhận giá trị nguyên.

Lời giải

Ta có: $a=1; b=-2m; c=2m^2+3m-4$.

Xét $\Delta'=m^2-2m^2-3m+4=-m^2-3m+4$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì:

$\Delta'>0 \Leftrightarrow -m^2-3m+4>0 \Leftrightarrow -4<m<1$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trong đó có ít nhất một nghiệm nhận giá trị nguyên thì: $\Delta'=n^2$ với $n \in N \Leftrightarrow -m^2-3m+4=n^2 \Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ thì để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trong đó có ít nhất một nghiệm nhận giá trị nguyên.

Dạng 2: Tìm m để biểu thức có chứa hai nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình bậc hai đạt GTLN, GTNN.

Bài 1: Cho phương trình $x^2+mx+m-2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A=-x_1^2-x_2^2$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $a=1, b=m, c=m-2$.

Xét $\Delta=b^2-4ac=m^2-4(m-2)=m^2-4m+8=(m-2)^2+4>0, \forall m$.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall m$.

Theo Viét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1.x_2=m-2 \end{cases}$.

Theo đề bài $A=-x_1^2-x_2^2=-(x_1+x_2)^2+2x_1^2.x_2^2 \Rightarrow A=-m^2+2(m-2)=-m^2+2m-4=-(m-1)^2-3$

Vì $-(m-1)^2\le 0 \Rightarrow -(m-1)^2-3\le -3$ hay $A\le -3$.

Dấu "=" xảy ra khi $-(m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1$. Khi đó $Max\, A=-3$.

Vậy $m=1$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Biểu thức A phụ thuộc vào m là một đa thức bậc hai với m^2 có hệ số âm. Do đó để tìm GTLN của biểu thức A ta viết dưới dạng $A=(-km\pm t)^2+d$.

Bài 2: Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $B=2|x_2-x_1|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có $a=1, b=-(2m+1), c=m^2+1$.

Xét $\Delta=b^2-4ac=(2m+1)^2-4(m^2+1)=4m-3$. Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow 4m-3\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \frac{3}{4}$.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1.x_2=m^2+1 \end{cases}$ (1)

Theo đề bài ta có: $B=2|x_2-x_1| \Leftrightarrow B^2=4\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)=4(x_1+x_2)^2-16x_1x_2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $B^2=4(2m+1)^2-16(m^2+1)=16m-12$.

Vì $m\ge \frac{3}{4} \Rightarrow B^2\ge 0$. Do $B=2|x_2-x_1|$ là biểu thức không âm.

Vậy $MinB=0$ khi $m=\frac{3}{4}$.

Chú ý: Việc xét bình phương của biểu thức B sẽ làm mất giá trị tuyệt đối và đồng thời có thể biểu diễn B^2 theo tổng và tích của x_1, x_2, từ đó ta sử dụng được định lí Viet đưa B^2 về đa thức bậc nhất ẩn m, do đó để tìm GTNN ta dựa vào điều kiện để phương trình có nghiệm đánh giá.

Bài 3: Cho phương trình: $x^2+5x+m+2=0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $D=(x_1-x_2)^2+8x_1x_2$ đạt GTLN.

Lời giải

Ta có $a=1, b=5, c=m+2$. Xét $\Delta=b^2-4ac=5^2-4(m+2)=-4m+17$. Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow -4m+17\ge 0 \Leftrightarrow m\le \frac{17}{4}$.

Theo Viet Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1.x_2 = m + 2 \end{cases}$ (*)

Theo đề bài ta có $D = (x_1 - x_2)^2 + 8x_1.x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1.x_2$ (**)

Thay (*) vào (**) ta được $D = 25 + 4(m+2) = 4m + 33$.

Vì $m \le \frac{17}{4} \Rightarrow 4m + 33 \le 4.\frac{17}{4} + 33 = 50 \Rightarrow D \le 50$. Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{17}{4}$ và $MaxD = 50$.

Kết luận: Vậy $MaxD = 50$ khi $m = \frac{17}{4}$.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 3 = 0$ với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức $E = x_1.x_2 - x_1 - x_2$ đạt GTNN.

Lời Giải

Ta có: $a = 1, b = -2m, c = m^2 - m + 3$.

Xét $\Delta' = m^2 - (m^2 - m + 3) = m - 3$. Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m - 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 3$.

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - m + 3 \end{cases}$

Theo đề bài $E = x_1.x_2 - x_1 - x_2 = x_1.x_2 - (x_1 + x_2) = m^2 - m + 3 - 2m = m^2 - 3m + 3 = m(m-3) + 3$.

Với $m \ge 3 \Rightarrow m - 3 \ge 0 \Rightarrow m(m-3) \ge 0 \Rightarrow m(m-3) + 3 \ge 3 \Rightarrow E \ge 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$, khi đó $MinE = 3$.

Vậy $Min\,E = 3$ khi $m = 3$.

Chú ý: Các bạn thường mắc sai lầm sau:

$E = m^2 - 3m + 3 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4} \Rightarrow Min\,E = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. Không tồn tại giá trị m thoả mãn yêu cầu bài toán vì $m \ge 3$. Khi biểu thức phụ thuộc vào m là một đa thức bậc hai ta biến đổi rồi kết hợp điều kiện phương trình có nghiệm để tìm GTLN hoặc GTNN.

Bài 5: Cho phương trình $x^2 + (m-2)x - 8 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 4)$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $a = 1, b = m - 2, c = -8$.

Xét $\Delta = b^2 - 4ac = (m-2)^2 - 4.(-8) = (m-2)^2 + 32 > 0, \forall m$.

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-m+2\,(1) \\ x_1.x_2=-8\,(2) \end{cases}$. Từ $x_1.x_2=-8\Rightarrow x_2=\dfrac{-8}{x_1}$.

Theo đề bài $Q=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-4\right)=\left(x_1^2-1\right)\left(\dfrac{64}{x_1^2}-4\right)=-4x_1^2-\dfrac{64}{x_1^2}+68=-\left(4x_1^2-2.2\,x_1.\dfrac{8}{x_1}+\dfrac{64}{x_1^2}\right)+36$

$Q=36-\left(2x_1-\dfrac{8}{x_1}\right)^2\le 36$. Dấu "=" xảy ra khi $2x_1-\dfrac{8}{x_1}=0\Leftrightarrow x_1=\pm 2$.

Với $x_1=2\Rightarrow x_2=-4$. Thay $x_1=2,x_2=4$ vào biểu thức (1) ta được $m=4$.

Tương tự với $x_2=-2\Rightarrow m=0$.

Vậy GTLN là 36 khi $m=4$ hoặc $m=0$.

Một số bài toán Viet hay

Bài 1: Cho phương trình $x^2-2\left(m-1\right)x-2m=0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $x_1^2+x_1-x_2=5-2m$.

Lời giải

Ta có: $a=1,b=-2\left(m-1\right),c=-2m$.

Xét $\Delta'=\left(m-1\right)^2+2m=m^2+1>0,\forall m$. Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2\,(1) \\ x_1x_2=-2m\,(2) \end{cases}$.

Theo đề bài ra $x_1^2+x_1-x_2=5-2m$ (3). Thay (1) vào (3) ta được

$x_1^2+x_1-(2m+2-x_1)=5-2m\Leftrightarrow x_1^2+2x_1-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_1=-2 \end{array}\right.$.

Với $x_1=1$ Ta có $\begin{cases} 1+x_2=2m-2 \\ x_2=-2m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=2m-3 \\ x_2=-2m \end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$ (TM).

Tương tự với $x_1=-3\Rightarrow m=\dfrac{-3}{4}$(TM).

Kết luận: Vậy $m=\pm\dfrac{3}{4}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho phương trình $x^2-mx-1=0\,(1)$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Gọi x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tính giá trị của biểu thức

$P=\dfrac{x_1^2+x_1-1}{x_1}-\dfrac{x_2^2+x_2-1}{x_2}$.

Lời giải

Ta có $\Delta = m^2 + 4 > 0, \forall m$. Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có $x_1; x_1 \neq 0$ vì theo Viet $x_1.x_2 = -1$.

Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên $x_1^2 - m x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 1 = m x_1$.

Do x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên $x_2^2 - m x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - 1 = m x_2$.

Theo đề bài $P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2} = \frac{m x_1 + x_1}{x_1} - \frac{m x_2 + x_2}{x_2} = (m+1) - (m+1) = 0.$

Bài 3: Cho phương trình $8x^2 - 8x + m^2 + 1 = 0$ (1). Tìm m để phương trình có hai nghiệm thoả mãn điều kiện $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac = 8 - 8m^2 = 8(1 - m^2)$. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$. Vậy $-1 \le m \le 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \ (2) \\ x_1.x_2 = \frac{m^2 + 1}{8} \ (3) \end{cases}$.

Theo đề bài $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3 \Leftrightarrow x_1^4 - x_2^4 - x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1^3(x_1 - 1) - x_2^3(x_2 - 1) = 0 (4)$.

Thay (1) vào (4) ta được $-x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_2^2 - x_1^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 .(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 0$.

Mà $x_1.x_2 = \frac{m^2 + 1}{8} > 0, \forall m$ và $x_1 + x_2 = 1 > 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Với $x_1 = x_2$ kết hợp với (2) $\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ thay vào (3) ta được

$\frac{m^2 + 1}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$

Kết luận vậy $m = \pm 1$ thì phương trình có hai nghiệm thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập tự luyện

Bài toán 1: Đẳng thức liên hệ x_1, x_2 có dạng $x_1 = k x_2 + t$ (k, t là các hằng số và $k \neq \pm 1$)

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 = 3x_2$.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $\sqrt{x_1} = 3\sqrt{x_2}$.

Bài 3. Cho phương trình $4x^2+4(m+1)x-2m-3=0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu thoả mãn $x_1=4|x_2|$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2-mx-m-3=0$ Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu thoả mãn $2x_1-3x_2=5$.

Bài 5. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1-2x_2=-2m+4$.

Bài toán 2: Biến đổi đẳng thức (hệ thức) đối xứng theo tổng x_1+x_2 và tích $x_1.x_2$ rồi thay hệ thức Vi – ét vào đẳng thức (hệ thức).

Bài 1: Cho phương trình $x^2-mx+2m-3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1^2.x_2+x_1^2x_1=5$.

Bài 2. Cho phương trình $x^2+(m+1)x+4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1^2+x_2^2=2(x_1+x_2)+7$.

Bài 3. Cho phương trình $x^2-(2m+1)x-3=0$ (m là tham số). Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi m. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $|x_1|-|x_2|=5$ với $x_1<x_2$

Bài 4. Cho phương trình $x^2-2mx+m-1=0$ Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2$.

Bài 5. Cho phương trình $2x^2-6x+2m-5=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=6$.

Bài toán 3: Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn đẳng thức không đối xứng.

Bài 1. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $\frac{3}{x_1+1}=x_2+1$.

Bài 2. Cho phương trình $x^2+(m-1)x-m=0$ .Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $\frac{-2}{x_1-1}=x_2$.

Bài 3. Cho phương trình $x^2+2mx-2m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $\frac{6}{x_1}=x_1+\frac{1}{x_2}$.

Bài toán 4: Tìm m thoả mãn biểu thức đối xứng của x_1,x_2 đạt GTLN, GTNN.

Bài 1. Cho phương trình $x^2-2mx-4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. Cho phương trình $x^2-mx+m-2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A=|x_2-x_1|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho phương trình $x^2+5x+m+2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A=(x_1-x_2)^2+8x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4. Cho phương trình $x^2-mx-3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A=\dfrac{2(x_1+x_2)+5}{x_1^2+x_2^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

CHUYÊN ĐỀ:
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI – SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

I. Phương trình bậc hai $ax^2bx + c = 0\ (a \neq 0)\quad (1)$

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$ hoặc $\Delta' = b'^2 - ac\left(b' = \frac{b}{2}\right)$.

- Nếu $\Delta < 0$ hoặc $\Delta' < 0$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ hoặc $\Delta' = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ hoặc $\Delta' > 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ hoặc } x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{a},\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{a}$$

Dạng 1. Phương trình bậc hai

Bài 1: Giải phương trình:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + 4x - 8 = 0$

c) $-x^2 - 15x + 34 = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Lời giải:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$, a = 1, b = –5, c = 6.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.6 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3,\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2;3\}$.

b) $x^2 + 4x - 8 = 0$, a = 1, b’ = 2, c = –8.

Ta có $\Delta' = b'^2 - ac = 2^2 - 1.(-8) = 12 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2 + \sqrt{8},\ x_2 = -2 - \sqrt{8}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2 + \sqrt{8}; -2 - \sqrt{8}\}$.

c) $-x^2 - 15x + 34 = 0$, a = –1, b = –15, c = 34.

Ta có $\Delta = (-15)^2 - 4.(-1).34 = 361 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{15 + \sqrt{361}}{-2} = -17,\ x_2 = \frac{15 - \sqrt{361}}{-2} = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-17;2\}$.

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$, a = 1, b’ = –3, c = 9.

Ta có $\Delta = (-3)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.

Dạng 2. Phương trình trùng phương

Phương pháp giải:

- Đặt $x^2 = t\ (t \ge 0)$.
- Giải phương trình bậc 2 đối với ẩn t.
- Thay t vào bước 1 tìm x, kết luận.

Bài 1: Giải phương trình:

a) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$ b) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$ d) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Lời giải:

a) $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$

Đặt $x^2 = t\ (t \ge 0)$, ta được $t^2 - 4t - 45 = 0$ (*).

Ta có $\Delta' = (-2)^2 + 45 = 49 > 0$

$\Rightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1 = 2 + 7 = 9,\ t_2 = 2 - 7 = -5$ (loại).

Với $t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; -3\}$.

b) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

Đặt $x^2 = t\ (t \ge 0)$, ta được $t^2 - 7t - 10 = 0$ (*).

Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4.10 = 9 > 0$

$\Rightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1 = \dfrac{7-3}{2} = 5,\ t_2 = \dfrac{7-3}{2} = 2$ (thỏa mãn)

Với $t = 5 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Với $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{2}\}$.

c) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Đặt $x^2 = t\ (t \ge 0)$, ta được $t^2 - 6t + 8 = 0$ (*).

Ta có $\Delta = 3^2 - 8 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1 = 3 + 1 = 4,\ t_2 = 3 - 1 = 2$ (thỏa mãn)

Với $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Với $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm 2; \pm\sqrt{2}\}$.

Dạng 3: Kết hợp giữa hệ phương trình và phương trình bậc 2

Bài 1: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + 4y = 70 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x^2 + 6y = -5 \end{cases}$

Lời giải:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + (2x-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 4x^2 - 4x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x^2 - 4x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x(5x - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Với $x = \dfrac{4}{5} \Rightarrow y = 2.\dfrac{4}{5}.1 = \dfrac{-3}{5}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \left\{(0;-1), \left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + 4y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ (5 + y)^2 + 4y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ 25 + 10y + y^2 + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ y^2 + 14y + 45 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ (y + 5)(y + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ \left[\begin{array}{l} y = -5 \\ y = -9 \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $y = -5 \Rightarrow x = 0$.

Với $y = -9 \Rightarrow x = -4$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \left\{(0;-5), \left(-4;-9\right)\right\}$.

c) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x^2 + 6y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 2y \\ (5 + 2y)^2 + 6y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 6y \\ 25 + 20y + 4y^2 + 6y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 6y \\ 4y^2 + 26y + 30 = 0 \ (*) \end{cases}$

Giải (*): $(*) \Leftrightarrow 2y^2 + 13y + 15 = 0$.

$\Delta = 13^2 - 4.2.15 = 49 > 0 \Rightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $y_1 = \dfrac{-3}{2}, y_2 = -5$.

Với $y = \dfrac{-3}{2} \Rightarrow x = -4$.

Với $y = -5 \Rightarrow x = -25$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \left\{\left(-4;\dfrac{-3}{2}\right), \left(-25;-5\right)\right\}$.

Dạng 4: Các nghiệm thỏa mãn biểu thứ đối xứng

Phương pháp giải: Tìm m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức đối xứng với x_1, x_2.

- Bước 1: Tìm điều kiện đê phương trình có hai nghiệm (phân biệt) x_1, x_2

  Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \ (\Delta' \geq 0)$

  Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \ (\Delta' > 0)$
- Bước 2: Biến đổi biểu thức đối xứng về tổng và tích $x_1 + x_2, x_1.x_2$.

- Sử dụng định lí Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$ thay vào biểu thức biến đổi ở bước 2. Tìm m và đối chiếu với điều kiện ở bước 1.

Một số biến đổi tương đương thường gặp:

+) $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2$

+) $x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = \left(x_1 + x_2\right)\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1x_2\right]$

Hoặc $x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)^3 - 3x_1x_2\left(x_1 + x_2\right)$.

+) $\left|x_1 - x_2\right|$ xét $\left|x_1 - x_2\right|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2$

+) $\left|x_1\right| + \left|x_2\right|$ xét $\left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right|\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2.\left|x_1\right|.\left|x_2\right| = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2\left|x_1x_2\right|$

Chú ý: $\left|a^2\right| = a^2$, $\left|a \pm b\right|^2 = \left(a \pm b\right)^2$

Bài 1: Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 0$.

Lời giải:

Xét $\Delta' = b'^2 - ac = \left(m-1\right)^2 - \left(m^2 - 3m + 2\right) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 3m - 2 = m - 1$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ (*).

Theo đề bài ta có: $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 5x_1x_2 = 0$ (1)

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1x_2 = m^2 - 3m + 2 \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được:

$\left(2m-2\right)^2 - 5\left(m^2 - 3m + 2\right) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 5m^2 + 15m - 10 = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 7m + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left(m-1\right)\left(m-6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1\ (loai) \\ m = 6 \end{array}\right.$

Kết hợp với (*) ta có m = 6 là giá trị cần tìm.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m đẻ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^4 - x_2^3 = x_2^4 - x_1^3$.

Lời giải:

Xét $\Delta' = (-1)^2 - (m-1) = 1 - m + 1 = -m + 2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $-m + 2 \ge 0 \Leftrightarrow m \le 2$ (*).

Theo đề bài:

$x_1^4 - x_2^3 = x_2^4 - x_1^3 \Leftrightarrow x_1^4 - x_2^4 + x_1^3 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow \left(x_1^2 - x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \left(x_1 - x_2\right)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+\left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\left\{\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]\right\}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1-x_2=0 \ (1) \\ \left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]=0 \ (2) \end{array}\right.$

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

TH1: Với $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow x_1=x_2=1\Rightarrow 1=m-1\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn)

TH2: Với $\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]=0$

$\Rightarrow 2\left[2^2-2(m-1)\right]+2^2-(m+1)=0\Leftrightarrow 2\left(4-2m+2\right)+4-m+1=0\Leftrightarrow -5m+17=0$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{17}{5}$ (không thỏa mãn)

Kết hợp với (*) ta có m = 2 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 3: Cho phương trình $x^2-2\left(m-3\right)x-2\left(m-1\right)=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho $A=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Xét $\Delta'=b'^2-ac=\left(m-3\right)^2+2\left(m-1\right)=m^2-6m+9+2m-2=m^2-4m+7=\left(m-2\right)^2>0\forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo đề bài: $A=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m-6 \\ x_1x_2=-2m+1 \end{cases}$ thay vào A ta được:

$A=\left(2m-6\right)^2-2\left(-2m+2\right)=4m^2-20m+32=\left(2m+5\right)^2+7\ge 7$.

$\Rightarrow \min A=7$ khi $2m+5=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-5}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{-5}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4: Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+4m-m^2=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho $A=\left|x_1-x_2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Xét $\Delta'=(m+1)^2-(4m-m^2)=m^2+2m+1-4m+m^2=m^2-2m+1=\left(m-1\right)^2\ge 0\forall m$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne 1$ (*)

Theo đề bài $A=\left|x_1-x_2\right|\Rightarrow A^2=\left(x_1-x_2\right)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2$ (1)

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 4m - m^2 \end{cases}$ thay vào (1) ta được:

$A^2 = (2m+2)^2 - 4\left(4m - m^2\right) = 4m^2 + 8m + 4 - 16m + 4m^2 = 8m^2 - 8m + 4 = 2\left(4m^2 - 4m + 2\right)$

$= 2\left[\left(2m\right)^2 - 2.2m.1 + 1^2 + 1\right] = 2\left(2m - 1\right)^2 + 2 \geq 2$

$\Rightarrow A \geq \sqrt{2}$. Dấu = xảy ra khi $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{2}$.

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - (2m+5)x + 2m + 1 = 0\ (1)$, m là tham số.

a) Giải phương trình với $m = \frac{-1}{2}$.

b) Tìm các giá trị của m để (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|$ đạt giá nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Khi $m = \frac{-1}{2}$ ta có $x^2 - \left(2.\frac{-1}{2} + 5\right)x + 2.\frac{-1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vậy $m = \frac{-1}{2}$ thì tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{0; 4\right\}$.

b) Ta có $a = 1,\ b = -\left(2m+5\right),\ c = 2m + 1$.

Xét $\Delta = \left(2m+5\right)^2 - 4\left(2m+1\right) = 4m^2 + 20m + 25 - 8m - 4 = 4m^2 + 12m + 21$

$= \left(2m\right)^2 + 2.2m.3 + 9 + 11 = \left(2m+3\right)^2 + 11 > 0\ \forall m$

Để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt thì $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$.

Theo Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 5 \\ x_1 x_2 = 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 5 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-5}{2} \\ m > \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{-1}{2}$.

Vậy với $m > \frac{-1}{2}$ (**) thì phương trình luôn có hai nghiệm dương phân biệt.

Theo đề bài: $P = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \Rightarrow P^2 = x_1 - 2.\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2} + x_2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}$

$\Rightarrow P^2 = 2m + 5 - 2\sqrt{2m+1} = (2m+1) - 2\sqrt{2m+1}.1 + 1^2 + 3 = \left(\sqrt{2m+1} - 1\right)^2 + 3 \geq 3$

Dấu = xảy ra khi $\sqrt{2m+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn (**)).

Vậy với m = 0 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có:

- Hai nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases}\Delta > 0\\ x_1 + x_2 > 0\\ x_1x_2 > 0\end{cases}$.
- Hai nghiệm âm phân biệt khi $\begin{cases}\Delta > 0\\ x_1 + x_2 < 0\\ x_1x_2 > 0\end{cases}$.
- Hai nghiệm trái dấu khi $x_1x_2 < 0$.

Bài 6: Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0\ (1)$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$.

Lời giải:

Xét $\Delta = m^2 - 4.(-3) = m^2 + 12 > 0 \Rightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1 + x_2 = -m\\ x_1x_2 = -3\end{cases}$.

Theo đề bài:

$|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow \left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = 16 \Leftrightarrow x_1^2 + 2|x_1|.|x_1| + x_2^2 = 16 \Leftrightarrow m^2 - 2.(-3) + 2.|-3| = 16$

$\Leftrightarrow m^2 + 12 = 16 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m \neq \pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 5: Kết hợp định lí Vi-ét để giải các nghiệm

Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) $x_1,\ x_2$.
- Bước 2: Sử dụng định lí Vi-ét $\begin{cases}x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}\\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}\end{cases}$.
- Bước 3: Giải hệ $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ vào biểu thức đã cho tìm $x_1,\ x_2$ theo m.
- Bước 4: Thay $x_1,\ x_2$ và tìm được $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ tìm m.

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 10mx + 9m = 0\ (1)$ với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) với $m = 1$.

b) Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1 - 9x_2 = 0$.

Lời giải:

a) Với m = 1 ta có:

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 9x + 9 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 9(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 9\end{array}\right.$

Vậy với m = 1 thì tập nghiệm của phương trình là $S = \{1;9\}$.

b) Xét $\Delta' = (5m)^2 - 9m = 25m^2 - 9m$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 25m^2 - 9m > 0$ (*)

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \\ x_1 x_2 = 9m \end{cases}$.

Kết hợp với đề bài ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \\ x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \\ 10x_2 = 10m \\ x_1 x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m \\ m.9m = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = m \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \end{cases}$

Kết hợp với (*) suy ra m = 1 (thỏa mãn).

Vậy m = 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ (1), m là tham số.

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left(x_1 - x_2\right)^2 = x_1 - 3x_2$.

Lời giải:

a) Ta có $\Delta = \left(2m-1\right)^2 - 4\left(m^2 - 1\right) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4 = -4m + 5$.

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{5}{4}$ (*)

b) Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \ (2) \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \ (3) \end{cases}$.

Theo đề bài:

$$\left(x_1 + x_2\right)^2 = x_1 - 3x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1 - 3x_2 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = x_1 - 3x_2$$

$$\Leftrightarrow \left(2m-1\right)^2 - 4\left(m^2 - 1\right) = x_1 - 3x_2 \Leftrightarrow x_1 - 3x_2 = -4m + 5 \ (4)$$

Từ (2) và (4) ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 - 3x_2 = -4m + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = 6m - 6 \\ x_1 + x_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{3m-3}{2} \\ x_1 + \dfrac{3m-3}{2} = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{m+1}{2} \\ x_2 = \dfrac{3m-3}{2} \end{cases}$$

Thay x_1, x_2 vào (3) ta được: $\dfrac{m+1}{2}.\dfrac{3m-3}{2} = m^2 - 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 3 = 4m^2 - 4 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Kết hợp với (*) được $m \neq \pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1\right| + 2\left|x_2\right| = 3$.

Lời giải:

Ta có $\Delta = (-3)^2 - 4\left(-m^2+1\right) = 9 + 4m^2 - 4 = 4m^2 + 5 > 0 \ \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -m^2 + 1 \ (*) \end{cases}$.

TH1: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ thì $\left|x_1\right| + 2\left|x_2\right| = 3 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 3$.

Kết hợp $x_1 + x_2 = 3$ ta được $x_1 = 0,\ x_2 = 3$, thay vào (*) ta được $0 = -m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

TH2: $x_1 \le 0,\ x_2 \le 0$ thì $\left|x_1\right| + 2\left|x_2\right| = 3 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 = 3$.

Kết hợp $x_1 + x_2 = 3$ ta được $x_1 = -6,\ x_2 = 9$ (không thỏa mãn).

TH3: $x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0$ thì $\left|x_1\right| + 2\left|x_2\right| = 3 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 3$.

Kết hợp $x_1 + x_2 = 3$ ta được $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ (không thỏa mãn).

TH4: $x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0$ thì $\left|x_1\right| + 2\left|x_2\right| = 3 \Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 = 3$.

Kết hợp $x_1 + x_2 = 3$ ta được $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ (không thỏa mãn).

Vậy $m \ne \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Dạng 6: Tính x_1^2 theo x_1 và x_2^2 theo x_2 dựa vào phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

Phương pháp giải:

- Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt) $x_1,\ x_2$.
- Bước 2: Do $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ nên

$$\begin{cases} ax_1 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2 + bx_2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1^2 = -bx_1 - c \\ ax_2^2 = -bx_2 - c \end{cases}$$

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - \left(2m+1\right)x + m^2 - 1 = 0 \ (1)$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left(x_1^2 - 2mx_1 + m^2\right)\left(x_2 + 1\right) = 1$.

Lời giải:

Ta có $\Delta = \left(2m+1\right)^2 - 4\left(m^2 - 1\right) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 + 4 = 4m + 5$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm thì $4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{-5}{4} \ (*)$.

Với $m > \dfrac{-5}{4}$ thì (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$, theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$.

Do x_1 là nghiệm của (1) nên:

$x_1^2 - \left(2m+1\right)x_1 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 - x_1 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = x_1 + 1$

Thay vào đề bài ta có:

$\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=1 \Leftrightarrow x_1x_2+x_1+x_2+1=1 \Leftrightarrow m^2-1+2m+1=0$

$\Leftrightarrow m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2\ (loai) \end{array}\right.$

Bài 2: Cho phương trình $x^2-\left(m+1\right)x+m-4=0\ (1)$ (m là tham số). Tìm giá trị m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left(x_1^2-mx_1+m\right)\left(x_2^2-mx_2+m\right)=2$.

Lời giải:

Ta có $\Delta=\left(m+1\right)^2-4\left(m-4\right)=m^2+2m+1-4m+16=m^2-2m+17=\left(m-1\right)^2+16>0\ \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$.

Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên:

$x_1^2-\left(m+1\right)x_1+m-4=0 \Leftrightarrow x_1^2-mx_1+x_1+m-4=0 \Leftrightarrow x_1^2-mx_1+x_1+m=4-x_1$

Tương tự ta có: $x_2^2-mx_2+x_2+m=4-x_2$.

Theo Vi-ét ta có: $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=m+1\ \ (2) \\ x_1x_2=m-4\ \ (3) \end{array}\right.$.

Theo đề bài:

$\left(x_1^2-mx_1+m\right)\left(x_2^2-mx_2+m\right)=2 \Leftrightarrow \left(4-x_1\right)\left(4-x_2\right)=2 \Leftrightarrow 16-4x_2-4x_1+x_1x_2=2$

$\Leftrightarrow 16-4\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2=2 \Leftrightarrow x_1x_2-4\left(x_1+x_2\right)+14=0$

Kết hợp với (2) và (3) ta có:

$m-4-4\left(m+1\right)+14=0 \Leftrightarrow m-4-4m-4+14=0 \Leftrightarrow -3m+6=0 \Leftrightarrow m=2$

Vậy m = 2 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 3: Cho phương trình $x^2-2x+m-1=0\ \ (1)$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\dfrac{x_1}{x_2^2+2x_1+1}+\dfrac{x_2}{x_1^2+2x_2+1}=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải:

Ta có $\Delta'=1^2-m+1=-m+2$.

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow -m+2>0 \Leftrightarrow m<2\ (*)$.

Với m < 2 ta có $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình (1) nên:

$\left\{\begin{array}{l} x_1^2-2x_1+m-1=0 \\ x_2^2-2x_2+m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^2=2x_1+1-m \\ x_2^2=2x_2+1-m \end{array}\right.$

Thay vào để bài ta được:

$\dfrac{x_1}{2x_2+1-m+2x_1+1}+\dfrac{x_2}{2x_1+1-m+2x_2+1}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{2\left(x_1+x_2\right)+2-m}+\dfrac{x_2}{2\left(x_1+x_2\right)+2-m}=\dfrac{1}{4}$

Theo Vi-ét $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=m-1 \end{array}\right.$ nên ta có:

$\frac{x_1}{2.2+2-m}+\frac{x_2}{2.2+2-m}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{x_1}{6-m}+\frac{x_2}{6-m}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{6-m}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{m-1}{6-m}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4m-4=6-6m\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn (*))

Vậy m = 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4: Cho phương trình $x^2-mx-8=0\ (1)$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ và giá trị biểu thức $H=\frac{2x_1^2+5x_1-16}{3x_1}-\frac{2x_2^2+5x_2-16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m.

Lời giải:

Ta có $\Delta=m^2+8>0\ \forall m\Rightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ nên:

$$\begin{cases}x_1^2-mx_1-8=0\\x_2^2-mx_2-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2=mx_1+8\\x_2^2=mx_2+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1^2=2mx_1+16\\2x_2^2=2mx_2+16\end{cases}$$

Thay vào giả thiết ta có:

$$H=\frac{2x_1^2+5x_1-16}{3x_1}-\frac{2x_2^2+5x_2-16}{3x_2}=\frac{6mx_1x_2+15x_1x_2-6mx_1x_2-15x_1x_2}{9x_1x_2}=0$$

Vậy H không phụ thuộc vào m.

Dạng 7: Giải các nghiệm dựa vào $\Delta,\ \Delta'$ là bình phương

Phương pháp giải: Khi tính $\Delta,\ \Delta'$ mà ra bình phương của một biểu thức thì ta giải tìm ra $x_1,\ x_2$

Chú ý xét hai trường hợp:

- $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Bài 1: Cho phương trình $x^2-2\left(m+1\right)x+4m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1=-3x_2\ (*)$.

Lời giải:

Ta có: $\Delta'=\left(m+1\right)^2-4m=m^2+2m+1-4m=m^2-2m+1=\left(m-1\right)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'>0\Leftrightarrow\left(m-1\right)^2>0\Leftrightarrow m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1$.

Do $\Delta'>0$ nên phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\left(m+1\right)+m-1\\x=\left(m+1\right)-\left(m-1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2m\\x=2\end{array}\right.$.

TH1: $x_1=2m,\ x_2=2$ thay vào (*) ta được $2m=-3.2\Leftrightarrow m=-2$ (thỏa mãn).

TH2: $x_1=2,\ x_2=2m$ thay vào (*) ta được $2=-3.2m\Leftrightarrow m=\frac{-1}{3}$ (thỏa mãn).

Vậy $m=2;\ m=\frac{-1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho phương trình $x^2-\left(2m+5\right)x-2m-6=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=7\ (1)$.

Lời giải:

Ta có $\Delta=\left(2m+5\right)^2-4\left(-2m-6\right)=4m^2+20m+25+8m+24=4m^2+28m+49=\left(2m+7\right)^2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow 2m+7\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{-7}{2}$ (*)

Khi đó phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2m+5+2m+7}{2}=2m+6\\x=\frac{2m+5-2m-7}{2}=-1\end{array}\right.$.

TH1: $x_1=2m+6,\ x_2=-1$ thay vào (1) ta được:

$\left|2m+6\right|+\left|-1\right|=7\Leftrightarrow\left|2m+6\right|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+6=6\\2m+6=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-6\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

TH2: $x_1=-1,\ x_2=2m+6$ thay vào (1) ta được:

$\left|-1\right|+\left|2m+6\right|=7\Leftrightarrow\left|2m+6\right|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+6=6\\2m+6=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-6\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m=0;\ m=-6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Do $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=7$ là phương trình đối xứng với $x_1,\ x_2$ nên giả sử $x_1=-1,\ x_2=2m+6$ không ảnh hưởng đến kết quả bài toán.

Xét $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=x_1^2+x_2^2+2.\left|x_1\right|.\left|x_2\right|=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+2\left|x_1x_2\right|$.

Sử dụng định lí Vi-ét tìm ra m.

II. Hệ quả của định lí Vi-ét

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (1)\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$.

Định lí Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-b}{a}\\x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$.

Hệ quả 1: Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x_1=1,\ x_2=\frac{c}{a}$.

Ngược lại nếu phương trình (1) có 1 nghiệm x = 1 thì $a+b+c=0$.

Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x_1=-1,\ x_2=\frac{-c}{a}$.

Ngược lại nếu phương trình (1) có 1 nghiệm x = –1 thì $a-b+c=0$.

Hệ quả 2: Nếu $\begin{cases}x_1>0\\x_2>0\end{cases}$ thì $\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases}$.

Hệ quả 3: Nếu $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$.

Hệ quả 4: Nếu phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu thì $x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} < 0$.

Dạng 1: Dạng toán có thêm điều kiện phụ

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0\ (1)$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$.

Lời giải:

Ta có $\Delta' = m^2 - m + 1 = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > \forall m \Rightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$.

Để tồn tại $\sqrt{x_1},\ \sqrt{x_2}$ thì $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \ge 0 \\ m - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1\ (*)$.

Theo giả thiết:

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_1 + 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 = 4 \Leftrightarrow 2m + 2\sqrt{m-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} = 2 - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \ge 0 \\ m - 1 = (2 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ m - 1 = 4 - 4m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ m^2 - 5m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

Kết hợp với (*) ta được $m = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: $\sqrt{f(m)} = g(m) \Leftrightarrow \begin{cases} g(m) \ge 0 \\ f(m) = g^2(m) \end{cases}$. Sau khi tìm được m cần đối chiếu điệu kiện.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - (2m + 5)x + 2m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho $M = \left|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có:

$\Delta = (2m + 5)^2 - 4(2m + 1) = 4m^2 + 12m + 21 = (2m)^2 + 2.2m.3 + 9 + 12 = (2m + 3)^2 + 12 > 0\ \forall m$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2\ \forall m$.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 5 \\ x_1 x_2 = 2m + 1 \end{cases}$.

Để tồn tại $\sqrt{x_1},\ \sqrt{x_2}$ thì $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 5 \ge 0 \\ 2m + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \dfrac{-1}{2}\ (*)$.

Theo đề bài: $M = \left|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right|$

$\Leftrightarrow M^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 2m + 5 - 2\sqrt{2m+1} = 2m + 1 - 2\sqrt{2m+1} + 1 + 3 = \left(\sqrt{2m+1} - 1\right)^2 + 3 \geq 3$

$\Rightarrow M \geq \sqrt{3}$.

Dấu = xảy ra khi $\sqrt{2m+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).

Kết hợp với (*) ta có m = 0 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5.

Lời giải:

Ta có: $\Delta = \left(m+5\right)^2 - 4\left(3m+6\right) = m^2 + 10m + 25 - 12m - 24 = m^2 - 2m + 1 = \left(m-1\right)^2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (*).

Do x_1, x_2 là hai cạnh của một tam giác vuông nên $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = 3m + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 5 > 0 \\ 3m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$ (**)

Theo đề bài ta có:

$x_1^2 + x_2^2 = 25 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 25 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2 = 25 \Leftrightarrow \left(m+5\right)^2 - 2\left(3m+6\right) = 25$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \left(m-2\right)\left(m+6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -6 \ (loai) \end{array}\right.$

Kết hợp với (*) và (**) ta được m = 2 thoả mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2: So sánh các nghiệm với số 0, số α bất kì

Phương pháp giải:

- $x_1 < 0 \leq x_2$

  TH 1: Xét $x_2 = 0$.

  TH 2: Xét $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2.

  Tương tự với $x_1 \leq 0 < x_2$.

- $\begin{cases} x_1 < \alpha \\ x_2 < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha < 0 \\ x_2 - \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1 - \alpha\right) + \left(x_2 - \alpha\right) < 0 \\ \left(x_1 - \alpha\right).\left(x_2 - \alpha\right) > 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} x_1 > \alpha \\ x_2 > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1 - \alpha\right) + \left(x_2 - \alpha\right) > 0 \\ \left(x_1 - \alpha\right).\left(x_2 - \alpha\right) > 0 \end{cases}$

- $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \left(x_1 - \alpha\right).\left(x_2 - \alpha\right) < 0$

Bài 1: Cho phương trình $x^2 + \left(m+2\right)x - m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 \leq x_2$.

Lời giải:

Ta có $\Delta = \left(m+2\right)^2 + m + 4 = m^2 + 5m + 8 = m^2 + 2.m.\frac{5}{2} + \frac{25}{4} + \frac{7}{4} = \left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 2 \\ x_1 x_2 = -m - 4 \end{cases}$.

TH 1: $x_2 = 0 \Rightarrow -m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \Rightarrow x_1 = 2$ (không thỏa mãn)

TH 2: $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm trái dấu

Suy ra $1\left(-m-4\right) < 0 \Leftrightarrow m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -4$.

Vậy m > –4 thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 2,\ x_2 < 2$.

Lời giải:

Ta có $\Delta' = m^2 - 4m + 4 = \left(m-2\right)^2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ $(*)$

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = 4m - 4 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1 - 2\right) + \left(x_2 - 2\right) < 0 \\ \left(x_1 - 2\right)\left(x_2 - 2\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right) + 4 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 4 < 0 \\ 4m - 4 - 2(-2m) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ 4m - 4 + 4m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

Kết hợp với (*) ta được $m > 0,\ m \neq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Do $\left(2-m\right)^2$ là số chính phương nên hai nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x = -m + 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = -4,\ x_2 = -2m$.

Theo bài ra ta có $\left[\begin{array}{l} -4 < 2 \\ -m + 2 < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy ta được $m > 0,\ m \neq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3:Tìm nghiệm của phương trình bậc hai dựa vào hệ thức Vi-ét

Phương pháp giải:

- Bước 1: Biến đổi biểu thức có chứa $x_1 + x_2,\ x_1 x_2$.

- Bước 2: Sử dụng định lí Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.
- Bước 3: Thay vào biểu thức và kết luận.

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1}$.

Lời giải:

Vì x_1, x_2 lài hai nghiệm của phương trình nên theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$.

Theo đề bài:

$$T = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{\left(x_1 + x_2\right)\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right]}{x_1 x_2} = \frac{4.\left[4^2 - 3.\left(-3\right)\right]}{3} = \frac{-100}{3}$$

Vậy $T = \dfrac{-100}{3}$.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.

Lời giải:

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình nên theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases}$.

Ta có: $T^2 = \dfrac{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2} = \dfrac{\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2\right]^2}{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \dfrac{\left(12^2 - 2.4\right)^2}{12 + 2\sqrt{4}} = 1156 \Rightarrow T = \pm 34$.

Do $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow T > 0$. Vậy T = 34.

III. Sự tương giao của đường thẳng và parabol

Dạng 1: Tìm tham số m để đường thẳng tiếp xúc với parabol, tìm tọa độ tiếp điểm

Phương pháp giải: Cho $(d): y = mx + n$ và $(P): y = ax^2 \ (a \neq 0)$.

- Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 \ (*)$$

- Bước 2: Lập luận: d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ hoặc $\Delta' = 0$. Giải phương trình tìm tham số m.
- Bước 3: Thay m vừa tìm được vào d và (P) tìm tọa độ giao điểm.
- Bước 4: Kết luận.

Bài 1: Cho đường thẳng $(d): y = 2mx + 2m - 3$ và parabol $(P): y = x^2$. Tìm m để d tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2mx + 2m - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0\ (*)$

Để d tiếp xúc với (P) thì (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$$

Với m = 1 ta có $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Với m = 3 ta có $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow y = 9$.

Vậy với m = 1 hoặc m = 3 thì d tiếp xúc với (P) tại điểm $A(1;-1)$ hoặc $B(-3;9)$.

Bài 2: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m+3)x + m^2 - 5$. Tìm m để d tiếp xúc với (P), tìm tọa độ tiếp điểm.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = 2(m+3)x - m^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0\ (*)$$

Ta có $\Delta' = (m+3)^2 - (m^2+3) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6$.

Để d tiếp xúc với (P) thì $6m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Với m = –1 suy ra $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$.

Vậy với m = –1 thì d tiếp xúc với (P) tại điểm $A(2;4)$.

Bài 3: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d và (P), trong đó A có hoành độ âm. Vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ điểm $C \in \overset{\frown}{AB}$ của (P) sao cho S_{ABC} lớn nhất.

Lời giải:

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 9 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy $A(-1;1)$, $B(3;9)$.

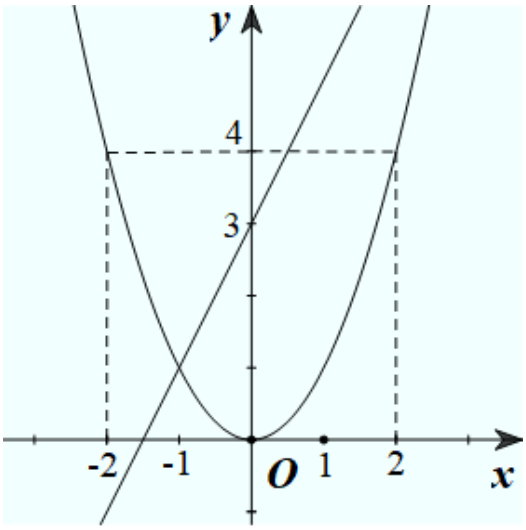
Vẽ $(d): y = 2x + 3$.

x	0	$\frac{-3}{2}$
y	3	0

Vẽ $(P): y = x^2$.

x	–2	–1	0	1	2

y	4	1	0	1	4



b) Ta có $A\left(-1;1\right)$ và $B\left(3;9\right)$ nên đường thẳng AB. Do đó S_{ABC} đạt GTLN khi khoảng cách từ C đến AB lớn nhất. Khi đó C là giao điểm của d' với (P) với $d' \parallel d$.

Giả sử $(d'): y = ax + b$. Do $d' \parallel d$ nên a = 2 và $b \neq 3 \Rightarrow (d'): y = 2x + b,\ b \neq 3$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm d và d': $2x + b = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0\ (*)$.

Ta có $\Delta' = 1 + b$. Để d' tiếp xúc với (P) thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Thay b = –1 vào (*) ta được:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

Vậy $C\left(1;1\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2: Tìm tham số m để đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn một biểu thức đối xứng

Phương pháp giải: Giả sử $(d): y = mx + n$ và parabol $(P): y = ax^2\ (a \neq 0)$.

- Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0\ (*)$.
- Bước 2: Tìm điều kiện để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Bước 3: Biến đổi biểu thức đối xứng với x_A, x_B về $x_A + x_B$ và $x_A x_B$ rồi sử dụng Vi-ét.

Một số điều kiện và phép biến đổi:

- Hai điểm A và B nằm bên trái trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A < 0 \\ x_B < 0 \end{cases}$.
- Hai điểm A và B nằm bên phải trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A > 0 \\ x_B > 0 \end{cases}$.
- Hai điểm A và B nằm cùng một phía với trục Oy $\Leftrightarrow x_A x_B < 0$.
- Hai điểm A và B nằm về hai phái trục Oy $\Leftrightarrow x_A x_B > 0$.
- Một số phép biến đổi biểu thức đối xứng đã được trình bày trong II.

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 2$ Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 2 = 0\ (*)$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1\ (1)$.

Với m > 1 giả sử (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m + 2 \end{cases}$.

Theo giải thiết:

$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow 2^2 - 4(-m + 2) = 4 \Leftrightarrow m = 2$

(thỏa mãn (1))

Vậy m = 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P).

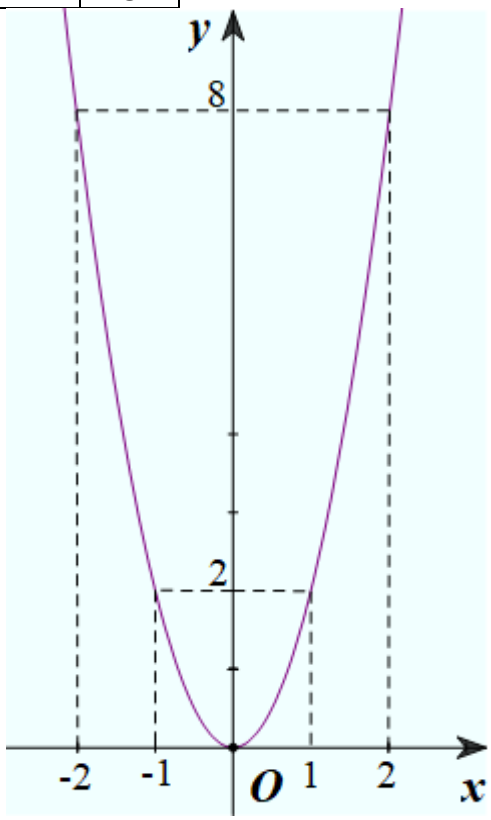
a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = 2mx + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = 2021$.

Lời giải:

a)

x	–2	–1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 = 2mx + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - 1 = 0\ (*)$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2 > 0 \ \forall m$

.

Giả sử (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho $x_1 < x_2$.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$.

Theo đề bài:

$$\left|x_1\right| - \left|x_2\right| = 2021 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 - 2\left|x_1 x_2\right| = 2021 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2 - 2\left|x_1 x_2\right| = 2021$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2.\left(\frac{-1}{2}\right) - 2.\frac{1}{2} = 2021 \Leftrightarrow 4m^2 = 2021 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2021}}{2}.$$

Bài 3: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2\left(m-1\right)x - m + 3$

Gọi $x_1,\ x_2$ là hoành độ giao điểm của d và (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm d và (P):

$$x^2 = 2\left(m-1\right)x - m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2\left(m-1\right)x + m - 3 = 0 \ (*)$$

Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của phương trình (*).

Xét $\Delta' = \left(m-1\right)^2 - m + 3 = m^2 - 3m + 4 = m^2 - 2.\frac{3}{2}m + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \ \forall m$.

$\Rightarrow$ d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\forall m$.

Giả sử $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình (*), theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$.

Theo đề bài:

$$M = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2\left(m-3\right) = \left(2m-2\right)^2 - 2\left(m-3\right) = 4m^2 - 10m + 10$$

$$= \left(2m\right)^2 - 2.2m.\frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 10 = \left(2m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}$$

Dấu = xảy ra khi $2m + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-5}{4}$.

Vậy $m = \frac{-5}{4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 5x - m + 1$ (m là tham số).

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi m = 5.

b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $2x_1 = \sqrt{x_2}$.

Lời giải:

a) Khi m = 5 ta có $(d): y = 5x - 4$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$5x-4=x^2 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Với $x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(1;1)$.

Với $x=5 \Rightarrow y=25 \Rightarrow B(5;25)$.

Vậy với m = 5 thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt Với $A(1;1)$, $B(5;25)$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2=5x-m+1 \Leftrightarrow x^2-5x+m-1=0$ (*)

Xét $\Delta = 25-4m+4 = -4m+29$.

Để d cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thì $-4m+9>0 \Leftrightarrow m>\frac{29}{4}$ (**).

Với $m>\frac{29}{4}$, giả sử (*) có hai nghiệm phân biệt, theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$.

Theo đề bài $2x_1=\sqrt{x_2}$, điều kiện $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 \ge 0 \\ x_1x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \ge 0 \\ m-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1$.

Kết hợp với (**) ta được $1 \le m < \frac{29}{4}$ (***).

Khi đó $2x_1=\sqrt{x_2} \Leftrightarrow 4x_1^2-x_2=0 \Leftrightarrow x_2=4x_1^2$ thay vào $x_1+x_2=5$ ta được:

$$4x_1^2+x_1=5 \Leftrightarrow 4x_1^2+x_1-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_1=\frac{-5}{4}\ (loai) \end{array}\right.$$

Với $x_1=1 \Rightarrow x_2=4$ thay vào $x_1x_2=m-1$ ta được $4=m-1 \Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn (***)).

Vậy m = 5 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Tìm tham số để đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn một biểu thức không đối xứng với x_A, x_B

Phương pháp giải:

- Cách 1: Kết hợp điều kiện của bài toán với biểu thức $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ để tìm x_1, x_2 theo tham số, rồi thay vào biểu thức $x_1x_2=\frac{c}{a}$.
- Cách 2: Nếu tính Δ hoặc Δ' mà được biểu thức bình phương thì ta tìm trực tiếp hai nghiệm và xét hai trường hợp:

  TH 1: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  TH 2: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Bài 1: Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+m+1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1-3x_2=5$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2 = mx + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - m - 1 = 0$ (*)

Xét $\Delta = m^2 + 4m + 4 = \left(m + 2\right)^2 \geq 0$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ (**)

Vậy $m \neq -2$ thì d cắt (P) tại hai diểm phân biệt.

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của (*), theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$.

Kết hợp với $2x_1 - 3x_2 = 5$ ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2m \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2 = 2m - 5 \\ x_1 + x_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{2m - 5}{5} \\ x_1 = \dfrac{3m + 5}{5} \end{cases}$$

Thay x_1, x_2 vào $x_1 x_2 = -m - 1$ ta được:

$$\frac{3m + 5}{5} . \frac{2m - 5}{5} = -m - 1 \Leftrightarrow 6m^2 + 20m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{-10}{3} \end{array} \right.$$

Kết hợp với (**) ta được $m = 0, m = \dfrac{-10}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Do $\Delta = \left(m + 2\right)^2$ nên hai nghiệm của (*) là: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m + \left(m + 2\right)}{2} = m + 1 \\ x = \dfrac{m - \left(m + 2\right)}{2} = -1 \end{array} \right.$.

TH 1: $x_1 = -1, x_2 = m + 1$ thay vào $2x_1 - 3x_2 = 5$ ta được:

$2.(-1) - 3(m + 1) = 5 \Leftrightarrow -2 - 3m - 3 = 5 \Leftrightarrow m = \dfrac{-10}{3}$ (thỏa mãn)

TH 2: $x_1 = m + 1, x_2 = -1$ thay vào $2x_1 - 3x_2 = 5$ ta được:

$2(m + 1) - 3.(-1) = 5 \Leftrightarrow 2m + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 0, m = \dfrac{-10}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Ta có nhận xét $a - b + c = 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm là $x_1 = -1, x_2 = m + 1$.

Bài 2: Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2\left(m + 1\right)x + 3$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2\left|x_1\right| + \left|x_2\right| = 5$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2\left(m + 1\right)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2\left(m + 1\right)x - 3 = 0$ (*).

Để d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow \left(m + 1\right)^2 + 3 > 0 \, \forall m$

$\Rightarrow$ d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 là nghiệm của (*).

Do $ac = 1.(-3) < 0$ nên (*) luôn có hai nghiệm trái dấu.

TH 1: $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2\left|x_1\right| + \left|x_2\right| = 5 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 5 + 2x_1$.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \quad (1) \\ x_1 x_2 = -3 \qquad\quad (2) \end{cases}$.

Ta được: $x_1\left(5 + 2x_1\right) = -3 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 5x_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_1 = \dfrac{-3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 3 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$.

Với $x_1 = -1, x_2 = 3$ thay vào (1) ta được $2 = 2m + 2 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).

Với $x_1 = \dfrac{-3}{2}, x_2 = 2$ thay vào (1) ta được $\dfrac{1}{2} = 2m + 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{-3}{4}$ (thỏa mãn).

TH 2: Với $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow 2\left|x_1\right| + \left|x_2\right| = 5 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 3$.

Kết hợp với (2) ta được $x_1\left(2x_1 - 5\right) = -3 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_1 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = -3 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$.

Với $x_1 = 1, x_2 = -3$ thay vào (1) ta được $-2 = 2m + 2 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

Với $x_1 = \dfrac{3}{2}, x_2 = -2$ thay vào (1) ta được $\dfrac{-1}{2} = 2m + 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{-5}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \left\{0; 2; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{-5}{4}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Chú ý: Với bài toán chứa giá trị tuyệt đối điều quan trọng nhất là tìm được điều kiện của ẩn để phá dấu giá trị tuyệt đối.

Bài 3: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = \left(2m - 1\right)x - m^2 + m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2}$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = \left(2m - 1\right)x - m^2 + m \Leftrightarrow x^2 - \left(2m - 1\right)x + m^2 - m = 0 \ (*)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left(2m - 1\right)^2 - 4\left(m^2 - m\right) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0 \ \forall m$.

$\Rightarrow$ d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Cách 1: Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \ (*) \\ x_1 x_2 = m^2 - m \ (**) \end{cases}$.

Theo đề bài ta có $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2} \ (1)$, điều kiện:

$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \ge 0 \\ m^2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1 \ (2)$

$(1) \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$ kết hợp với (*) ta được $2x_2 + x_2 = 2m - 1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{2m-1}{3} \Rightarrow x_1 = \dfrac{4m-2}{3}$.

Thay vào (**) ta được:

$x_1 x_2 = m^2 - m \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{3}\dfrac{4m-2}{3} = m^2 - m \Leftrightarrow 8m^2 - 8m + 2 = 9m^2 - 9m \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(m+1\right)\left(m-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \ (loai) \\ m = 2 \ (thoa\,man) \end{array}\right.$

Kết hợp với (2) ta được m = 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Với $\Delta = 1$ ta có $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2m-1+1}{2} = m \\ x = \dfrac{2m-1-1}{2} = m-1 \end{array}\right.$.

Theo đề bài $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$, điều kiện: $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1 \ (*)$.

TH 1: $x_1 = m,\ x_2 = m - 1$ ta có $m = 2\left(m-1\right) \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn).

TH 2: $x_1 = m - 1,\ x_2 = m$ ta có $m - 1 = 2m \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

Kết hợp với (*) ta được m = 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4: Cho parabol $(P): y = x^2$ và $(d): y = \left(m-3\right)x - m + 4$. Tìm m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt $x_1,\ x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = \left(m-3\right)x - m + 4 \Leftrightarrow x^2 - \left(m-3\right)x + m - 4 = 0 \ (*)$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \left(m-3\right)^2 - 4\left(m-4\right) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 25 > 0 \Leftrightarrow \left(m-5\right)^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne 5$

Theo Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$.

Ta có $1 - m + 3 + m - 4 = 0 \Rightarrow$ (*) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m - 4 \end{array}\right.$.

Theo đề bài $x_1,\ x_2$ là hai cạnh của tam giác vuông cân, mà $m - 4 \ne 1$ nên giả sử x_1 là cạnh huyền, x_2 là cạnh góc vuông.

Theo định lí Py-ta-go $x_1^2 = x_2^2 + x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 2x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}x_2 \ \ (**)$.

Do $x_1,\ x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông nên $\begin{cases} 1 > 0 \\ m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4 \ \ (***)$.

TH 1: $x_1 = 1,\ x_2 = m-4$ thay vào (**) ta được $1 = \sqrt{2}\left(m-4\right) \Leftrightarrow m = \dfrac{1+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (thỏa mãn).

TH 2: $x_1 = m-4,\ x_2 = 1$ thay vào (**) ta được $m-4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}+4$ (thỏa mãn).

Kết hợp với (***) ta được $m = \dfrac{1+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ m = \sqrt{2}+4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4: Tìm tham số để đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt A, B liên quan đến tung độ của A và B

Phương pháp giải: Cho đường thẳng $(d): y = mx+n$ và parabol $(P): y = ax^2$.

- Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 = mx+n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0\ (*)$.
- Bước 2: Lập luận: d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt.
- Bước 3: Gọi hai nghiệm của (*) là $x_1,\ x_2$ thay vào (P) được $y_1 = ax_1,\ y_2 = ax_2$ hoặc thay vào d được $y_1 = mx_1+n,\ y_2 = mx_2+n$.

Bài 1: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - x^2 + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;y_1\right),\ B\left(x_2;y_2\right)$ sao cho $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2mx - m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0\ (1)$.

Để d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m^2 + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1\ (*)$

Với m > 1 thì (1) có hai nghiệm phân biệt, theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - m - 1 \end{cases}$.

Khi đó $A\left(x_1;x_1^2\right),\ B\left(x_2;x_2^2\right)$.

Theo đề bài:

$y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1+x_2\right) = 22 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2\left(x_1+x_2\right) = 22$

$\Leftrightarrow \left(2m\right)^2 - 2.\left(m^2 - m - 1\right) + 2.2m = 22 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m^2 + 2m + 2 + 4m - 22 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 6m - 20 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left(m-5\right)\left(m+2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Kết hợp với (*) ta được m = 5 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = \left(2m+1\right)x - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;\ y_1\right),\ B\left(x_2;\ y_2\right)$ sao cho $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Cách 1:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = \left(2m+1\right)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - \left(2m+1\right)x + 2m = 0\ (1)$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \left(2m+1\right)^2 - 4.2m > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(2m-1\right)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$ (*)

Với $m \neq \frac{1}{2}$ thì (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Ta có $A\left(x_1; x_1^2\right), B\left(x_2; x_2^2\right)$.

Theo đề bài ta có $T = y_1 + y_2 - x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1x_2$.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}$ thay vào T ta được:

$T = \left(2m+1\right)^2 - 3.2m = 4m^2 - 2m + 1 = \left(2m\right)^2 - 2.\frac{1}{2}.2m + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Dấu = xảy ra khi $2m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Vậy GTLN của T là $\frac{3}{4}$ khi $m = \frac{1}{4}$.

Cách 2: Với $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}$.

Ta có $y_1 = \left(2m+1\right)x_1 - 2m,\ y_2 = \left(2m+1\right)x_2 - 2m$.

Theo đề bài:

$T = y_1 + y_2 - x_1x_2 = \left(2m+1\right)x_1 - 2m + \left(2m+1\right)x_1 - 2m - 2m = \left(2m+1\right)\left(x_1 + x_2\right) - 6m$

$= \left(2m+1\right)\left(2m+1\right) - 6m = 4m^2 - 2m + 1 = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Dấu = xảy ra khi $2m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Kết hợp với (*) ta được $m = \frac{1}{4}$ thì T đath GTLN là $\frac{3}{4}$.

Bài 3: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$ sao cho $y_1 - y_2 > 4$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2mx - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0\ (1)$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Delta \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - \left(m^2 - 1\right) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0\ \forall m$.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1), theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$.

Do $\Delta = 1 > 0 \Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x = m - 1,\ x = m + 1$.

TH 1: $x_1 = m-1,\ x_2 = m+1 \Rightarrow y_1 = \left(m-1\right)^2,\ y_2 = \left(m+1\right)^2$.

Theo đề bài:

$y_1 - y_2 > 4 \Leftrightarrow \left(m-1\right)^2 - \left(m+1\right)^2 > 4 \Leftrightarrow \left(m-1-m-1\right)\left(m-1+m+1\right) > 4 \Leftrightarrow -2.2m > 4 \Leftrightarrow m < -1$

TH 2: $x_1 = m+1,\ x_2 = m-1 \Rightarrow y_1 = \left(m+1\right)^2,\ y_2 = \left(m-1\right)^2$

Theo đề bài:

$y_1 - y_2 > 4 \Leftrightarrow \left(m+1\right)^2 - \left(m-1\right)^2 > 4 \Leftrightarrow \left(m+1-m+1\right)\left(m+1+m-1\right) > 4 \Leftrightarrow 2.2m > 4 \Leftrightarrow m > 1$

Vậy với m < –1 hoặc m > 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Có thể lập luận theo bài 2 để tìm x và y, từ đó đưa về giải bất phương trình bậc hai, ép về tích chia trường hợp.

IV. Bài tập áp dụng

1. Định lí Vi-ét

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 2\left(m+3\right)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left(2x_1 - 1\right)\left(2x_2 - 1\right) = 9$.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2\left(m+3\right)x + -2\left(m-1\right) = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2\left(m+1\right)x + 4m - m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ sao cho biểu thức $A = \left|x_1 - x_2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left|x_1\right| + \left|x_2\right| = 4$.

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left|x_1\right| + \left|x_2\right| = 3$.

Bài 6: Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.

Bài 7: Cho phương trình $x^2 - 2\left(k-1\right)x - 4k = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $3x_1 - x_2 = 2$.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1^2$.

Bài 9: Cho phương trình $x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left|x_1\right| + 2\left|x_2\right| = 3$.

Bài 10: Cho phương trình $x^2 - \left(m-3\right)x - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ là các số nguyên.

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - 20x + m + 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là các số nguyên tố.

Bài 12: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = -3x_2$.

Bài 13: Cho phương trình $x^2 + 4x + 4a - a^2 = 0$. Tìm a để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = x_2^2 - 6$.

Bài 14: Cho phương trình $x^2 - (2m-5)x - 2m - 6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 7$.

Bài 15: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 1$.

Bài 16: Cho phương trình $x^2 - mx - 8 = 0$. Chứng minh với mọi m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và giá trị biểu thức $H = \frac{2x_1^2 + 5x_1 - 16}{3x_1} - \frac{2x_2^2 + 5x_2 - 16}{3x_2}$ không phụ thuộc vào m.

Bài 17: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_2 + 1} = \frac{1}{4}$.

Bài 18: Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \frac{2x_1x_2 + 1}{x_1^2 - 2mx_1 + 1 - 2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Hệ quả của định lí Vi-ét

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - (2m+5)x + 2m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà biểu thức $M = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 5x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 = \sqrt{x_2}$.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5.

Bài 5: Cho phương trình $x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 \le x_2$.

Bài 6: Cho phương trình $x^2+\left(m-2\right)x+m-5=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1\le 0<x_2$.

Bài 7: Cho phương trình $x^2+2mx+4m-4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1<2,\ x_2<2$.

Bài 8: Cho phương trình $x^2-\left(m+3\right)x+m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1<\frac{-3}{2}<x_2$.

Bài 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\frac{x-7-3m}{\sqrt{x}-3}=m.$

Bài 10: Cho phương trình $\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}=m.$ Tìm m đẻ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

3. Sự tương giao của đường thẳng và parabol

Bài 1: Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=2\left(m+3\right)x-m^2-3$. Tìm m để d tiếp xúc với (P). Khi đó hãy tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 2: Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=2x+3$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P), trong đó A là điểm có hoành độ âm. Vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) để S_{ABC} lớn nhất.

Bài 3: Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=2\left(m-1\right)x-2m+4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ sao cho biểu thức $P=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho parabol $(P):y=-x^2$ và đường thẳng d đi qua $I\left(0;-1\right)$ hệ số góc k.

a) Viết phương trình d theo k.

b) Chứng minh d luôn cắt (P) tại A, B phân biệt thuộc hai phía Oy.

c) Gọi hoành độ A và B lần lượt là $x_1,\ x_2$. Chứng minh $\left|x_1-x_2\right|\ge 2$.

d) Giả sử $x_1<x_2$. Tìm m để $\left|x_1\right|>\left|x_2\right|$.

Bài 5: Cho parabol $(P):y=x^2$ và $(d):y=mx-m+1$. Tìm m để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=4.$

Bài 6: Cho $(P):y=x^2$ và $(d):y=2\left(m-1\right)x+3-2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $x_1,\ x_2$ là độ dài hai cạnh một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}.$

Bài 7: Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=mx+m+1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $2x_1-3x_2=5.$

Bài 8: Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=2\left(m+1\right)x+3$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $2\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=5.$

Bài 9: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.

Bài 10: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = \left(2m - 1\right)x - m^2 + m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2}$.

Bài 11: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = \left(m - 3\right)x - m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Bài 12: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$.

Bài 13: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = \left(2m + 1\right)x - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 < 4$.

Bài 15: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$ mà $x_1y_1 - x_2y_2 - x_1x_2 = -4$.

CHUYÊN ĐỀ:
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Phương pháp giải chung:

- Bước 1: Kẻ bảng nếu được, gọi các ẩn kèm theo điều kiện cho các ẩn.
- Bước 2: Giải thích từng ô trong bảng, lập luận để thiết lập hệ phương trình.
- Bước 3: Giải hệ phương trình, đối chiếu nghiệm với điều kiện.

DẠNG 1: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Phương pháp giải: Quãng đường = vận tốc . thời gian (s = vt).

- Bước 1: Kẻ bảng gôfm: vận tốc, quãng đường và thời gian, điền các thông tin vào bảng rồi gọi ẩn, đặt điều kiện cho ẩn.
- Bước 2: Giải thích từng ô trong bảng, lập luận thiết lập hệ phương trình.
- Bước 3: Giải hệ phương trình, đối chiếu điều kiện rồi trả lời bài toán.

Bài 1: Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 20 km/h thì xe máy đến B sớm hơn 1 giờ so với dự định, nếu vận tốc giảm đi 10km/h thì xe máy đến B muộn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Lời giải:

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	x	y	xy
TH 1	$x+20$	$y-1$	$\left(x+20\right)\left(y-1\right)$
TH 2	$x-10$	$y+1$	$\left(x-10\right)\left(y+1\right)$

Gọi vận tốc dự định của xe máy là x (km/h), x > 0, thời gian dự định là y (giờ), y > 0.

Khi đó độ dài quãng đường AB là xy (km).

TH 1: Vận tốc của xe máy là $x+20$ (km/h), thời gian đi là $y-1$ (giờ).

Khi đó độ dài quãng đường AB là $\left(x+20\right)\left(y-1\right)$ (km).

Do độ dài AB không đổi nên $\left(x+20\right)\left(y-1\right)=xy \Leftrightarrow x-20y=-20 \ \ (1)$.

TH 1: Vận tốc của xe máy là $x-10$ (km/h), thời gian đi là $y+1$ (giờ).

Khi đó độ dài quãng đường AB là $\left(x-10\right)\left(y+1\right)$ (km).

Do độ dài AB không đổi nên $\left(x-10\right)\left(y+1\right)=xy \Leftrightarrow x-10y=10 \ \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x-20y=-20\\x-10y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-10y=-30\\x-10y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=40\\y=3\end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Vậy độ dài quãng đường AB là 40.3 = 120 (km).

DẠNG 2: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG LIÊN QUAN ĐẾN DÒNG NƯỚC

Phương pháp giải:

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước.
- Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước.

Bài 1: Một ca nô chạy trên một khúc sông, xuôi dòng 20 km rồi ngược dòng 18 km thì hết 1 giờ 25 phút. Lần khác ca nô đi xuôi dòng 15 km rồi ngược dòng 24 km thì hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước, biết các vận tốc đó không đổi.

Lời giải:

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Xuôi dòng lần 1	$x+y$	$\frac{20}{x+y}$	20
Ngược dòng lần 1	$x-y$	$\frac{18}{x-y}$	18
Xuôi dòng lần 2	$x+y$	$\frac{15}{x+y}$	15
Ngược dòng lần 2	$x-y$	$\frac{24}{x-y}$	24

Đổi: 1 giờ 25 phút = $\frac{17}{12}$ giờ, 1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h), x > 0; vận tốc của dòng nước là y (km/h), y > 0.

Vận tốc của ca nô xuôi dòng lần 1 là $x+y$ (km/h).

Thời gian ca nô xuôi dòng lần 1 là $\frac{20}{x+y}$ (giờ).

Vận tốc của ca nô ngược dòng lần 1 là $x-y$ (km/h).

Thời gian ca nô ngược dòng lần 1 là $\frac{18}{x-y}$ (giờ).

Do thời gian ca nô đi cả xuôi và ngược là $\frac{17}{12}$ giờ nên: $\frac{20}{x+y}+\frac{18}{x-y}=\frac{17}{12}$ (1).

Vận tốc của ca nô xuôi dòng lần 2 là $x+y$ (km/h).

Thời gian ca nô xuôi dòng lần 2 là $\frac{15}{x+y}$ (giờ).

Vận tốc của ca nô ngược dòng lần 2 là $x-y$ (km/h).

Thời gian ca nô ngược dòng lần 2 là $\frac{24}{x-y}$ (giờ).

Do thời gian ca nô đi cả xuôi và ngược là $\frac{3}{2}$ giờ nên: $\frac{15}{x+y}+\frac{24}{x-y}=\frac{3}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{20}{x+y}+\frac{18}{x-y}=\frac{17}{12}\\ \frac{15}{x+y}+\frac{24}{x-y}=\frac{3}{2}\end{cases}$.

Đặt $\frac{1}{x+y}=a, \frac{1}{x-y}=b$ ta được:

$$\begin{cases} 20a+18b=\dfrac{17}{20} \\ 15a+24b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60a+54b=\dfrac{17}{4} \\ 60a+96b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -42b=\dfrac{-7}{4} \\ 15a+24b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{24} \\ a=\dfrac{1}{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ x-y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=27 \\ y=3 \end{cases}$$

(thỏa mãn đk)

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h, vận tốc dòng nước là 3 km/h.

DẠNG 3: BÀI TOÁN LÀM CHUNG MỘT CÔNG VIỆC

Bài toán 1: Hai người làm chung một công việc thì sau k ngày (giờ, phút) hoàn thành công việc. Nếu người thứ nhất làm công việc đó một mình trong m ngày rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp công việc trong n ngày thì hoàn thành. Hỏi nếu hai người làm riêng thì mỗi người mất bao nhiêu thời gian để hoành thành công việc?

Phương pháp giải:

Gọi thời gian người thứ nhất, người thứ hai llafm một mình xong công việc lần lượt là x , y > 0.

Trong 1 ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ lượng công việc,

người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ lượng công việc.

Trong k ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{k}{x}$ lượng công việc,

người thứ hai làm được $\dfrac{k}{y}$ lượng công việc.

Do hai người làm chung sau k ngày hoàn thành công việc nên $\dfrac{k}{x}+\dfrac{k}{y}=1 \ \ (1)$.

Trong m ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{m}{x}$ lượng công việc.

Trong n ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{n}{x}$ lượng công việc.

Do người thứ nhất làm công việc đó một mình trong m ngày rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp công việc trong n ngày thì hoàn thành nên $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}=1 \ \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{k}{x}+\dfrac{k}{y}=1 \\ \dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}=1 \end{cases}$. Giải hệ phương trình tìm được x và y.

Bài toán 2: Hai người làm chung một công việc thì sau k ngày (giờ, phút) hoàn thành công việc. Nếu hai người làm chung, sau m ngày người thứ nhất nghỉ, người thứ hai làm tiếp công việc trong n ngày nữa thì hoàn thành. Hỏi nếu hai người làm riêng thì mỗi người mất bao nhiêu thời gian để hoành thành công việc?

Phương pháp giải:

Gọi thời gian người thứ nhất và thứ hai làm một mình xong công việc và x và y, x, y > 0.

Trong 1 ngày, người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$, người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Trong k ngày, người thứ nhất làm được $\frac{k}{x}$, người thứ hai làm được $\frac{k}{y}$ công việc.

Do hai người làm chung thì sau k ngày xong công việc nên $\frac{k}{x}+\frac{k}{y}=1$.

Trong m ngày cả hai người làm được $\frac{m}{x}+\frac{m}{y}$ công việc.

Trong n ngày người thứ hai làm được $\frac{n}{y}$ công việc.

Do hai người làm chung, sau m ngày người thứ nhất nghỉ, người thứ hai làm tiếp công việc trong n ngày nữa thì hoàn thành nên ta có phương trình: $\left(\frac{m}{x}+\frac{m}{y}\right)+\frac{n}{y}=1$ (2)

Từ (1) và (2) giải hệ phương trình.

Bài 1: Hai công nhân cùng làm một công việc trong 4 giờ 30 phút thì xong. Nếu người công nhân I làm một mình trong 3 giờ và người II làm một mình trong 2 giờ thì tổng số họ làm được 50% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó sau bao lâu thì xong?

Lời giải:

Đổi: 4 giờ 30 phút = $\frac{9}{2}$ giờ.

Gọi thời gian người I làm một mình hoàn thành công việc là x (giờ), x > 0.

thời gian người II làm một mình hoàn thành công việc là y (giờ), y > 0.

Trong 1 giờ người I làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ II làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Do hai người cùng làm trong 4 giờ 30 phút thì xong nên: $\frac{9}{2}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{9}$ (1)

Trong 3 giờ người I làm được $\frac{3}{x}$ công việc, người thứ II làm được $\frac{2}{y}$ công việc.

Do người công nhân I làm một mình trong 3 giờ và người II làm một mình trong 2 giờ thì tổng số họ làm được 50% công việc nên $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{9}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{18}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=18\\ y=6\end{cases}$$ (thỏa mãn đk)

Vậy người I làm một mình trong 18 giờ, người II làm một mình trong 6 giờ thì hoàn thành công việc.

Bài 2: Hai người thợ cùng làm một công việc thì sau 2 giờ 40 phút hoàn thành công việc. Nếu người thứ nhất làm một mình và 3 giờ sau người thứ hai cùng làm thì mất 40 phút nữa mới hoàn thành. Hỏi mỗi người làm công việc đó mấy giờ xong?

Lời giải:

Đổi: 2 giờ 40 phút = $\frac{8}{3}$ giờ, 40 phút = $\frac{2}{3}$ giờ.

Gọi thời gian người thợ I làm một mình xong công việc là x (giờ), thời gian người thợ II làm một mình xong công việc là y (giờ), x, y > 0.

Trong 1 giờ, người I làm được $\frac{1}{x}$ lượng công việc, người II làm được $\frac{1}{y}$ lượng công việc.

Do sau 2 giờ 40 phút hai người làm xong công việc nên $\frac{8}{3}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8}$ (1).

Trong 3 giờ người I làm được $\frac{3}{x}$ lượng công việc.

Trong 40 phút cả hai người làm được $\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ lượng công việc.

Do người thứ nhất làm một mình và 3 giờ sau người thứ hai cùng làm thì mất 40 phút nữa mới hoàn thành nên $\frac{3}{x}+\frac{2}{3x}+\frac{2}{3y}=1 \Leftrightarrow \frac{11}{x}+\frac{2}{y}=3$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8}\\ \frac{11}{x}+\frac{2}{y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9}{x}=\frac{9}{4}\\ \frac{11}{x}+\frac{2}{y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=8\end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Vậy thời gian người I, II làm một mình xong công việc lần lượt là 4 giờ và 8 giờ.

Bài 3: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút đầy bể. Nếu vòi I chảy trong giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải:

Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x (giờ), vòi II chảy một mình đầy bể là y (giờ), x, y > 0.

Đổi: giờ 48 phút = $\frac{24}{5}$ giờ.

Trong 1 giờ, vòi 1 chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Do cả hai vòi cùng chảy thì sau 4 giờ 48 phút đầy bể nên $\frac{24}{5}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}$ (1).

Trong 4 giờ vòi I chảy được $\frac{4}{x}$ bể, trong 3 giờ vòi II chảy được $\frac{3}{y}$ bể.

Do vòi I chảy trong giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nên $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}\\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{20}{24}\\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}\\ y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=12\end{cases}$$ (thỏa mãn đk)

Vậy vòi I chảy một mình 8 giờ thì đầy bể, vòi II chảy một mình 12 giờ đầy bể.

DẠNG 4: CẤU TẠO SỐ

Phương pháp giải:

Với số có hai chữ số $\overline{ab}$, do chữ số đầu tiên khác 0 nên điều kiện là $1\le a\le 9, 0\le b\le 9, a,b\in\mathbb{N}$.

Tương tự số có ba chữ số $\overline{abc}$, điều kiện là $1\le a\le 9, 0\le b\le 9, 0\le c\le 9, a,b,c\in\mathbb{N}$.

Ta có: $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{abc}=100a+10b+c$.

Bài 1: Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đó thì được số mới nhỏ hơn số cũ là 18. Biết tổng số đã cho và số mới là 176, tìm số đã cho.

Lời giải:

Gọi chữ số cần tìm là $\overline{ab}$ với $1\le a\le 9, 0\le b\le 9, a,b\in\mathbb{N}$.

Do nếu đổi chỗ hai chữ số của số đó thì được số mới nhỏ hơn số cũ là 18 nên ta có phương trình:

$\overline{ba}-\overline{ab}=18\Leftrightarrow 10b+a-10a-b=18\Leftrightarrow -a+b=2$ (1)

Do tổng số đã cho và số mới là 176 nên ta có phương trình:

$\overline{ab}+\overline{ba}=176\Leftrightarrow 10a+b+10b+a=176\Leftrightarrow a+b=16$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-a+b=2\\ a+b=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+18\\ -a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\ b=9\end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Vậy số cần tìm là 79.

Bài 2: Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng hai chữ số của nó bằng 9. Nếu lấy số đó chia cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 2 và dư là 18. Tìm số ban đầu.

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, $1\le a\le 9, 0\le b\le 9, a,b\in\mathbb{N}$.

Do tổng hai chữ số bằng 9 nên ta có a + b = 9 (1).

Do lấy số đó chia cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 2 và dư là 18 nên

$$\overline{ab}=\overline{ba}.2+18\Leftrightarrow 10a+b=20b+2a+18\Leftrightarrow 8a-19b=18$$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a+b=9\\ 8a-19b=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\ b=2\end{cases}$ (thỏa mãn đk).

Vậy số cần tìm là 72.

DẠNG 5: TOÁN PHẦN TRĂM

Phương pháp giải:

Dự kiến mỗi ngày làm x sản phẩm. Thực tế mỗi ngày tăng a% nghĩa là số sản phẩm tăng thêm mỗi ngày là a%x sản phẩm. Thực tế mỗi ngày sản xuất được x + a%x sản phẩm.

Bài 1: Theo kế hoạch, hai tổ sản xuất phải làm 700 sản phẩm. Nhưng do cải tiến kĩ thuật, tổ I làm vượt mức 15% so với kế hoạch, tổ II làm vượt mức kế hoạch 20% nên cả tổ làm được 820 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ làm theo kế hoạch.

Lời giải:

	Tổ I	Tổ II	Cả hai tổ
Kế hoạch	x	y	700
Thực tế	$x+15\%x$	$y+20\%y$	820

Gọi số sản phẩm tổ I làm theo kế hoạch là x (sản phẩm), số sản phâm tổ II làm theo kế hoạch là y (sản phẩm), $x,y\in\mathbb{N}^*$.

Do theo kế hoạch mỗi ngày hai tổ phải sản xuất 700 sản phẩm nên x + y = 700 (1).

Thực tế tổ I sản xuất được $x+15\%x=1,15x$ (sản phẩm),

tổ II sản xuất được $y+20\%y=1,2y$ (sản phẩm).

Do thực tế cả hai tổ làm được 820 sản phẩm nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=700\\1,15x+1,2y=820\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=400\\y=300\end{cases}$$ (thỏa mãn đk)

Vậy tổ I sản xuất được 400 sản phẩm, tổ II sản xuất được 300 sản phẩm.

Bài 2: Trong kì thi vào lớp 10, hai trường A và B có 840 học sinh tham gia thi đỗ vào lớp 10 công lập với thỉ lệ thi đỗ là 84%. Trường A tỉ lệ đỗ là 80%, trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh tham giá thi mỗi trường.

Lời giải:

Gọi số học sinh trường A là x (học sinh), số học sinh trường B là y (học sinh), $x,y\in\mathbb{N}^*$.

Do tỉ lệ đỗ cả hai trường là 84% ứng với 840 học sinh nên ta có:

$$\left(x+y\right).84\%=840\Leftrightarrow x+y=1000\ (1)$$

Do trường A tỉ lệ đỗ là 80%, trường B tỉ lệ đỗ là 90% nên ta có:

$$80\%x+90\%y=840\Leftrightarrow 80x+90y=84000\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=1000\\80x+90y=84000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=600\\y=400\end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Vậy số học sinh thi của trường A và B lần lượt là 600 và 400 học sinh.

Bài 3: Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Trong tuần hai, tổ A vượt mức 25%, tổ B giảm mức 18% nên trong tuần hai cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ. hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải:

	Tuần 1	Tuần 2
Tổ A	x	$x+25\%x$
Tổ B	y	$y-18\%y$
Tổng sản phẩm	x + y = 1500	$1,25x+0,82y=1617$

Gọi số sản phẩm tổ A sản xuất được trong tuần 1 là x (sản phẩm), số sản phẩm tổ B sản xuất được trong tuần 1 là y (sản phẩm), $x,y\in\mathbb{N}^*$. Ta có x + y = 1500 (1)

Do tổ A sản xuất vượt mức 25% trong tuần 2 nên số sản phẩm tổ A làm được trong tuần 2 là $x+25\%x=1,25x$ (sản phẩm).

Do tổ B sản xuất giảm mức 18% trong tuần 2 nên số sản phẩm tổ B làm được trong tuần 2 là $y-18\%y=0,82y$ (sản phẩm).

Trong hai tuần cả hai tổ sản xuất được 1617 sản phẩm nên $1,25x+0,82y=1617$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=1500 \\ 1,25x+0,82y=1617 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=900 \\ y=600 \end{cases}$ (thỏa mãn đk).

Vậy tổ A sản xuất được 900 bộ quần áo, tổ B sản xuất được 600 bộ quần áo.

DẠNG 6: TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Phương pháp giải:

Chu vi hình chữ nhật = (chiều dài + chiều rộng) . 2

Diện tích hình chữ nhật = chiều dài . chiều rộng

Chu vi tam giác = tổng 3 cạnh

Diện tích tam giác = (đáy . chiều cao) : 2

Chu vi hình vuông = độ dài một cạnh . 4

Diện tích hình vuông = độ dài mọt cạnh . chính nó

Bài 1: Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu tăng chiều cao thêm 3 dm và giảm cạnh đáy 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2. Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Lời giải:

Gọi chiều cam của tam giác là x (dm), độ dài cạnh đáy là y (dm), x > 0, y > 3.

Khi đó diện tích tam giác là $\frac{1}{2}xy$ (dm^2).

Do chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy nên $x=\frac{3}{4}y \Leftrightarrow 4x-3y=0$ (1).

Do nếu tăng chiều cao thêm 3 dm và giảm cạnh đáy 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 nên ta có:

$$\frac{1}{2}\left(x+3\right)\left(y-3\right)=\frac{1}{2}xy+12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(xy-3x+3y-9\right)=\frac{1}{2}xy+12 \Leftrightarrow -3x+3y=33 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -3x+3y=33 \\ 4x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+3y=33 \\ x=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=33 \\ y=44 \end{cases}$ (thỏa mãn đk).

Vậy độ dài cạnh đáy là 44dm và chiều cao là 33dm.

Bài 2: Một khu vườn hình chữ nhật, nếu tăng mỗi cạnh thêm 4 m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm 216 m^2. Nếu tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài 5 m thì diện tích mảnh vườn giảm 50 m^2. Tính độ dài các cạnh khu vườn.

Lời giải:

	Chiều rộng	Chiều dài	Diện tích
TH 1	$x+4$	$y+4$	$\left(x+4\right)\left(y+4\right)$
TH 2	$x+2$	$y-5$	$\left(x+2\right)\left(y-5\right)$

Gọi chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là x và y (m), x > 0, y > 5.

Diện tích mảnh vườn là xy (m^2).

Do nếu tăng chiều dài và chiều rộng thêm 4 m thì diện tích tăng thêm 216 m^2 nên ta có:

$$\left(x+4\right)\left(y+4\right)=216+xy \Leftrightarrow 4x+4y=210 \quad (1)$$

Do nếu giảm chiều dài 5 m, tăng chiều rộng 2 m thì diện tích giảm 50 m^2 nên ta có:

$$\left(x+2\right)\left(y-5\right)=xy-50 \Leftrightarrow -5x+2y=-40 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}4x+4y=210\\-5x+2y=-40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20\\y=30\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy chiều rộng và chiều dài của khu vườn lần lượt là 20 m và 30 m.

Bài 3: Trong một phòng hình chữ nhật, ghế được sắp xếp theo hàng và số ghế trong mỗi phòng như nhau. Nếu bớt đi 2 hàng ghế thì tổng số ghế trong phòng họp đó giảm đi 80 ghế so với ban đầu. Nếu kê thêm 1 hàng ghế và mỗi hàng kê thêm hai ghế thì tổng số ghế tăng thêm 68 ghế. Tính số hàng ghế và số ghế trong phòng họp ban đầu.

Lời giải:

	Số hàng	Số ghế 1 hàng	Tổng số ghế
Ban đầu	x	y	xy
TH1	$x-2$	$y-2$	$\left(x-2\right)\left(y-2\right)$
TH2	$x+1$	$y+2$	$\left(x+1\right)\left(y+2\right)$

Gọi số hàng ghế trong phòng họp là x (hàng), số ghế trong 1 hàng là y (ghế), $x,y>2,\ x,y\in\mathbb{N}$.

Tổng số ghế trong phòng họp lúc đầu là xy (ghế).

TH 1: Số ghế trong 1 hàng là $y-2$, số hàng ghế là $x-2$.

Do tổng số ghế giảm 80 ghế so với ban đầu nên ta có:

$$\left(x-2\right)\left(y-2\right)=xy-80\Leftrightarrow-2x-2y+4=-80\Leftrightarrow x+y=42\ \ (1)$$

TH 2: Số ghế trong 1 hàng là $y+2$, số hàng ghế là $x+1$.

Do tổng số ghế tăng 68 ghế so với ban đầu nên ta có:

$$\left(x+1\right)\left(y+2\right)=xy+68\Leftrightarrow 2x+y+2=68\Leftrightarrow 2x+y=66\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=42\\2x+y=66\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=24\\y=18\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy số ghế trong 1 hàng là 24 và số hàng ghế là 18.

Tổng số ghế trong phòng họp là 24.18 = 432 (ghế).

II. Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai

DẠNG 1: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

1.1. Chuyển động trên bộ

Phương pháp giải:

- Bước 1: Kẻ bảng gồm quãng đường, vận tốc, thời gian và điền các thông tin vào bảng kèm điều kiện của ẩn.
- Bước 2: Giải thích từng ô trong bảng, lập luận giải phương trình.
- Bước 3: Giải phương trình, đối chiếu điều kiện và kết luận.

Bài 1: Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc dự định. Quãng đường AB dài 48 km, trong đó có một đoạn đường qua khu dân cư dài 8 km. Khi đi qua khu dân cư, xe phải giảm tốc độ 10 km/h để đảm bảo an toàn. Tính vận tốc ô tô đi qua khu dân cư, biết thời gian ô tô đi từ A đến B là 1 giờ.

Lời giải:

	Quãng đường	Vận tốc	Thời gian
Dự định	48	x	$\frac{48}{x}$

Thực tế	40; 8	x; x - 10	$\frac{40}{x}+\frac{8}{x-10}$

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h), x > 0.

Vận tốc ô tô đi trong khu dân cư là x – 10 (km/h).

Thời gian ô tô đi từ A đến B là:

$$\frac{40}{x}+\frac{8}{x-10}=1 \Leftrightarrow 40x-400+8x=x\left(x-10\right) \Leftrightarrow x^2-38x+400=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=50 \\ x=-8\ (loai) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc ô tô đi trong khu dân cư là 40 km/h.

Bài 2: Mọt người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp từ A đến B.

Lời giải:

	Quãng đường	Vận tốc	Thời gian
Lúc đi	24	x	$\frac{24}{x}$
Lúc về	24	$x+4$	$\frac{24}{x+4}$

Gọi vận tốc xe đạp đi từ A đến B là x (km/h), x > 0.

Thời gian xe đạp đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ (giờ).

Vận tốc xe đạp đi từ B về A là x + 4 (km/h).

Thời gian xe đạp đi từ B về A là $\frac{24}{x+4}$ (giờ).

Đổi: 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Do thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút nên ta có:

$$\frac{24}{x}-\frac{24}{x+4}=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2+4x-102=0 \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2=196 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=14 \\ x+2=-14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-18 \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc xe đạp từ A đến B là 12 km/h.

Bài 3: Quãng đường từ AB dài 90km. Mọt người đi xe máy từ A đến B, nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lúc về lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Lời giải:

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Lúc đi	x	$\frac{90}{x}$	90
Lúc về	x + 90	$\frac{90}{x+9}$	90

Gọi vận tốc xe máy đi từ A đến B là x (km/h), x > 0.

Đổi: 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{90}{x}$ giờ.

Vận tốc ô tô đi từ B về A là x + 90 km/h.

Thời gian ô tô đi từ B về A là $\frac{90}{x+9}$ giờ.

Do thời gian từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ nên ta có:

$$\frac{90}{x}+\frac{90}{x+9}+\frac{1}{2}=5 \Rightarrow x^2-31x-180=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=36 \\ x=-5\ (loai) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc ô tô đi từ A đến B là 36 km/h.

1.2. Chuyển động trên dòng nước

Phương pháp giải:

Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng của ca nô + vận tốc dòng nước

Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng của ca nô – vận tốc dòng nước

Bài 1: Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông với vận tốc dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 1 giờ.

Lời giải:

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Xuôi dòng	$x+2$	$\frac{60}{x+2}$	60
Ngược dòng	$x-2$	$\frac{48}{x-2}$	48

Gọi vận tốc tàu tuần tra khi nước yên lặng là x (km/h), x > 2.

Vận tốc tàu tuần tra khi xuôi dòng là $x+2$ km/h.

Thời gian tàu tuần tra khi xuôi dòng là $\frac{60}{x+2}$ giờ.

Vận tốc tàu tuần tra khi ngược dòng là $x-2$ km/h.

Thời gian tàu tuần tra khi ngược dòng là $\frac{48}{x-2}$ giờ.

Do thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 1 giờ nên ta có:

$$\frac{60}{x+2}+\frac{48}{x-2}=1 \Leftrightarrow x^2-12x-220=0 \Leftrightarrow (x-6)^2=256 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-6=16 \\ x-6=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=22 \\ x=-10\ (loai) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc tàu tuần tra khi nước yên lặng là 22 km/h.

Bài 2: Lúc 6 giờ 30 sáng, một ca nô xuôi dòng từ A đến B dài 48 km. Khi đến B, ca nô nghỉ 30 phút sau đó lại ngược dòng từ B đến A lúc 10 giờ 36 phút cùng ngày. Tìm vận tốc riêng của ca nô biết vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Lời giải:

	Vận tốc	Quãng đường	Thời gian
Lúc đi	$x+3$	48	$\frac{48}{x+3}$
Lúc về	$x-3$	48	$\frac{48}{x-3}$

Theo đề bài tổng thời gian cả đi và về của ca nô là:

$$10 \text{ giờ } 36 \text{ phút} - 6 \text{ giờ } 30 \text{ phút} = 4 \text{ giờ } 6 \text{ phút} = \frac{41}{10} \text{ giờ.}$$

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h), x > 3.

Vận tốc ca nô lúc xuôi dòng là $x+3$ km/h.

Thời gian ca nô lúc xuôi dòng là $\frac{48}{x+3}$ giờ.

Vận tốc ca nô lúc ngược dòng là $x-3$ km/h.

Thời gian ca nô lúc ngược dòng là $\frac{48}{x-3}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{48}{x+3}+\frac{48}{x-3}+\frac{1}{2}=\frac{41}{10} \Leftrightarrow \frac{48}{x+3}+\frac{48}{x-3}=\frac{18}{5} \Rightarrow 48\left(x-3\right).5+48\left(x+3\right).5=18\left(x+30\right)\left(x-30\right)$$

$$\Leftrightarrow 240x-720+240x+720=18x^2-162 \Leftrightarrow 18x^2-480x-162=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=27 \\ x=\frac{-1}{3}\ (loai) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 27 km/h.

DẠNG 2: TOÁN NĂNG SUẤT

Phương pháp giải: Năng suất là lượng công việc làm được trong một đơn vị thời gian.

Tổng lượng công việc = năng suất . thời gian

Bài 1: Một phân xưởng theo kế hoạch cần sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng vượt mức 5 sản phẩm nên xưởng đó đã hoàn thành kế hoạch sơm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch thì mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải:

	Số sản phẩm/ngày	Tổng số sản phẩm	Số ngày sản xuất
Dự định	x	1100	$\frac{1100}{x}$
Kế hoạch	$x+5$	1100	$\frac{1100}{x+5}$

Gọi số sản phẩm săn xuất được trong 1 ngày theo kế hoạch là x, $x \in \mathbb{N}^*$.

Số ngày phân xưởng sản xuất theo kế hoạch là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày).

Thự tế số sản phẩm sản xuất được trong 1 ngày là x + 5 (sản phẩm).

Số ngày phân xưởng sản xuất thực tế là $\frac{1100}{x+5}$ (ngày).

Do phân xưởng hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày nên ta có:

$$\frac{1100}{x}-\frac{1100}{x+5}=2 \Rightarrow 1100x+5500-1100x=2x\left(x+5\right) \Leftrightarrow 2x^2+10x-5500=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=50 \\ x=-55 \end{array}\right.$$

Vậy số sản phẩm sản xuất được trong 1 ngày theo kế hoạch là 50 sản phẩm.

Bài 2: Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở 60 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành có 3 xe phải làm việc khác nên không tham gia chở hàng. Vì vậy mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng. Tính số xe dự định của đội đó, biết mỗi xe chở khối lượng hàng như nhau.

Lời giải:

	Số hàng chở	Số xe	Số hàng/ xe
Dự định	60	x	$\frac{60}{x}$
Thực tế	60	$x-3$	$\frac{60}{x-3}$

Gọi số xe chở hàng theo dự định là x (xe), $x > 3, x \in \mathbb{N}$.

Theo dự định mỗi xe chở số hàng là $\frac{60}{x}$ (tấn).

Thực tế số xe tham gia chở hàng là x – 3 xe, mỗi xe chở số hàng là $\frac{60}{x-3}$ (tấn).

Do thực tế mỗi xe chở nhiều hơn 1 tấn hàng nên ta có:

$$\frac{60}{x-3}-\frac{60}{x}=1 \Rightarrow 60x-60+180=x^2-3x \Leftrightarrow x^2-3x-180=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=15 \\ x=-12 \end{array}\right.$$

Vậy theo kế hoạch mỗi xe chở 15 tấn hàng.

Bài 3: Một người thợ làm 120 sản phẩm trong một thời gian với năng suất dự định. Khi làm được 50 sản phẩm, người thợ đó nhận thấy làm với năng suất như vậy sẽ thấp hơn năng suất dự định là 2 sản phẩm 1 ngày. Do đó để hoàn thành đúng thời gian đã định, người thợ đó tăng năng suất thêm 2 sản phẩm một ngày so với dự định. Tính năng suất dự định của người thợ đó.

Lời giải:

	Số sản phẩm/ ngày	Số ngày	Tổng sản phẩm
Dự định	x	$\frac{120}{x}$	120
Thực tế	$x-2$	$\frac{50}{x-2}$	50
	$x+2$	$\frac{70}{x+2}$	70

Gọi số sản phẩm mỗi ngày người thợ làm theo dự định là x, x > 2.

Số ngày hoàn thành công việc theo dự định là $\frac{120}{x}$ (ngày).

Trong 50 sản phẩm đầu mỗi ngày người đó làm được x – 2 sản phẩm nên số ngày làm 50 sản phẩm đầu là $\frac{50}{x-2}$ ngày.

Trong 50 sản phẩm đầu mỗi ngày người đó làm được x + 2 sản phẩm nên số ngày làm 70 sản phẩm đầu là $\frac{70}{x+2}$ ngày.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{50}{x-2}+\frac{70}{x+2}=\frac{120}{x} \Rightarrow 120x^2-40x=120x^2-480 \Leftrightarrow x=12$.

Vậy số sản phẩm mỗi ngày người thợ làm được theo dự định là 12 sản phẩm.

DẠNG 3: TOÁN LÀM CHUNG CÔNG VIỆC

Bài 1: Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu họ làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người cần bao nhiêu giờ thì xong công việc.

Lời giải:

Gọi thời gian người I và II làm một mình xong công việc là x (giờ) và y (giờ), x < y, x, y > 0.

Trong 1 giờ, người I làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người II làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Do hai người làm chung công việc trong 6 giờ thì xong nên ta có: $6.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\ (1)$

Do nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai 5 giờ nên ta có: $y-x=5 \Leftrightarrow y=5+x$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{5-x}=\frac{1}{6} \Rightarrow 6\left(5+x+x\right)=x^2+5x \Leftrightarrow x^2+5x=30+12x \Leftrightarrow x^2-7x-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Với x = 10 ta có y = 15.

Vậy nếu làm riêng người I cần 10 giờ, người II cần 15 giờ để hoàn thành công việc.

Bài 2: Hai vòi cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hãy tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải:

Gọi thời gian vòi I và II chảy một mình đầy bể là x và y (giờ), x, y > 0.

Trong 1 giờ, vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Đổi: 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ giờ.

Do hai vòi cung chảy thì sau $\frac{4}{3}$ giờ đầy bể nên ta có: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).\frac{4}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}\quad (1)$.

Do nếu chảy một mình thì vòi I chảy đầy bể nhanh hơn vòi II là 2 giờ nên ta có: $y-x=(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4} \\ y-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{2+x}=\frac{3}{4}\ (3) \\ y=2+x\ (4) \end{array}\right.$.

Từ (3) $\Rightarrow 8+4x+4x=32\left(2+x\right) \Leftrightarrow 8+8x=3x^2+6x \Leftrightarrow 3x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-4}{3} \\ x=2 \end{array}\right.$

Với x = 2 thay vào (4) ta được y = 4.

Vậy nếu chảy một mình thì thời gian vòi I và II chảy đầy bể lần lượt là 2 giờ và 4 giờ.

DẠNG 4: TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Bài 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 25 m và độ dài đường chéo bằng 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật.

Lời giải:

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x và y (m), x > y > 0.
Do chu vi hình chữ nhật là 25 m nên ta có x + y = 14 (1).
Do độ dài đường chéo là 10 nên ta có $x^2 + y^2 = 10\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - y\ (3) \\ x^2 + y^2 = 10\ \ (4) \end{cases}$.

Thay (3) vào (4) ta được:

$$\left(14 - y\right)^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow 196 - 28y + y^2 + y^2 = 100 \Leftrightarrow 2y^2 - 28y + 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 8 \\ y = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 8 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được x = 8 và y = 6.
Vậy chiều dài và chiều rộng lần lượt là 8 m và 6 m.

Bài 2: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 200 m. Sau khi người ta làm một lối đi 2 m xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) thì phần đất còn lại để trồng cây là hình chữ nhật có diện tích 2016 m^2. Tính các kích thước của khu vườn ban đầu.

Lời giải:

	Chiều dài	Chiều rộng	Diện tích	Chu vi
Ban đầu	x	y	xy	x + y = 100
Lúc sau	$x - 4$	$y - 4$	$\left(x - 2\right)\left(y - 2\right)$	

Gọi chiều dài và chiều rộng ban đầu của khu vườn là x và y (m), x > y > 0.
Do chu vi hình chữ nhật là 200 m nên $x + y = 100\ \ (1)$.

Do chiều dài và chiều rộng giảm đi 2 m sau khi làm đất nên ta có:

$$\left(x - 4\right)\left(y - 4\right) = 2016 \Leftrightarrow xy - 4x - 4y = 2000\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 100 \\ xy - 4\left(x + y\right) = 2000\ \ (*) \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \left(100 - y\right).y - 4.100 - 2000 = 0 \Leftrightarrow -y^2 + 100y - 2400 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 60 \\ y = 40 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = 60 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có x = 60, y = 40 thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy chiều dài và chiều rộng khu vườn lần lượt là 60 m và 40 m.

III. Bài tập

1. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Bài 1: Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 20 km/h thì đến B sớm hơn 1 giờ so với dự định, nếu vận tốc giảm đi 10 km/h thì đến B muộn hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Bài 2: Một ca nô chạy trên một khúc sông, xuôi dòng 20 km rồi ngược dòng 18 km hết 1 giờ 25 phút. Lần khác, ca nô đó đi xuôi dòng 15 km rồi ngược dòng 24 km thì hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của dòng nước, biết các vận tốc đó không đổi.

Bài 3: Để hoàn thành một công việc theo dự định thì cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định. Nếu tăng thêm 10 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 2 ngày. Nếu bớt đi 10 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày nữa mới hoàn thành công việc. Hỏi theo dự định thì cần bao nhiêu công nhân và làm trong bao nhiêu ngày?

Bài 4: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 4 giờ 30 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ và người thứ hai làm một mình trong 2 giờ thì tổng số học làm được 50% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình thì trong bao lâu sẽ xong?

Bài 5: Hai người thợ cùng làm một công việc thì sau 2 giờ 40 phút sẽ hoàn thành. Nếu người thứ nhất làm mọt mình và 3 giờ sau người thứ hai cùng vào làm thì mất 40 phút nữa mới hoàn thành. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình thì trong mấy giờ sẽ xong?

Bài 6: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ đầy bể. Nếu mở vòi I trong 45 phút rồi khóa lại và mở vòi II trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{3}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng đầy bể trong bao lâu?

Bài 7: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 6 giờ đầy bể. Cùng chảy được 2 giờ thì khóa vòi I lại và vòi II phải chảy thêm 12 giờ nữa mới đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng đầy bể trong bao lâu?

Bài 8: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 14 và nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Bài 9: Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng tổng của chữ số hàng chục và hàng đơn vị là 12. Nếu thêm số 0 vào giữa hai chữ số thì ta được số mới có ba chữ số hớn hơn số ban đầu 180 đơn vị. Tìm số ban đầu.

Bài 10: Cho một só tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng hai chữ số của nó bằng . nếu lầy số đo chia cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 2 và dư 18. Tìm số ban đầu.

Bài 11: Theo kế hoạch, hai tổ sản xuất phải làm 700 sản phẩm. Nhưng do tổ I làm vượt mức 15% so với kế hoạch, tổ II làm vượt mức kế hoạch 20% nên hai tổ đã làm được 820 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Bài 12: Trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10, hai trường A và B có 840 học sinh đỗ vào lớp 10 công lập và đạt tỉ lệ thi đỗ là 90%. Riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%, riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi mỗi trường.

Bài 13: Một khu vườn hình chữ nhật. Nếu tăng mỗi cạnh thêm 4 m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm 216 m^2. Nếu chiều rộng tăng thêm 2 m và chiều dài giảm đi 5 m thì diên jtichs mảnh vườn giảm đi 50 m^2. Tính độ dài các cạnh của khu vườn.

Bài 14: Trong một phòng họp hình chữ nhật, ghế được sắp xếp theo hàng và số ghế trong mỗi hàng là như nhau. Nếu kê bớt đi 2 hàng và mỗi hàng

2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai

Bài 1: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi từ B về A người đó tăng vận tốc lên 4 km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

Bài 2: Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Bài 3: Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60 km trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được 30 km người đó đã dừng lại nghỉ 30 phút. Do đó, để đến B đúng thời gian dự định người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h. Tính vận tốc dự định của người đó

Bài 4: Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ thì ô tô bị chặn bởi xe cứu hỏa 10 phút. Do đó để đến B đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô.

Bài 5: một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cung một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Bài 6: Lúc 6 giờ 30 phút sáng, một ca nô xuôi dòng sông từ A đến B dài 48 km. Khi đến B, ca nô nghỉ 30 phút sau đó lại ngược dòng từ B về A lúc 10 giờ 36 phút cùng ngày. Tìm vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Bài 7: Một phân xưởng theo kế hoạch cần sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch thì mỗi ngày phân xưởng đó cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài 8: Một đội xe dự định dùng một số xe cung loại để chở 60 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành có 3 xe phải điều đi làm việc khác nên không thể tham gia chở hàng. Vì vậy mỗi xe còn ại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng. Tính số xe theo dự định của đội đó, biết mỗi xe chở khối lượng hàng như nhau.

Bài 9: Một tổ sản xuất phải làm 600 sản phẩm trong một thời gian quy định với năng suất như nhau. Sau khi làm được 400 sản phẩm, tổ đã tăng năng suất thêm mỗi ngày 10 sản phẩm, do đó đã hoàn thành công việc sơm hơn 1 ngày. Tính số sản phẩm làm trong mỗi ngày theo quy định.

Bài 10: Một người thợ làm 120 sản phẩm trong một thời gian và năng suất dự định. Khi làm được 50 sản phẩm, người thợ đó nhận thấy làm với năng suất như vậy sẽ thấp hợ naưng suất dự định là 2 sản phẩm một ngày. Do đó để hoàn thành đúng thời gian đã định, người thợ đó tăng năng suất thêm 2 sản phẩm một ngày so với dự định tính năng suất dự định của người đó

Bài 11: Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu họ làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc nhanh hơn người thứ hai là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người cần bao nhiêu giờ để xong công việc đó?

Bài 12: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hãy tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài 13: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 m và độ dài đường chéo bằng 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

Bài 14: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 200 m. Sau khi người ta làm một lối đi rộng 2 m xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) thì phần đất còn lại để trồng cây là một hình chữ nhật có diện tích là 2016 m^2. Tính các kích thước của khu đất ban đầu.

CHUYÊN ĐỀ
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. Hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông

1. Lý thuyết

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó:

$AB^2 = BH.CH$ hay $c^2 = ac'$

$AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$

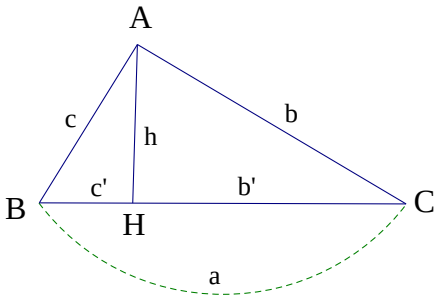
$AB.AC = AH.BC$ hay $bc = ah$

$AH^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$

$AB.AC = AH.BC$ hay $cb = ah$

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ĐL Pytago)



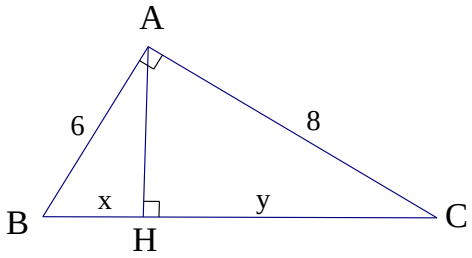
2. Bài tập

DẠNG 1. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

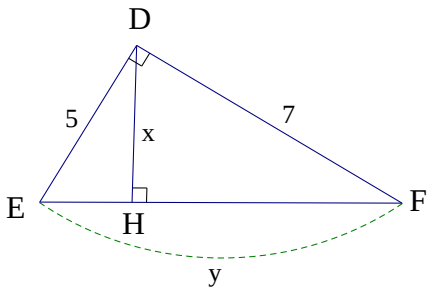
Phương pháp giải:

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Nếu biết độ dài 2 trong 6 đoạn thẳng AB, AC, BC, AH, BH, CH thì ta luôn tính được độ dài các đoạn thẳng còn lại.

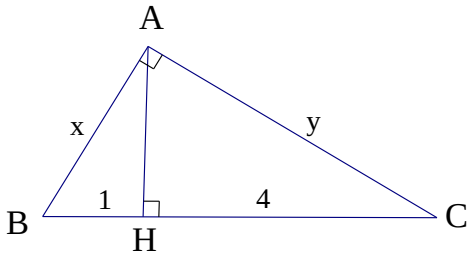
Bài 1. Tìm x, y trong mỗi hình sau:



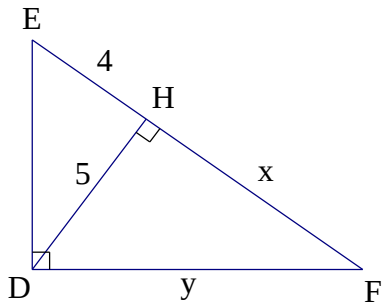
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết AB = 3cm, AC = 4cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH, CH, AH và BC.

b) Biết BH = 9cm, CH = 16cm. Tính độ dài đoạn thẳng AB, AC, BC và AH.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, AH vuông góc với BC $(H \in BC)$. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và BC = 15cm.

a) Tính BH và CH.

b) Kẻ phân giác AD ($D \in BC$). Tính độ dài đoạn thẳng HD.

DẠNG 2. CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC LƯỢNG LIÊN QUAN ĐẾN TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải:

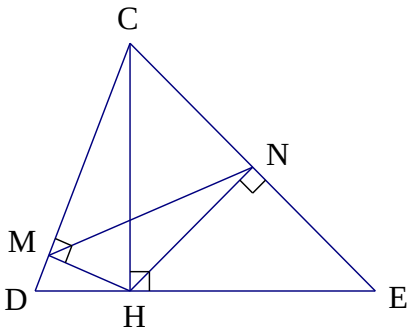
Sử dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao một cách hợp lí.

- B1: Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức.
- B2: Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao.
- B3: Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

Bài 1: Cho tam giác CDE nhọn, đường cao CH. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên CD, CE. Chứng minh:

a) $CD.CM = CE.CN$.

b) $\Delta CMN \# \Delta CED$.



Giải

a) Xét ΔCHD vuông tại H, đường cao MH có:

$CH^2 = CM.CD$ (1)

Tương tự $CH^2 = CN.CE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CM.CD = CN.CE$.

b) Theo phần a ta có $CM.CD = CN.CE \Leftrightarrow \frac{CM}{CE} = \frac{CN}{CD}$.

Xét ΔCMN và ΔCED có $\frac{CM}{CE} = \frac{CN}{CD}$, $\widehat{C}$ chung.

$\Rightarrow \Delta CMN \# \Delta CED$ (c-g-c)

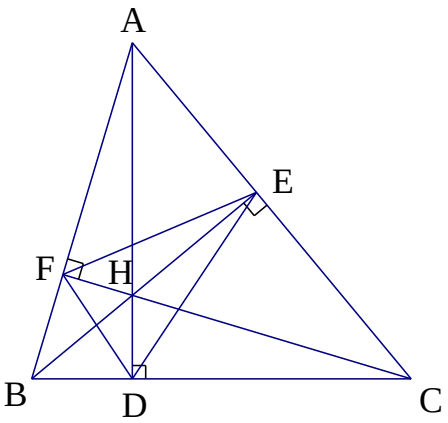
Bài 2: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Chứng minh:

a) $\Delta AFC \# \Delta AEB$.

b) $\Delta AEF \# \Delta ABC$.

c) H là giao các đường phân giác của ΔDEF.

d) $BH.BE + CH.CF = BC^2$.



Giải

a) Xét ΔAFC và ΔAEB có: góc A chung, $\widehat{AFC} = \widehat{AEB} = 90°$.

$\Rightarrow \Delta AFC = \Delta AEB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$.

b) Xét ΔAEF và ΔABC có: góc A chung, $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$.

$\Rightarrow \Delta AEF \# \Delta ABC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (1)

c) Chứng minh tương tự $\Delta CDE \# \Delta CAB \Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{CED}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{AEF}$ (*)

Mặt khác $\widehat{AEF} + \widehat{FEB} = \widehat{BED} + \widehat{DEC} = 90°$ (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BED} \Rightarrow$ EH là tia phân giác của $\widehat{FED}$.

Tương tự $\widehat{FHD} = \widehat{EHD} \Rightarrow$ DH là tia phân giác của $\widehat{FDE}$.

Vậy H là giao của các đường phân giác của ΔDEF.

d) Xét ΔBHD và ΔBCE có: góc B chung, $\widehat{BDH} = \widehat{BEC} = 90°$.

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BH.BE = BC.BD$ (1)

Tương tự $CH.CF = CD.BC$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $BH.BE + CH.CF = BC\left(BD + CD\right) = BC^2$.

Chú ý: Có thể đổi câu hỏi thành chứng minh $BH.BE + CH.CF$ có độ dài không đổi.

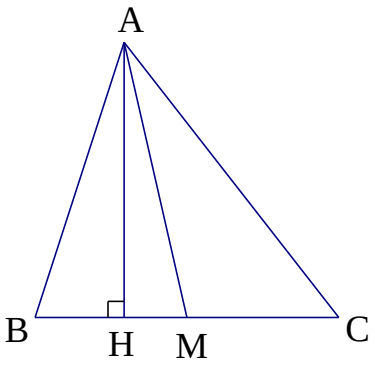
Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH.

a) Chứng minh $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$.

b) Vẽ trung tuyến AM của tam giác ABC. Chứng minh:

i) $AB^2 + AC^2 = \dfrac{BC^2}{2} + 2AM^2$.

ii) $AC^2 - AB^2 = 2BC.HM$ (với AC > AB).



Giải

a) Xét ΔABH vuông tại H, theo định lí Pytago ta có: $AH^2 = AB^2 - BH^2$ (1)

Xét ΔACH vuông tại H, theo định lí Pytago ta có: $AH^2 = AC^2 - HC^2$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2 \Leftrightarrow AB^2 + HC^2 = AC^2 + BH^2$.

b) Ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2$ (1)

$AH^2 = AC^2 - HC^2$ (2)

$\Rightarrow 2AH^2 = AB^2 + AC^2 - BH^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + \left(BM - HM\right)^2 + \left(HM + MC\right)^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BM^2 - 2BM.HM + HM^2 + HM^2 + 2HM.MC + MC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + 2MH^2 + BM^2 + MC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = \frac{BC^2}{2} + 2AM^2$.

Lấy (2) trừ (1) ta được:

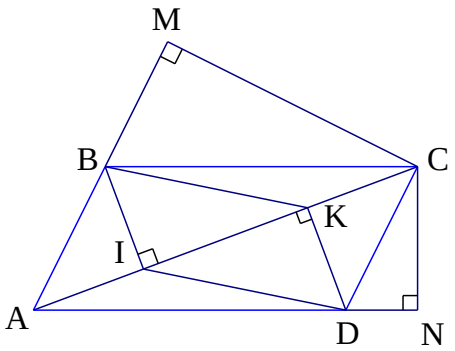
$AC^2 - AB^2 = HC^2 - BH^2 = \left(HC - BH\right)\left(HC + BH\right) = \left(HM + MC - BM + HM\right).BC = 2HM.BC$

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, D lên đường chéo AC. Gọi M, N là hình chiếu của C lên các đường thẳng AB, AD. Chứng minh:

a) AK = IC.

b) Tứ giác BIDK là hình bình hành.

c) $AC^2 = AD.AN + AB.AM$.



Giải

a) Xét ΔAKD và ΔCIB có:

$\widehat{AKD} = \widehat{CIB} = 90°$

$\widehat{KAD} = \widehat{ICB}$ (so le trong)

$BC = AD$ (2 cạnh đối hình bình hành)

$\Rightarrow \Delta AKD = \Delta CIB$ (g-c-g) $\Rightarrow AK = IC$.

b) Ta có: $BI \perp IK,\ KD \perp IK \Rightarrow BI \parallel KD$.

Xét tứ giác BIDK có $BI \parallel KD,\ BI = KD \Rightarrow$ BIDK là hình bình hành.

c) Xét ΔBIA và ΔDKC có: $\widehat{BIA} = \widehat{CKD} = 90°$

$BI = KD$ (cmt)

$AB = CD$ (ABCD là hình bình hành)

$\Rightarrow \Delta BIA = \Delta DKC$ (ch-cgv) $\Rightarrow AI = KC$ (*)

Chứng minh được $\Delta AKD \# \Delta ANC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AN} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD.AN = AK.AC$ (**)

Tương tự $\Delta ABI \# ACM$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AI}{AM} \Rightarrow AB.AM = AC.AI$ (***)

Từ (**) và (***) ta có $AD.AN + AB.AM = AC\left(AK + AI\right)$.

Mà $AI = KC \Rightarrow AD.AN + AB.AM = AC\left(AK + KC\right) = AC.AC = AC^2$.

II. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

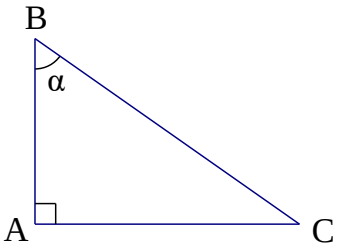
1. Định nghĩa

Cho góc nhọn α $(0° < \alpha < 90°)$. Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$.

Từ đó ta có:

$\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$

$\tan\alpha = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad$ $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC}$



2. Tính chất

Với góc nhọn α bất kì ta luôn có:

- $0 < \sin\alpha < 1,\ 0 < \cos\alpha < 1.$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha},\ 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}.$
- $\sin\alpha = \cos\left(90° - \alpha\right),\ \cos\alpha = \sin\left(90° - \alpha\right).$

II. Bài tập

TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN, TÍNH CẠNH, TÍNH GÓC

Phương pháp giải: Sử dụng lí thuyết đã tóm tắt.

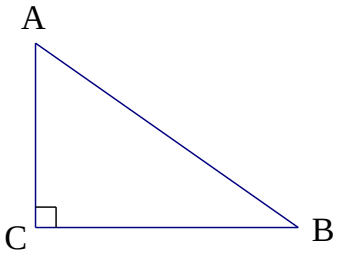
Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại C có $BC = 1,2cm;\ AC = 0,9cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Giải

Xét ΔABC vuông tại C, áp dụng ĐL Pytago ta có:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 1,2^2 + 0,9^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{2}\ cm$.

Ta có:



$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{10} : \frac{3}{2} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{3}{5}.$

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}.$

$\tan B = \frac{9}{10} : \frac{12}{10} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot A = \frac{3}{4}..$

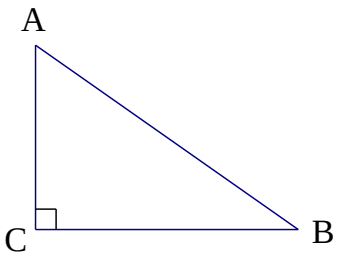
$\cot B = \frac{12}{10} : \frac{9}{10} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan A = \frac{4}{3}.$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5},\ BC = a\sqrt{3},\ AC = a\sqrt{2}.$

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

b) Tính tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Giải



a) Ta có: $AB^2 = 5a^2,\ BC^2 + AC^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2.$

Theo ĐL Pytago đảo tam giác ABC vuông tại C.

b) Ta có:

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{10}}{5}.$

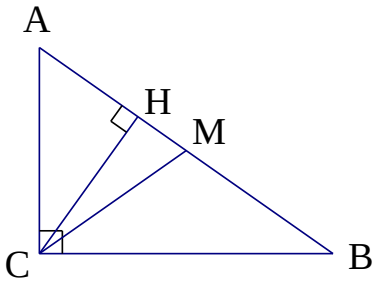
$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{15}}{5}.$

$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \cot A = \frac{\sqrt{6}}{3}..$

$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \tan A = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại, AB = 6, $\tan B = \frac{5}{12}$. Tính độ dài đường cao AH và trung tuyến AM của tam giác ABC.

Giải



$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{12} \Rightarrow AC = AB.\frac{5}{12} = 6.\frac{5}{12} = 2,5$.

Xét ΔABC vuông tại A đường cao AH có:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{2,5^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{169}{900} \Rightarrow AH = \frac{30}{13},\ BH = \frac{72}{13}$.

Theo ĐL Pytago ta có BC = 6,5.

Do M là trung điểm của BC $\Rightarrow BM = MC$.

Do AB = 6, AC = 2,5 $\Rightarrow BH > HC$.

Ta có: $HM = BH - BM = \frac{119}{52}$.

Bài 4: Cho góc nhọn α. Tính $\sin\alpha,\ \cot\alpha,\ \tan\alpha$, biết $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

Giải

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sqrt{6}$.

$\cot\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Bài 5: Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \cos^2 52°.\sin 45° + \sin^2 52°.\cos 45°$

b) $B = \tan 60°.\cos^2 47° + \sin^2 47°.\cot 30°$

c) $C = \cos^2 20° + \cos^2 30° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60° + \cos^2 70°$

d) $D = \tan 1°.\tan 2°.\tan 3°...\tan 89°$

Giải

a) $A = \cos^2 32°.\sin 45° + \sin^2 52°.\cos 45°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 52° + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 52°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2 52° + \sin^2 52°\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $B = \tan 60°.\cos^2 47° + \sin^2 47°.\cot 30°$

$= \sqrt{3}.\cos^2 47° + \sin^2 47°.\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}.\left(\cos^2 47° + \sin^2 47°\right) = \sqrt{3}$

c) $C = \cos^2 20° + \cos^2 30° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60° + \cos^2 70°$

$= \sin^2 70° + \sin^2 60° + \sin^2 50° + \cos^2 50° + \cos^2 60° + \cos^2 70°$

= 1 + 1 + 1 = 3

d) $D = \tan 1°.\tan 2°.\tan 3°...\tan 89°$

$= \cot 89°.\cot 88°...\tan 45°.\tan 46°...\tan 89° = 1$

III. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

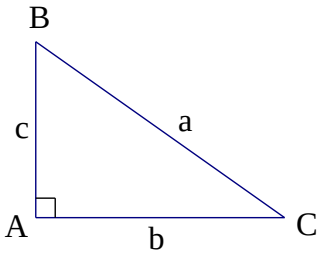
1. Lý thuyết

$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\sin B,\ a = \frac{b}{\sin B}$

$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos B,\ a = \frac{c}{\cos B}$

$\tan B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c\tan B,\ c = \frac{b}{\tan B}$

$\cot B = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b\cot B,\ b = \frac{c}{\cot B}$



Trong tam giác vuông:

cạnh góc vuông = cạnh huyền x sin góc đối = cạnh huyền x cos góc kề

cạnh góc vuông = cạnh góc vuông còn lại x tan góc đối = cạnh góc vuông còn lại x cot góc kề

Chú ý: Giải tam giác là tìm tất cả các cạnh và góc chưa biết của tam giác đó.

2. Bài tập

DẠNG 1. GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải: Sử dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi BC = a, AC = b, AB = c. Giải tam giác ABC biết:

a) b = 10, $\widehat{C} = 30°$.

b) a = 15, b = 10.

c) a = 20, $\widehat{B} = 35°$.

d) b = 12, c = 7.

Giải

a) Do tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 30° \Rightarrow \widehat{B} = 60°$.

Theo hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc ta có:

$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{10}{\sin 60°} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

$c = a\cos B = 20.\cos 60° = 10$.

b) Do tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 35° \Rightarrow \widehat{C} = 55°$.

Ta có: $b = a\sin B = 20\sin 35° = 11,47$

$c = a\cos B = 20\cos 35° = 16,38$.

c) Do tam giác ABC vuông tại A nên theo ĐL Pytago ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 15^2 - 10^2 = 125 \Rightarrow c = 15$.

Ta có: $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{B} = 41°48'$.

$\widehat{C} = 90° - 41°48' = 48°12'$.

d) Do tam giác ABC vuông tại A theo ĐL Pytago ta có: $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193}$.

$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{7} \Rightarrow \widehat{B} = 59°44'$.

$\widehat{C} = 90° - 59°44' = 30°15'$.

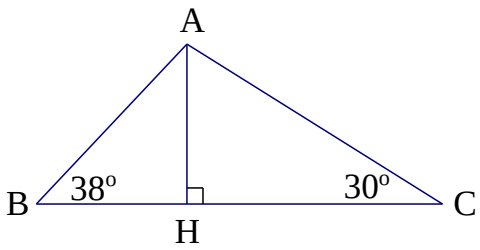
DẠNG 2. TÍNH CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC

Phương pháp giải: Làm xuất hiện tam giác vuông xuất hiện hệ thức giữa cạnh và đường cao.

Bài 1: Cho tam giác ABC có BC = 11, $\widehat{ABC} = 38°$ và $\widehat{ACB} = 30°$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC. Hãy tính

a) độ dài AN. b) độ dài AC.

Giải



a) Đặt BN = x $\Rightarrow$ NC = 11 – x.

Xét tam giác ANB vuông tại N có $\tan ABN = \dfrac{AN}{BN} \Rightarrow AN = x\tan 38°$ (1)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x.0,78 = 0,58.\left(11 - x\right) \Leftrightarrow 0,78x = 6,38 - 0,58x \Leftrightarrow x = 4,69$.

$\Rightarrow AN = 4,69.\tan 38° = 3,67$

Ta có $AC = \sqrt{AN^2 + NC^2} = \sqrt{3,67^2 + 6,31^2} = 7,3$.

Bài 2: Cho tam giác ABC có BC = 6, $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{C} = 40°$. Hãy tính

a) chiều cao CH và AC.

b) diện tích tam giác ABC.

Giải

a) Xét ΔBHC, theo hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc ta có:

$\sin B = \dfrac{HC}{BC} \Rightarrow HC = 6\sin 60° = 3\sqrt{3}$.

Ta có: $\widehat{A} = 80°$, $\sin A = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{HC}{\sin 80°} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 80°} = 5,27$.

b) $\cos B = \dfrac{HB}{BC} \Rightarrow HB = BC.\cos B = 6.\cos 60° = 3$.

$\cos A = \dfrac{HA}{AC} \Rightarrow HA = AC.\cos A = 5,27.\cos 80° = 0,91$.

$\Rightarrow AB = 3 + 0,91 = 3,91$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.HC = \dfrac{1}{2}.3,91.3\sqrt{3} = 10,2$.

DẠNG 3. TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Bài 1: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng $42°$. Tính chiều cao cột đèn.

Giải

Đặt chiều cao cột đèn là AB, chiều dài bóng là AC = 7,5m.

Góc tạo bởi tia nắng và mặt đất là $\widehat{ACB} = 42°$.

Xét tam giác ABC vuông tại A:

$\tan ACB = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \tan ACB = 7,5 \tan 42° = 6,7\ (m)$.

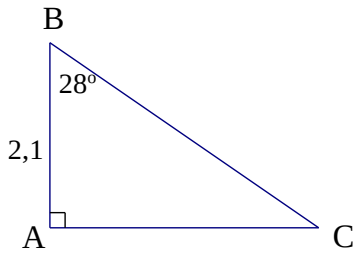
Bài 2: Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là $28°$ và có độ cao là 2,1m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến số thập phân thứ nhất).

Giải

Tương tự bài 1 ta có:

$\cos ABC = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow BC = AB \cos 28° = 1,9m$



DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Phương pháp giải: Vận dụng linh hoạt các hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao, cạnh và góc trong tam giác vuông.

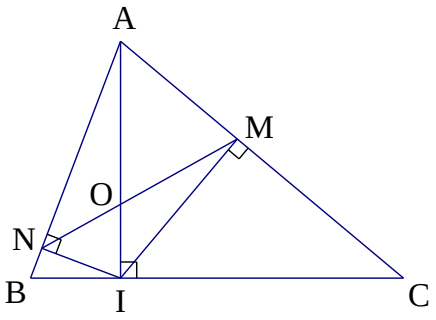
Bài 1: Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AI. Gọi N là hình chiếu của I lên AB.

a) Biết AN = 3,6; BN = 6,4. Tính AI, NI.

b) Kẻ IM vuông góc với AC tại M. Chứng minh $AB.AN = AC.AM$.

c) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN cắt BC tại D, MN cắt AI tại O. Chứng minh $\dfrac{S_{AON}}{S_{ADC}} = \sin^2 B.\sin^2 C$.

Giải



Ta có $\Delta AMN \# \Delta ACB\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ANO} = \widehat{ACD}$ (hai góc tương ứng)

Gọi $K = AD \cap NM$ ta có $\widehat{NAK} + \widehat{ANK} = 90°,\ \widehat{IAM} + \widehat{ICA} = 90° \Rightarrow \widehat{NAK} = \widehat{OAM}$.

Mà $\widehat{NAK} = \widehat{NAO} + \widehat{OAK},\ \widehat{OAM} = \widehat{OAK} + \widehat{KAM}$

$\Rightarrow \widehat{NAO} = \widehat{KAM}$

Xét ΔNAO và ΔCAD có $\widehat{NAO} = \widehat{CAD},\ \widehat{ANO} = \widehat{ACD}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta NAO \# \Delta CAD\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{S_{NAO}}{S_{CAD}} = \left(\dfrac{NA}{CA}\right)^2 = \left(\dfrac{NA}{AI}.\dfrac{AI}{AC}\right)^2 = \cos^2 NAI.\sin^2 C = \sin^2 B.\sin^2 C$.

Bài 2: Cho tam giác MNP vuông tại M (MN < MP) có đường cao MH ($H \in BC$). Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của H trên MN và NP.

a) Giả sử HN = 1,8; HP = 3,2. Tính HM, MP, $\widehat{N}, \widehat{P}$.

b) Chứng minh $MI.MN = MK.MP$ và $HN.HP = MI.IN + MK.PK$.

c) Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IK cắt NP tại D. Chứng minh D là trung điểm của NP.

Giải

b) Xét ΔMHN vuông tại H đường cao HI có $MI.MN = MH^2$ (1)

Xét ΔHMP có HK là đường cao có $MK.MP = MH^2$ (2)

Từ (1) (2) ta có $MI.MN = MK.MP$.

Vì ΔMNP vuông tại M đường cao MH có $NH.HP = MH^2$ (*)

Ta có $MI.IN = IH^2, MK.PK = HK^2$.

Chứng minh được IHKM là hình chữ nhật nên $IK = MH$ (**)

Theo ĐL Pytago $IH^2 + HK^2 = IK^2$ (***)

Từ (*)(**)(***) suy ra đpcm.

c) Ta có $\Delta MIK \# \Delta MPN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MPN}, \widehat{MKI} = \widehat{MNP}$ (hai góc tương ứng)

Gọi $J = MN \cap IK$.

Ta có $\widehat{IMJ} + \widehat{MIJ} = 90°, \widehat{IMJ} + \widehat{JMK} = 90°$.

$\Rightarrow \widehat{JMK} = \widehat{MPD} \Rightarrow \Delta DMP$ cân tại D $\Rightarrow DM = DP$ (*0

Ta có $\widehat{MIJ} + \widehat{JMI} = 90°, \widehat{MIJ} + \widehat{MKI} = 90° \Rightarrow \widehat{JMI} = \widehat{MKI} = \widehat{MND}$

$\Rightarrow \Delta DMN$ cân tại D $\Rightarrow DM = DN$ (**)

Từ (*) (**) $\Rightarrow DN = DP$.

Vậy D là trung điểm của NP.

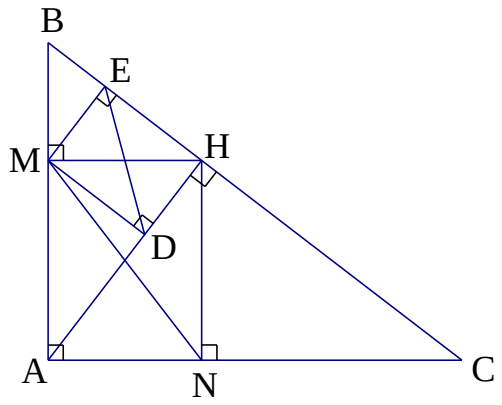
Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết AB = 3, BC = 5. Tính độ dài BH, CH, AH.

b) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC. Chứng minh $AM.AB = AN.AC$, từ đó suy ra $\Delta AMN \# \Delta ABC$.

c) Kẻ $MD \perp AH$ tại D, kẻ $ME \perp BH$ tại F. Chứng minh $DE^3 = BE.AD.AB$.

Giải



c) Ta có $MB^2 = BE.BH$ (1), $MA^2 = AD.AH$ (2)

Nhân (1) với (2) ta có:

$MB^2.MA^2 = BE.BH.AD.AH$

$\Rightarrow MH^4 = BE.AD.MH.AB$

$\Rightarrow MH^3 = BE.AD.AB$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC) có đường cao AH. Gọi AD là tia phân giác của góc HAB.

a) Tính AH, AC biết HB = 18, HC = 8.

b) Chứng minh tam giác ADC cân tại C và $\frac{DH}{BD} = \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BC}$.

c) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh $S_{AEF} = S_{ABC}\left(1 - \cos^2 B\right).\sin^2 C$

Giải

b) Xét ΔCAD có $\widehat{HAD} + \widehat{HDA} = 90°, \widehat{CAD} + \widehat{DAB} = 90°$.

Mà $\widehat{DAB} = \widehat{DAH} \Rightarrow \widehat{CDA} = \widehat{CAD} \Rightarrow \Delta CAD$ cân tại C.

Do AD là tia phân giác của góc HAD nên $\frac{DH}{DB} = \frac{AH}{AB}$ (1)

Xét ΔAHC và ΔBAC có $\widehat{C}$ chung, $\widehat{AHC} = \widehat{BAC} = 90°$

$\Rightarrow \Delta AHC \# \Delta BAC\ (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BC} = \frac{DH}{DB}$.

c) Ta có

$$\Delta AEF \# \Delta ACB\ (c.g.c) \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ACB}} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 = \left(\frac{EF}{AC}.\frac{AC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{EF}{AC}\right)^2.\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AH}{AC}\right)^2.\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$
$$= \sin^2 C.\sin^2 B = \left(1 - \cos^2 B\right)\sin^2 C$$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH = 4, CH = 9.

a) Tính AH, AB, AC.

b) Gọi M là trung điểm của AC. Tính $\widehat{BMC}$.

c) Kẻ $AK \perp BM$ tại K. Chứng minh $\widehat{ACB} = \widehat{BKH}$.

Giải

c) Ta có $AB^2 = BH.BC,\ AB^2 = BK.BM$.

Xét ΔBKH và ΔBCM có $BH.BC = BK.BM \Rightarrow \frac{BH}{BM} = \frac{BK}{BC}$, $\widehat{B}$ chung

$\Rightarrow \Delta BKH \# \Delta BCM\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{BCM}$ (hai góc tương ứng)

III. Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM.

a) Biết BC = 10, BH = 3,6. Tính AB, AH và số đo các góc tam giác ABC>

b) Kẻ $BE \perp AM$ tại F, BF cắt AH tại D. Chứng minh $DM \parallel AC$ và $HD = DM\sin C$.

c) Lấy $K \in BF$ sao cho $\widehat{AKM} = 90°$. Chứng minh $S^2_{AMK} = S_{AMB}.S_{AMD}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tịa A, đường cao AH.

a) Tính BC, AH, HC và $\widehat{BCA}$ biết AB = 6, AC = 8.

b) Gọi E, F là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh $AB.AE = AC.AF$.

c) Kẻ FK vuông góc với BC ($K \in BC$). Chứng minh $FK = \dfrac{HC}{\cot B + \cot C}$.

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC, AB < AC, đường cao AD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC.

a) Biết AF = 3,6; FC = 6,4. Tính DF và S_{ADC}.

b) Chứng minh $\Delta AEF \# \Delta ACB$.

c) Chứng minh $\tan^3 C = \dfrac{BE}{CF}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Giả sử AB = 6, AC = 8. Tính BH, AH, $\widehat{ACB}$.

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh $AE.AB = AF.AC$ và $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.

c) Đường trung tuyến AI của tam giác ABC cắt EF tại K. Chứng minh rằng $\cos^2 B.\sin B = \dfrac{KF}{BC}$

.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ($H \in BC$).

a) Biết AB = 12, BC = 20. Tính AC, AH và $\widehat{ACB}$.

b) Kẻ $MH \perp AB$ tại M, $HN \perp AC$ tại N. Chứng minh $AN.AC = AC^2.HC^2$.

c) Chứng minh AH = MN và $AM.MB + AN.NC = AH^2$.

d) Chứng minh $\tan^3 C = \dfrac{BM}{CN}$.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH.

a) Cho AB = 6 và $\cos ABC = \dfrac{3}{5}$. Tính BC, AC, AH.

b) Kẻ $HD \perp AB$ tại D, $HE \perp AC$ tại F. Chứng minh $AB.AD = AE.AC$.

c) Gọi I là trung điểm của BC, AI cắt DE tại K. Chứng minh $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AE^2}$.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 3, AC = 4.

a) Giải tam giác ABC.

b) Gọi I là trung điểm của BC, vẽ $AH \perp BC$. Tính AH, AI.

c) Qua A kẻ đường thẳng xy vuông góc với AI. Đương thẳng vuông góc với BC tại B cắt xy tại tại M, đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt xy tại N. Chứng minh $MB.NC = \dfrac{BC^2}{4}$.

d) Gọi K là trung điểm của AH. Chứng minh B, K, N thẳng hàng.

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AB = 3, AC = 4.

a) Tính BC, AH, CH, BH.

b) Gọi M là trung điểm BC. Kẻ $BE \perp AM$ tại F, BE cắt AH tại D, BE cắt AC tại F. Chứng minh $BE.BF = BH.BC$.

c) Chứng minh $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BH}{CH}$ và D là trung điểm của BF.

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC), đường cao AH.

a) Chứng minh $\frac{AB^2}{BH} = \frac{AC^2}{CH}$.

b) Biết $\widehat{C} = 60°$, AC = 8, AB = 12. Giải tam giác HAB.

c) Kẻ AF là phân giác góc BAC. Chứng minh $S_{ACF} = \frac{1}{2}CF$ và $\frac{\sqrt{2}}{AF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

1. Biết AB = 6, BC = 10. Tính $\widehat{B}, \widehat{C}$, CH, AH.

2. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Chứng minh $AD.AB = AE.AC$.

b) Chứng minh $\Delta ABC \# \Delta AED$.

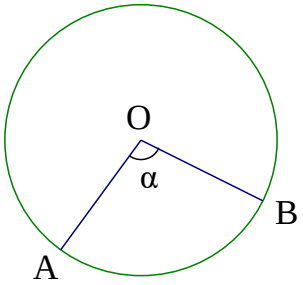
c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.

CHUYÊN ĐỀ
GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

I. Lý thuyết

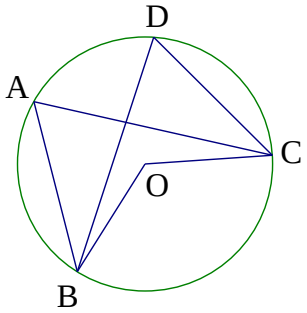
1. Góc ở tâm

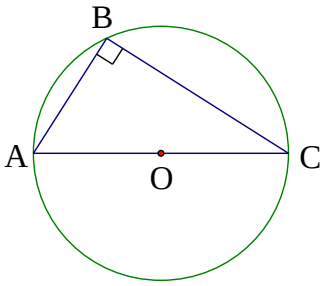
$\widehat{AOB} = sd\overset{\frown}{AB}$



2. Góc nội tiếp

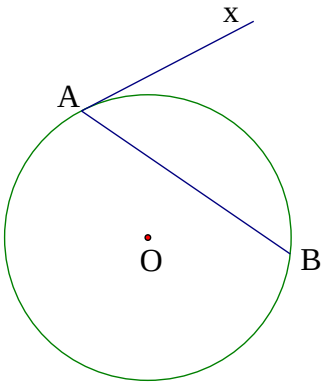
- $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{BC}$.
- $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{BC}$.
- $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{BOC}$.
- $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông).



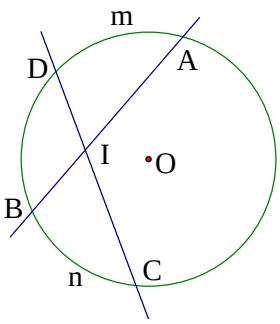


3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

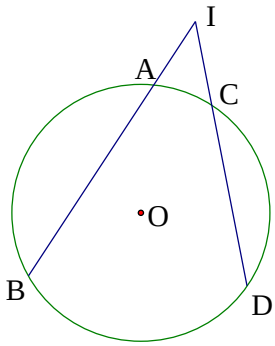
$\widehat{xAB} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{AB}$



4. Góc có đỉnh bên trong đường tròn, góc có đỉnh bên ngoài đường tròn



$$\widehat{OIA} = \frac{sd\overset{\frown}{OmA} + sd\overset{\frown}{BnC}}{2}$$

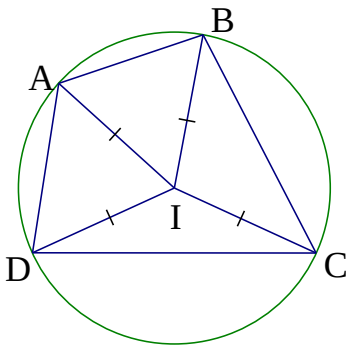


$$\widehat{BID} = \frac{sd\overset{\frown}{BD} - sd\overset{\frown}{AC}}{2}$$

DẠNG 1. TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Phương pháp giải:

- Cách 1: Chứng minh $\widehat{DAC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ hoặc $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.
- Cách 2: Chứng minh $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ hoặc $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.
- Cách 3: Chứng minh $IA = IB = IC = ID \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm I



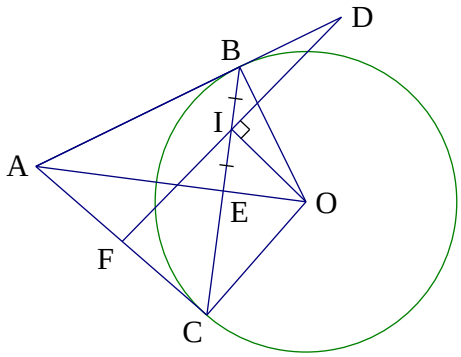
Bài 1: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với B, C là tiếp điểm. Gọi E là giao của OA và BC, I là trung điểm của BE. Đường thẳng đi qua I và vuông góc với OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D, F.

a) Chứng minh $OIBD, OIFC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác ODF cân.

c) Chứng minh F là trung điểm của AC.

Giải



a) Xét tứ giác $OIBD$ có $\widehat{OID} = 90^\circ$ (gt), $\widehat{OBD} = 90^\circ$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính)

$\Rightarrow \widehat{OID} = \widehat{OBD} \Rightarrow$ $OIBD$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $OIFC$ có $\widehat{OIF} = 90^\circ$ (gt), $\widehat{OCF} = 90^\circ$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính)

$\Rightarrow \widehat{OIF} + \widehat{OCF} = 180^\circ \Rightarrow$ $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $OB = OC = R \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (1)

Do $ODBI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ODI} = \widehat{OBI} = \frac{1}{2} sd\widehat{OI}$ (2)

Do $OIFC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OFI} = \widehat{OCI} = \frac{1}{2} sd\widehat{OI}$ (3)

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow \widehat{ODI} = \widehat{OFI} \Rightarrow \Delta ODF$ cân tại O.

c) Ta có ΔODE cân tại O có $OI \perp DF \Rightarrow I$ là trung điểm của OF.

I là trung điểm của $BE \Rightarrow BDFE$ là hình bình hành $\Rightarrow EF \parallel BD \Rightarrow EF \parallel AD$.

Ta có $AB = AC$ (2 tiếp tuyến cắt nhau), $OB = OC = R$

$\Rightarrow OA$ là trung trực của $BC \Rightarrow E$ là trung điểm của BC.

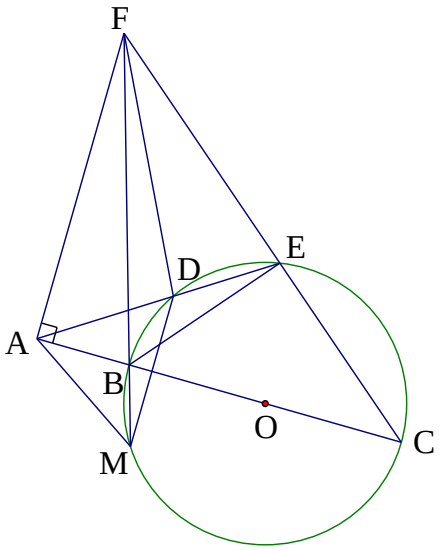
Xét ΔABC có E là trung điểm của $BC, FE \parallel AB$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của AC.

Bài 2: Cho đường tròn (O). Lấy điểm A nằm ngoài (O), đường thẳng OA cắt (O) tại hai điểm B và C, với $AB < AC$. Qua A vẽ đường thẳng không đi qua O cắt (O) tại hai điểm D và E với $AD < AE$. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng CE tại F. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng EF với (O).

a) Chứng minh $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác $AMDF$ là hình gì? Vì sao?



Giải

a) Ta có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{FAB} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{FAB} = 180^\circ \Rightarrow ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do từ giác $ABEF$ nội tiếp nên $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = \frac{1}{2} sd\widehat{AB}$ (1)

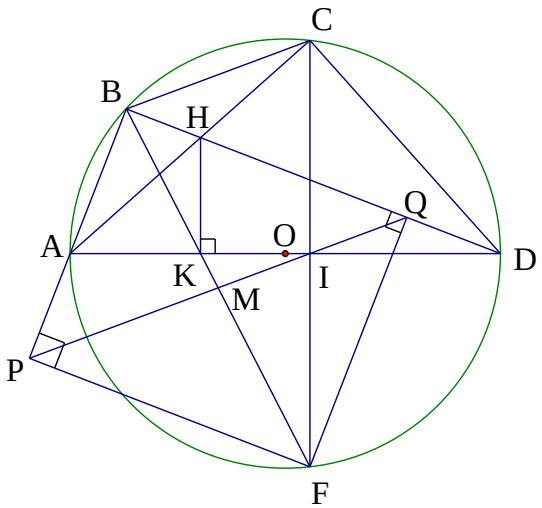
Xét (O) có $\widehat{BMD} = \widehat{BED} = \frac{1}{2} sd\widehat{BD} \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AFB} \Rightarrow AF \,//\, MD$.

Xét tứ giác $ADMF$ có $AF \,//\, MD \Rightarrow ADMF$ là hình thang.

Bài 3: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. B thuộc cung nhỏ AC. Gọi giao điểm của AC và BD là H. Kẻ HK vuông góc với AD tại K. Tia BK cắt (O) tại điểm thứ hai là F. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng AB, BD.

a) Chứng minh $ABHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CF \,//\, HK$ và PQ đi qua trung điểm của CF.



Giải

a) Ta có $\widehat{ABH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{HKA} = 90^\circ$ (gt).

Tứ giác $ABHK$ có $\widehat{ABH}+\widehat{AKH}=180^\circ$
$\Rightarrow ABHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do tứ giác $ABHK$ nội tiếp nên $\widehat{BAH}+\widehat{BKH}=\frac{1}{2}sd\widehat{BH}$.

Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{BAC}=\widehat{BFC}=\frac{1}{2}sd\widehat{BC}\Rightarrow\widehat{BKH}=\widehat{BFC}$.

Mà $\widehat{BKH}$ và $\widehat{BFC}$ so le trong nên $HK\ /\!/\ CF$.
Gọi $M=BF\cap PQ$ và $I=AQ\cap CF$.

Xét tứ giác $BQFP$ có $\widehat{BPQ}=90^\circ,\widehat{BPF}=90^\circ,\widehat{FQB}=90^\circ$

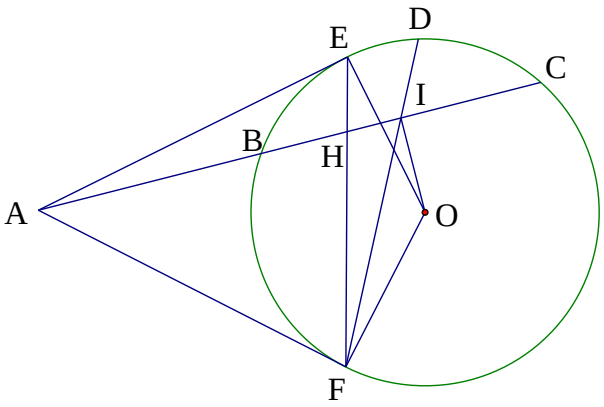
$\Rightarrow BQFP$ là hình chữ nhật $\Rightarrow M$ là trung điểm của BF.
Ta có $CF\perp AD$ (cùng song song với HK).
Do AD là đường kính nên AD là trung trực của $CF\Rightarrow D$ là điểm chính giữa cung CF.
Ta có $\widehat{CBD}=\widehat{DBF}$ (1)

Do $BPFQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KB=KO\Rightarrow\Delta BKQ$ cân tại $K\Rightarrow\widehat{KBQ}=\widehat{KQB}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow\widehat{KQB}=\widehat{CBQ}$.
Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow BC\ /\!/\ PQ$.
Xét ΔBCF có K là trung điểm $BF\Rightarrow KQ\ /\!/\ BC$
$\Rightarrow KQ$ đi qua trung điểm I của $CF\Rightarrow PQ$ đi qua trung điểm của CF.

Bài 4: Cho ba điểm A,B,C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) bất kì đi qua B và C sao cho BC không là đường kính của (O). Từ A kẻ các tiếp tuyến AE,AF đến (O) với E,F là các tiếp điểm. Gọi I là trung điểm của BC. Gọi D là giao điểm thứ hai của FI với (O), H là giao điểm của EF và AC. Chứng minh:

a) $AIOF$ là tứ giác nội tiếp.
b) $ED\ /\!/\ AC$.
c) $AH.AI=AB.AC$.



Giải

a) Ta có $\widehat{AIO}=90^\circ$ (đường kính đi qua trung điểm dây cung thì vuông góc với dây cung)
$\widehat{AFO}=90^\circ$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính).

Xét tứ giác $AIOF$ có $\widehat{AIO}+\widehat{AFO}=180^\circ \Rightarrow AIOF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do $AIOF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AIF}=\widehat{AOF}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AF}$ (*)

Do AE và AF là hai tiếp tuyến cắt nhau nên $\widehat{AOF}=\frac{1}{2}\widehat{EOF}$ (1)

$\widehat{EDF}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{EF}=\frac{1}{2}\widehat{EOF}$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow \widehat{AOF}=\widehat{EDF}$ (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \widehat{EDF}=\widehat{AIF}$.

Do hai góc này ở vị trí đồng vị nên $ED \,//\, AC$.

c) Xét ΔAEB và ΔACE có: $\widehat{E}$ chung, $\widehat{AEB}=\widehat{ACE}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{EB}$

$\Rightarrow \Delta AEB\# \Delta ACE\ (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AE} \Rightarrow AB.AC=AE^2$

Xét ΔAHF và ΔAFI có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{AIF}=\widehat{EDF}$, $\widehat{AIF}=\widehat{AFE}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{EF}$

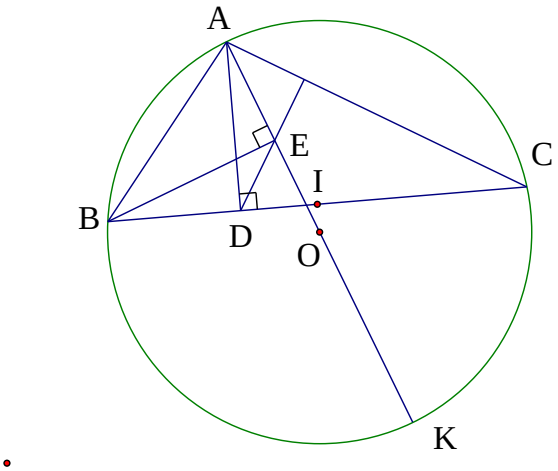
$\Rightarrow \Delta AHF\# \Delta AFI\ (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AF}=\frac{AF}{AI} \Rightarrow AF^2=AH.AI$

Do $AE=AF$ (hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow AH.AI=AB.AC$.

Bài 5: Cho (O), dây cung BC cố định khác đường kính. Gọi A là điểm bất kì trên cung nhỏ BC ($A\neq B, A\neq C, AB<AC$). Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC và E là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AK. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh:

a) $DE \perp AC$.

b) $\Delta IDE\# \Delta OAB$.



Giải

a) Ta có $\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=90^\circ \Rightarrow AEDB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABD}+\widehat{AED}=180^\circ, \widehat{ABD}=\widehat{EDK}$.

Xét (O) có $\widehat{ABD}=\widehat{ABC}=\widehat{AKC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{DEK}=\widehat{AKC}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow DE \parallel CK$.

b) Do $ABDE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAE}+\widehat{EDB}=180^\circ \Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{EDI}$

Xét tứ giác $CBEI$ có $\widehat{OEB}=\widehat{OIB}=90^\circ \Rightarrow OBEI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EOB}=\widehat{EIB}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{EB}$.

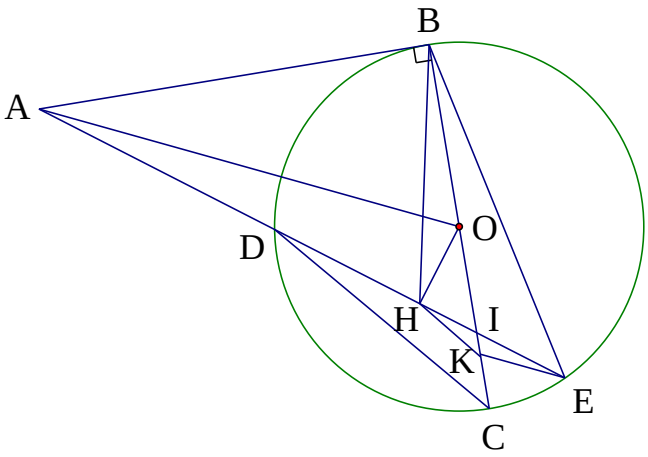
Xét ΔIDE và ΔOAB có $\widehat{IDE}=\widehat{BAD}, \widehat{EID}=\widehat{ADB}$

$\Rightarrow \Delta IDE \# \Delta OAB\ (g.g)$.

Bài 6: Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB và đường kính BC của (O) với B là tiếp điểm. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm I ($I \neq C, I \neq O$). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm đoạn thẳng DE. Đường thẳng d đi qua E và song song với OA, d cắt BC tại K. Chứng minh:

a) $ABOH$ nội tiếp.

b) $HK \parallel CD$.



Giải

a) Xét tứ giác $ABOH$ có $\widehat{ABO}+\widehat{AHO}=180^\circ$

$\Rightarrow ABOH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do $ABOH$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{OAH}=\widehat{OBH}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}$ (1)

Do $AB \parallel EK$ nên $\widehat{OAH}=\widehat{HEK}$ (so le trong) (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{HBK}=\widehat{HEK}$.

Xét tứ giác $HBEK$ có $\widehat{HBK}=\widehat{HEK} \Rightarrow HBEK$ là tứ giác nội tiếp.

Do $HBEK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KBE}=\widehat{KHE}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{KE}$ (*)

Xét (O) có $\widehat{EBC}=\widehat{EDC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{CE}$ (**)

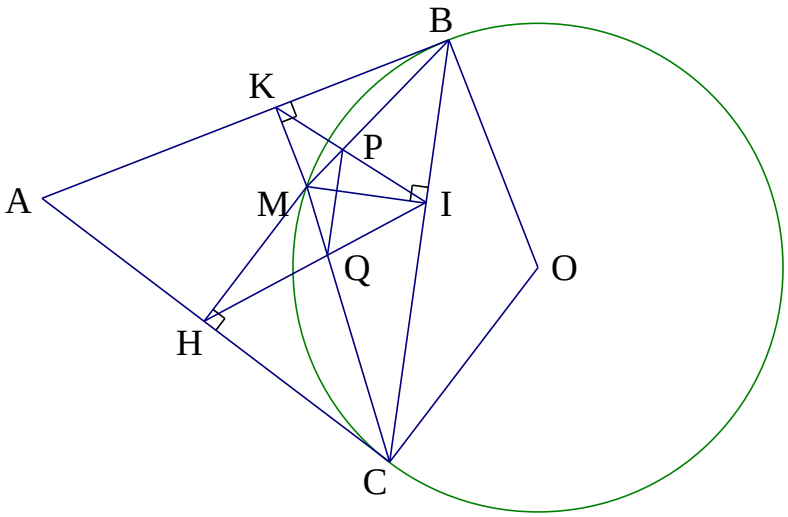
Từ (*)(**) $\Rightarrow \widehat{EHK} = \widehat{EDC}$, mà hai góc này so le trong $\Rightarrow HK \,//\, DC$.

Bài 7: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến $(O;R)$ với B, C là hai tiếp điểm. Trên cung nhỏ BC lấy điểm M khác B, C. Gọi I, K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, AB, AC. Gọi P là giao điểm của BM và IK, Q là giao điểm của CM và IH. Chứng minh:

a) $MIBK$ nội tiếp.

b) $MI^2 = MH.MK$.

c) $PQ \perp MI$.



Giải

a) Xét tứ giác $MKBI$ có $\widehat{MKB} + \widehat{MIB} = 180^\circ \Rightarrow MKBI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét tứ giác $HMIC$ có $\widehat{MHC} + \widehat{MIC} = 180 \Rightarrow HMIC$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MHI} = \widehat{MCI} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{MI}.$

Xét (O) có $\widehat{MCI} = \widehat{KBM} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{MB}.$

Do tứ giác $MKBI$ nội tiếp nên $\widehat{MBK} = \widehat{MIK} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{KM} \Rightarrow \widehat{KIM} = \widehat{MCI}.$

Tương tự $\widehat{MKI} = \widehat{MIQ}.$

Xét ΔMIH và ΔMKI có $\widehat{MIK} = \widehat{MCI}, \widehat{MKI} = \widehat{MIQ}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MIH \# \Delta MKI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MI}{MK} = \frac{MH}{MI} \Rightarrow MI^2 = MK.MH$.

c) Ta có $\widehat{PIM} = \widehat{BCM}, \widehat{MIQ} = \widehat{MBC}$.

Xét tứ giác $MPIQ$ có

$\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{PIM} + \widehat{MIQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{MBC} + \widehat{MCB} = 180^\circ$

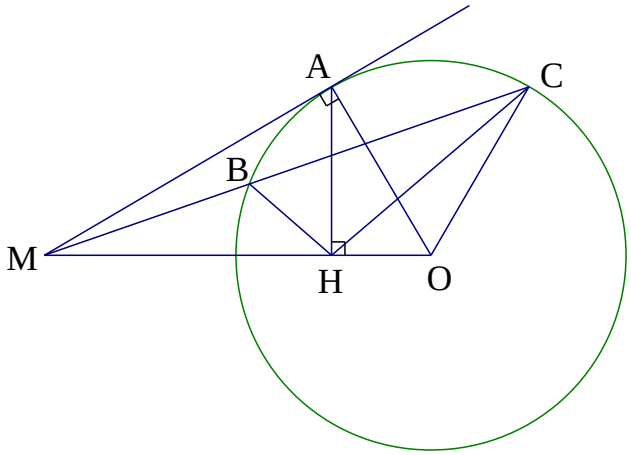
$\Rightarrow MPIQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MIC} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{MC}$.

Mà $\widehat{MIQ} = \widehat{MBQ} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MPQ}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow PQ \,//\, BC$.

Bài 8: Từ điểm M nằm ngoài (O), vẽ tiếp tuyến MA đến (O) với A là tiếp điểm, vẽ cát tuyến MBC sao cho $MB < MC$ và tia MC nằm giữa hai tia MA, MO. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên OM.

a) Chứng minh $BCOH$ tứ giác nội tiếp.

b) HA là tia phân giác của góc BHC.



Giải

a) Xét ΔMAO vuông tại A, đường cao MH.

Ta có $MA^2 = MH.MO$ (1)

Xét ΔMAB và ΔMCA có $\widehat{M}$ chung, $\widehat{MAB} = \widehat{MCA} = \frac{1}{2} sd\widehat{AB}$

$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta MCA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow MH.MO = MB.MC \Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{MB}{MO}$.

Xét ΔMHB và ΔMCO có $\widehat{M}$ chung, $\frac{MH}{MC} = \frac{MB}{MO}$

$\Rightarrow \Delta MHB \# \Delta MCO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MOC}$ (hai góc tương ứng).

Ta có $\widehat{MBH} + \widehat{HBC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{HBC} + \widehat{HOC} = 180^\circ$

$\Rightarrow BHOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do $BHOC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CHO} = \widehat{CBO} = \frac{1}{2} sd\widehat{CO}$.

ΔBOC cân tại O nên $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$.

Mà tứ giác $BHOC$ nội tiếp nên $\widehat{BCO} = \widehat{BHM} \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{CHO}$.

Ta có $\widehat{BHM} + \widehat{BHA} = \widehat{AHC} + \widehat{CHO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{AHC}$

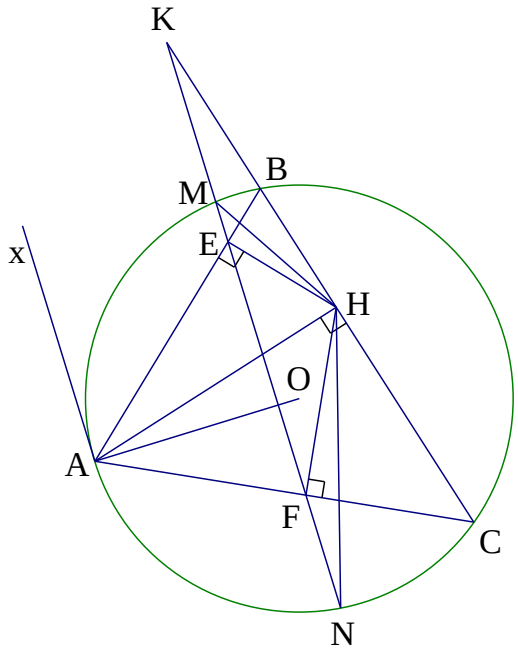
$\Rightarrow AH$ là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.

Bài 9: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H lên AB và AC. EF cắt BC tại K và cắt (O) tại M, N. Chứng minh:

a) $AEHF$ nội tiếp.

b) $KH^2 = KB.KC$ và A là điểm chính giữa cung MN.

c) A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN.



Giải

a) Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180° \Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do tứ giác $AEHF$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{AHE} = \frac{1}{2} sd\widehat{AE}$.

Ta có $\widehat{AHE} + \widehat{EHK} = \widehat{AFE} + \widehat{EFH} = 90° \Rightarrow \widehat{EHK} = \widehat{EFH}$.

Xét ΔKHE và ΔKFH có $\widehat{K}$ chung, $\widehat{KFH} = \widehat{EFH}$

$\Rightarrow \Delta KHE \# \Delta KFH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KH}{KF} = \frac{KE}{KH} \Rightarrow KH^2 = KE.KF$ (1)

Ta có $\widehat{KEB} = \widehat{AEF}$ (đối đỉnh), $\widehat{AEF} = \widehat{AHF} = \frac{1}{2} sd\widehat{AF}$, $\widehat{AHF} = \widehat{ACK}$ (cùng phụ $\widehat{FHC}$).

$\Rightarrow \widehat{KEB} = \widehat{KCF}$.

Xét ΔKEB và ΔKCF có $\widehat{K}$ chung, $\widehat{KEB} = \widehat{KCF}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KEB = \Delta KCF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KE}{KC} = \frac{KB}{KF} \Rightarrow KB.KC = KE.KF$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow KH^2 = KB.KC$.

Kẻ tiếp tuyến Ax với $(O) \Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} sd\widehat{AB}$.

Mà $\widehat{AEB} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{AEF}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow Ax \,//\, MN \Rightarrow OA \perp MN$.

Lại có OA là đường kính $\Rightarrow OA$ là trung trực của $MN \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$
$\Rightarrow A$ là điểm chính giữa cung MN.

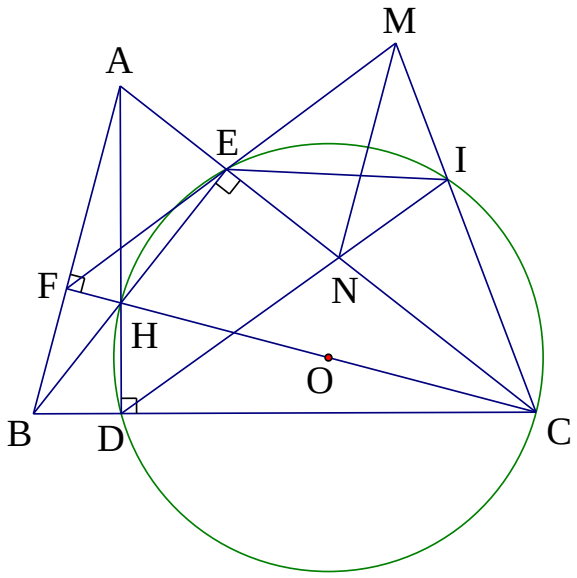
c) Ta có $\overset{\frown}{ANF} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{AM}, \overset{\frown}{ACB} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{AN} \Rightarrow \overset{\frown}{ANF} = \overset{\frown}{ACN}.$

Xét ΔANF và ΔACN có $\hat{A}$ chung, $\overset{\frown}{ANF} = \overset{\frown}{ACN}$

$\Rightarrow \Delta ANF \# \Delta ACN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AN^2 = AF.AC$ (*)

Xét ΔAHC vuông tại H đường cao HF có $AH^2 = AF.AC$ (**)
Từ (*)(**) suy ra $AN = AH$.
Vậy A cách đều $M, H, N \Rightarrow \Delta MHN$ nội tiếp đường tròn tâm A.

Bài 10: Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$. Trên cung nhỏ EC của (O) lấy I sao cho $IC > IE$. Gọi N là giao điểm của DI và CE, M là giao điểm của EF và IC. Chứng minh:
a) $MENI$ nội tiếp.
b) $MN \,//\, AB$.



Giải

a) Xét tứ giác $AEHF$ có $\overset{\frown}{AEH} + \overset{\frown}{AFH} = 180°$

$\Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \overset{\frown}{AHF} = \overset{\frown}{AEF} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{AF}.$

Mà $\overset{\frown}{AHF} = \overset{\frown}{DHC}$ (đối đỉnh), $\overset{\frown}{DHC} = \overset{\frown}{DIC} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{DC}$.

Mà $\overset{\frown}{AEF} = \overset{\frown}{MEC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \overset{\frown}{AEF} = \overset{\frown}{DIC}$.

Xét tứ giác $NEMI$ có $\overset{\frown}{NEM} + \overset{\frown}{NIM} = \overset{\frown}{NIM} + \overset{\frown}{DIC} = 180°$
$\Rightarrow NEMI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do $NEMI$ nội tiếp nên $\widehat{EMN} = \widehat{EIN} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{EN}$.

Xét (O) có $\widehat{EIN} = \widehat{EID} = \widehat{ECD} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{ED}$.

Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{AFE} = 180^\circ - \widehat{EFB} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{EMN}$.

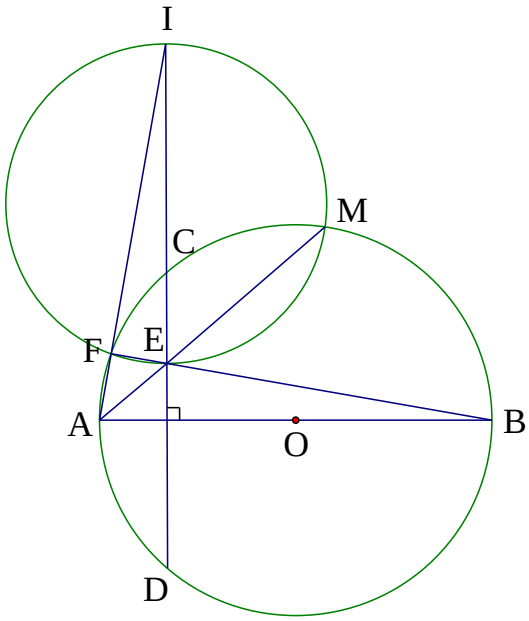
Mà hai góc này so le trong $\Rightarrow AB \parallel MN$.

DẠNG 2. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp giải:

- Cách 1: Chứng minh một trong ba đường thẳng AB, AC, BC cung song song với một đường thẳng thì A, B, C thẳng hàng.
- Cách 2: $\begin{cases} AB \perp d \\ BC \perp d \\ AC \perp d \end{cases} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.
- Cách 3: $\widehat{ABC} = 180^\circ$ thì A, B, C thẳng hàng.

Bài 1: Cho $(O;R)$ đường kính AB cố định. Dây CD di động vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung nhỏ AC. Giả sử BF cắt CD tại E, AF cắt DC tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF cắt AE tại M. Chứng minh $M \in (O;R)$.



Giải

Xét ΔIEF vuông tại F.

IE là đường kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta IEF \Rightarrow \widehat{IMF} = 90^\circ$ (1)

Xét ΔIAB có $IH \perp AB, BF \perp AI$. Mà AH cắt BF tại E

$\Rightarrow E$ là trực tâm $\Delta IEF \Rightarrow AE \perp IB$ (2)

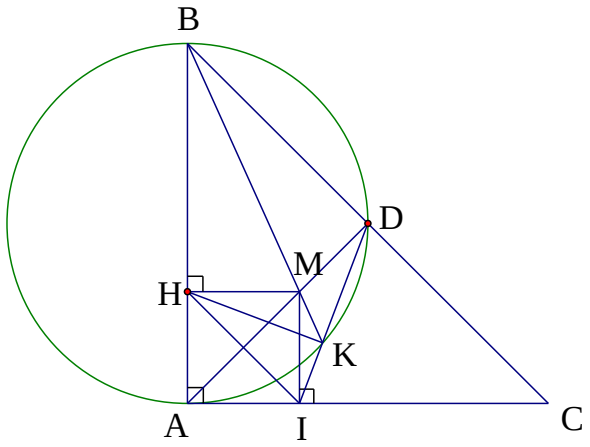
Từ (1)(2) $\Rightarrow I, M, B$ thẳng hàng do $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow M \in (O;R)$.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn đường kính AB cắt BC tại điểm D khác B. Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng AD. Kẻ MH, MI lần lượt vuông góc với AB, AC tại H, I. Kẻ $HK \perp ID$ tại K. Chứng minh:

a) $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$.

b) $MKIH$ nội tiếp.

c) K, M, B thẳng hàng.



Giải

a) Xét tứ giác $MDCI$ có $\widehat{MIC} + \widehat{MDC} = 180^\circ \Rightarrow MDCI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{MCD}$ (1)

Xét ΔABC vuông tại A có $AB = AC, AD \perp BC \Rightarrow AD$ là trung trực của BC.

$\Rightarrow MD = MC \Rightarrow \Delta MDC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MCB}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{MBC}$.

b) Ta có $\widehat{IAH} = \widehat{AHM} = \widehat{MIA} = 90^\circ \Rightarrow AHMI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{IMH} = 90^\circ$

$\Rightarrow AHMI$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $HMKI$ có $\widehat{HMI} = \widehat{HKI} = 90^\circ \Rightarrow HMKI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow A, H, M, I, K$ cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow MKIA$ là tứ giác nội tiếp.

c) Do tứ giác $AIKD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIK} + \widehat{AMK} = 180^\circ$.

Ta có $\widehat{AIK} = \widehat{AIM} + \widehat{MIK} = 90^\circ + \widehat{MIK}$.

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{MDB} + \widehat{DBM} = 90^\circ + \widehat{DBM}$.

Theo a có $\widehat{DBM} = \widehat{MIK} \Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{AMB}$.

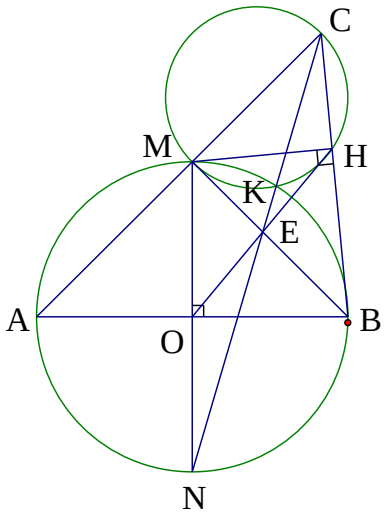
$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AMK} = 180^\circ \Rightarrow B, M, K$ thẳng hàng.

Bài 3: Cho (O), hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác M. Kẻ $MH \perp BC$ $(H \in BC)$.

a) Chứng minh $BOMH$ nội tiếp.

b) MB cắt OH tại E, chứng minh $ME.HM = BE.HC$.

c) Gọi giao điểm của (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K. Chứng minh C, K, E thẳng hàng.



Giải

a) Xét tứ giác $MOBH$ có $\widehat{MOB} + \widehat{MHB} = 180^\circ \Rightarrow MOHB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do MN và AB là hai đường kính vuông góc với nhau

$\Rightarrow \Delta MOB$ vuông cân tại $B \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OBM} = 45^\circ$.

Xét tứ giác $OMHB$ nội tiếp có $\widehat{OHB} = \widehat{OMB} = \frac{1}{2} sd\widehat{OB} \Rightarrow \widehat{OHB} = 45^\circ$

$\Rightarrow OH$ là tia phân giác của $\widehat{MHB}$.

Xét $\Delta MHB,$ theo tính chất tia phân giác ta có $\frac{ME}{EB} = \frac{MH}{HB} \Rightarrow ME.HB = MH.EB$ (1)

Xét ΔMCB vuông tại M đường cao MH. Theo hệ thức giữa cạnh và đường cao ta có

$$MH^2 = HB.HC \Rightarrow HB = \frac{MH^2}{HC} \text{ (2)}$$

Thay (2) vào (1) ta được $ME.\frac{MH^2}{HC} = MH.EB \Rightarrow ME.MH = HC.EB$.

c) Do ΔMHC vuông tại H, gọi I là trung điểm của MC

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMHC

$\Rightarrow \widehat{MKC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (3)

Xét (O) có $\widehat{MKN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Theo phần b ta có $ME.MH = HC.EB \Rightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{HC}{HM}$ (*)

Xét ΔHMC và ΔMBC có $\widehat{C}$ chung, $\widehat{CHM} = \widehat{CMB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta HMC \# \Delta MBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HC}{MC} = \frac{MC}{BC} = \frac{HM}{MB} \Rightarrow \frac{HC}{HM} = \frac{MC}{MB}$.

Mà $MB = NB \Rightarrow \dfrac{HC}{HM} = \dfrac{MC}{NB}$ (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \dfrac{ME}{BE} = \dfrac{MC}{NB}$.

Xét ΔMEC và ΔBEN có $\widehat{EMC} = \widehat{EBN} = 90°, \dfrac{ME}{BE} = \dfrac{MC}{NB}$

$\Rightarrow \Delta MEC \# \Delta BEN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{BEN}$.

Mà B, E, M thẳng hàng $\Rightarrow N, E, C$ thẳng hàng.

Mặt khác C, K, N thẳng hàng nên C, K, E thẳng hàng.

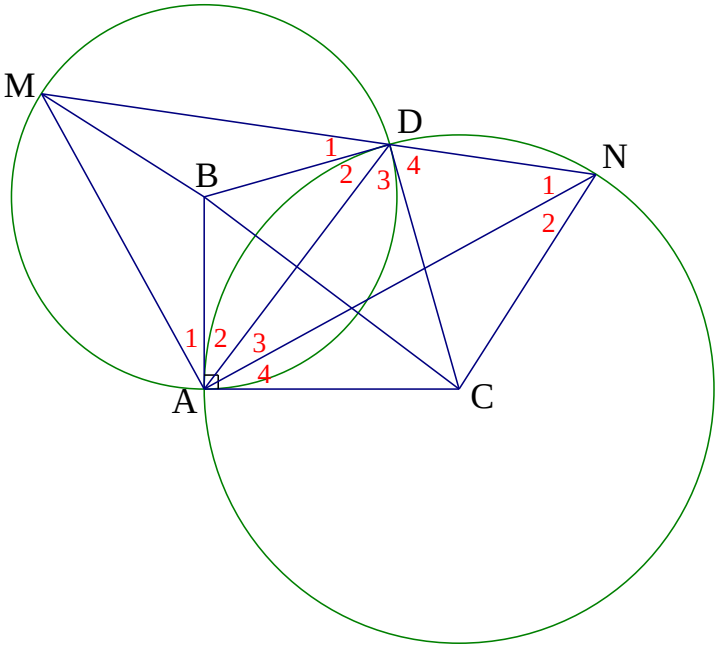
Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường tròn tâm B bán kính AB, đường tròn tâm C bán kính AC. Hai đường tròn cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ AM, AN lần lượt là các dây cung của đường tròn (B) và (C) sao cho $AM \perp AN$ và D nằm giữa M và N.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DBC$.

b) Chứng minh $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh M, D, N thẳng hàng.

d) Xác định dây AM, AN của đường tròn (B) và (C) sao cho MN có độ dài lớn nhất.



Giải

a) Xét ΔABC và ΔDBC có BC chung, $AB = BD$,(bán kính đường tròn (B)), $AC = CD$ (bán kính đường tròn (C)).

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta DBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90°$.

b) Xét tứ giác $ABDC$ có $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180° \Rightarrow ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có ΔABM cân tại $B \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A_1}$.

ΔCAN cân tại $C \Rightarrow \widehat{N_2} = \widehat{A_4}$.

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_4}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}, \widehat{A_3}$).

$\widehat{A_2} = \widehat{N_1} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{AD}$

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90° \Rightarrow \widehat{M_1} + \widehat{N_1} + \widehat{A_3} = 90°.$

ΔAMN vuông tại $A \Rightarrow \widehat{N_1} + \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90° \Rightarrow \widehat{M_2} = \widehat{A_3} = \widehat{D_1}$ (ΔBDM cân tại B)

ΔCDN cân tại $C \Rightarrow \widehat{N_1} + \widehat{N_2} = \widehat{D_4}$

$\Rightarrow \widehat{D_2} + \widehat{D_3} + \widehat{D_1} + \widehat{D_4} = 90° + \widehat{M_2} + \widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 90° + \widehat{M_2} + \widehat{N_1} + \widehat{M_1} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow M, D, N$ thẳng hàng.

d) Theo định lí Pytago ta có $MN^2 = AM^2 + AN^2$.

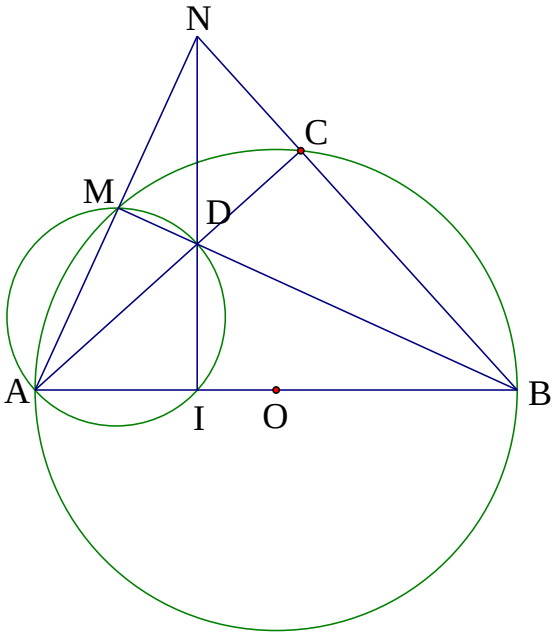
Để MN lớn nhất thì AM là đường kính của (B) và AN là đường kính của (C).

Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB, C là điểm nằm trên đường tròn không trùng với A và B. Lấy điểm D thuộc đoạn thẳng AC (D không trùng A và C). Tia BD cắt cung nhỏ AC tại M, tia BC cắt tia AM tại N.

a) Chứng minh $MNCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AM.BD = AD.BC$.

c) Gọi I là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và tam giác BDC. Chứng minh N, D, I thẳng hàng.



Giải

a) Ta có $\overset{\frown}{AMD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \overset{\frown}{NMD} = 90°$.

$\overset{\frown}{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \overset{\frown}{DCN} = 90°$.

Xét tứ giác $NMDC$ có $\overset{\frown}{NMD} = \overset{\frown}{NCD} = 90° \Rightarrow NMDC$ là tứ giác nội tiếp.

Xét ΔMDA và ΔCDB có $\overset{\frown}{MDA} = \overset{\frown}{CDB}$ (đối đỉnh), $\overset{\frown}{AMD} = \overset{\frown}{BCD} = 90°$

$\Rightarrow \Delta MDA \# \Delta CDB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MD}{CD} = \dfrac{DA}{DB} \Rightarrow MD.DB = CD.DA$.

c)

Cách 1:

Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta AMD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD

$\Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Ta có $\widehat{DCB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta DCB$ nội tiếp đường tròn đường kính BD

$\Rightarrow \widehat{IDB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Ta có $\widehat{DIA} + \widehat{DIB} = 180^\circ \Rightarrow A, I, B$ thẳng hàng.

Xét ΔNHB có $BM \perp AN$, $AC \perp NB$, $BM \cap AC = \{D\}$

$\Rightarrow D$ là trực tâm $\Delta NAB \Rightarrow ND \perp AB$.

Mặt khác $DI \perp AB \Rightarrow N, D, I$ thẳng hàng.

Cách 2:

Giả sử $ND \cap AB = \{I'\}$.

Xét ΔANB có $\widehat{AMB} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Mà $AC \cap MB = \{D\} \Rightarrow D$ là trực tâm ΔANB.

$\Rightarrow NI' \perp AB$.

Xét ΔMAD vuông tại $M \Rightarrow AD$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔMAD

$\Rightarrow \widehat{AI'D} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow I'$ thuộc đường tròn đường kính AB.

Xét ΔDCB vuông tại $C \Rightarrow DB$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔDCB

$\Rightarrow \widehat{DI'B} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow I'$ thuộc đường tròn đường kính DB.

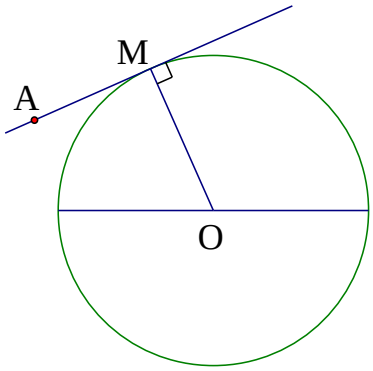
$\Rightarrow I'$ là điểm chung của hai đường tròn ngoại tiếp ΔADM và ΔBDC.

$\Rightarrow I' \equiv I \Rightarrow N, D, I$ thẳng hàng.

DẠNG 3. TIẾP TUYẾN

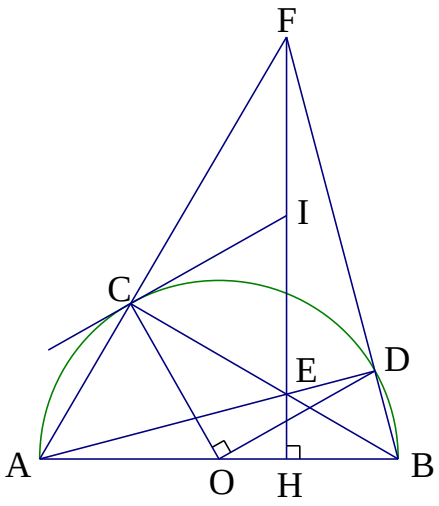
Phương pháp giải:

Để chứng minh AM là tiếp tuyến của (O) cần chỉ ra hai điều kiện: OM là bán kính và $OM \perp AM$.



Bài 1: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn sao cho $AC < BC$. Gọi D là điểm thuộc cung nhỏ BC sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$. Gọi E là giao

điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).



Giải

Xét ΔFCE vuông tại C có I là trung điểm của EF

$\Rightarrow CI = \dfrac{1}{2}EF$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \Delta CFI$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ (1)

Ta có $OA = OC = R \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{EFA} = \widehat{FCI} + \widehat{OCA}$ (*)

Xét ΔAFD, gọi H là giao của EF và AD.

Ta có $AF \perp BC$ và $AD \perp FB$. Mặt khác AF cắt AD tại E

$\Rightarrow E$ là trực tâm $\Delta AFB \Rightarrow FH \perp AB$.

Xét ΔFAH có $\widehat{FAH} + \widehat{AFH} = 90^\circ$ (hai góc phụ nhau) (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \widehat{FCI} + \widehat{OCA} = 90^\circ$.

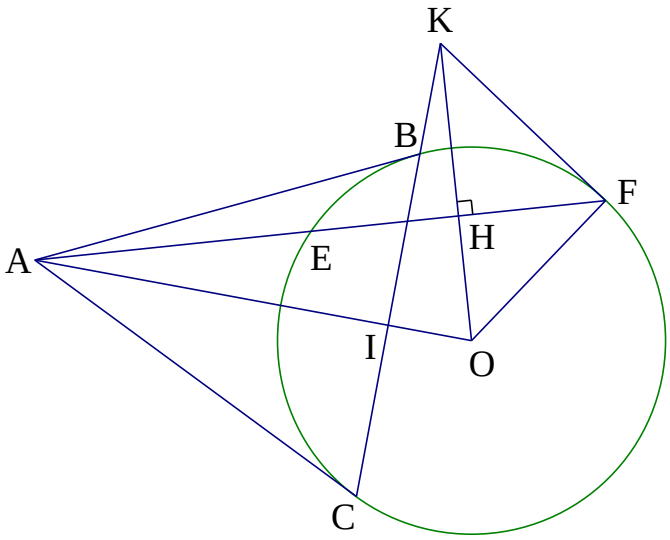
Ta có $\widehat{FCI} + \widehat{ICO} + \widehat{OCA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ$.

Mặt khác OC là bán kính. Vậy IC là tiếp tuyến của (O).

Bài 2: Cho (O) và đường thẳng d cắt $(O;R)$ tại E và F. Gọi A là điểm trên d sao cho E nằm giữa A, F. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến (O). Với B, C là các tiếp điểm và B, O nằm về hai phía của đường thẳng d. Gọi H là trung điểm của EF. Đường thẳng BC cắt OA tại I, cắt OH tại K.

a) Chứng minh $OI.OA = OH.OK$.

b) Chứng minh KE là tiếp tuyến của $(O;R)$.



Giải

a) Ta có $AB = AC$ (hai tiếp tuyến cắt nhau), $OB = OC = R$

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$ tại $I \Rightarrow \widehat{OIK} = 90°$.

Ta có H là trung điểm của $EF \Rightarrow OH \perp EF \Rightarrow \widehat{OHE} = 90°$.

Xét ΔOIK và ΔOHA có $\widehat{IOK} = \widehat{HOA}, \widehat{OIK} = \widehat{OHA} = 90°$

$\Rightarrow \Delta OIK \# \Delta OHA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OK}{OA} \Rightarrow OI.OA = OH.OK$.

b) Xét ΔOAB vuông tại B đường cao $BI,$ theo hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OI.OA = OB^2 = R^2$.

Theo phần a ta có $OH.OK = R^2 = OF^2$.

Xét ΔOHF và ΔOKF có $\widehat{O}$ chung, $\dfrac{OH}{OF} = \dfrac{OF}{OK}$

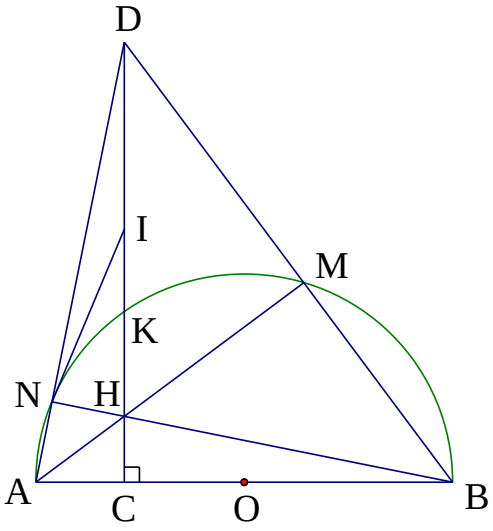
$\Rightarrow \Delta OHF \# \Delta OFK$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{OHF} = \widehat{OFK} = 90°$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow OF$ là tiếp tuyến của $(O;R)$.

Bài 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng OA $(C \neq O, A)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung BK $(M \neq B, K)$. Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H, D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là N. Chứng minh:

a) A, N, D thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.



Giải

a) Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $DH \perp AB$ (gt).

Xét ΔDAB có $AC \perp AB, AM \perp DB$ (cmt), mà AC cắt AM tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm ΔADB.

Ta có $\widehat{BNA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Mà $BH \perp AD, H \in BN \Rightarrow BN \perp AD \Rightarrow A, N, D$ thẳng hàng.

b) Gọi I là trung điểm của DH.

Xét ΔNDH vuông tại N có I là trung điểm của DH

$\Rightarrow IN = ID = IH$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \Delta IND$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IND} = \widehat{IDN}$.

Xét ΔONB có $ON = OB = R \Rightarrow \Delta ONB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ONB} = \widehat{OBN}$.

Ta có $\widehat{IDN} = \widehat{ONB}$ (cùng phụ với $\widehat{DAC}$)

Mặt khác $\widehat{ONI} = \widehat{ONB} + \widehat{BNI} = \widehat{IND} + \widehat{BNI} = \widehat{BND} = 90^\circ$.

Vậy IN là tiếp tuyến của $(O;R)$.

DẠNG 5. SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ TALET VÀ ĐỊNH LÍ TALET ĐẢO

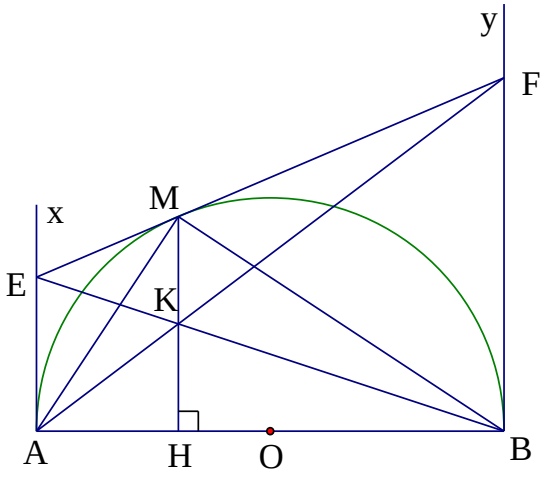
Tính chất 1. Cho tam giác ABC có E và F lần lượt là thuộc cạnh AB và AC sao cho $EF \,//\, BC$. Một đường thẳng d đi qua A và qua trung điểm của BC. Chứng minh d đi qua trung điểm của EF.

Bài 1: Cho điểm M thuộc đường tròn tâm O đường kính $AB = 2a,\ M \neq A, B$. Kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với (O). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại E, F. Gọi K là giao điểm của AF và BE.

a) Chứng minh $MK \perp AB$.

b) Biết $MB = \sqrt{3}MA$. Tính S_{KAB} theo a.

Giải



a) Ta có $\widehat{EAK}+\widehat{KAB}=90^\circ$ (hai góc phụ nhau), $\widehat{FAB}+\widehat{AFB}=90^\circ$ (hai góc phụ nhau)

$\Rightarrow \widehat{EAK}=\widehat{AFB}$.

Xét ΔEAK và ΔBFK có $\widehat{EKA}=\widehat{BKF}$ (đối đỉnh), $\widehat{KAE}=\widehat{BFK}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta EAK \# \Delta BFK$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{FK}=\dfrac{EA}{BF}$. Mà $EA=EM$ (2 tiếp tuyến cắt nhau), $BF=FM$ (2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{KF}=\dfrac{BM}{MF}$.

Xét ΔAEF có $\dfrac{AK}{KF}=\dfrac{BM}{MF}$, theo ĐL Talet đảo ta có $MK \,//\, EA$.

Mà $EA \perp AB$ (tiếp tuyến vuông góc với đường kính) $\Rightarrow MK \perp AB$ tại H.

b) Do $MK \,//\, FB$ nên theo ĐL Talet ta có $\dfrac{MK}{FB}=\dfrac{EK}{EB}$ (1)

Do $KH \,//\, FB$ nên $\dfrac{KH}{FB}=\dfrac{AH}{AB}$ (2)

Do $KH \,//\, EA$ nên $\dfrac{EK}{EB}=\dfrac{AH}{AB}$ (3)

Từ (1) (2) (3) ta có $\dfrac{MK}{FB}=\dfrac{KH}{FB}$

$\Rightarrow MK=KH \Rightarrow K$ là trung điểm của $MH \Rightarrow KH=\dfrac{1}{2}MH$.

Xét ΔMHB vuông tại M. Theo ĐL Pytago ta có

$MA^2+MB^2=AB^2 \Rightarrow MH=a \Rightarrow MB=a\sqrt{3}$.

$S_{MAB}=\dfrac{1}{2}MH.AB=\dfrac{MA.MB}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

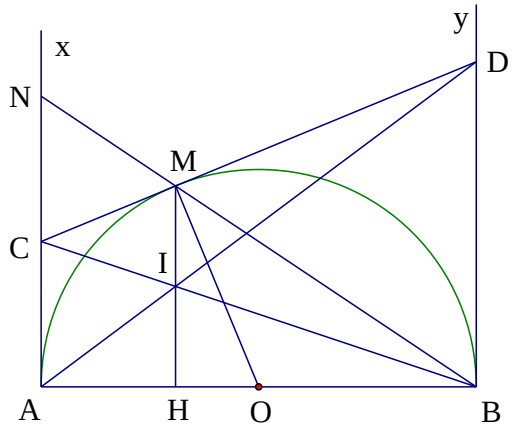
Ta có $KH=\dfrac{1}{2}MH \Rightarrow S_{AKB}=\dfrac{1}{2}S_{MAB}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 2: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn, Ax, By cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn. Gọi M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Kẻ $MH \perp AB$, MH cắt BC tại I.

a) Chứng minh I là trung điểm của MH.

b) Chưng minh A, I, D thẳng hàng.

Giải



a) Gọi $N = AC \cap BM$.

Ta có $\widehat{AMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90^\circ$ (1)

Xét ΔAMN có $\widehat{MAN} + \widehat{ANM} = 90^\circ$ (hai góc phụ nhau) (2)

Do $CM = CA$ (hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta CMA$ cân $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{MAC}$ (3)

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow \widehat{M_2} = \widehat{MNA} \Rightarrow \Delta MNC$ cân tại $C \Rightarrow CM = CN$.

$\Rightarrow C$ là trung điểm của NA.

Ta có $MH \perp AB$, $NA \perp AB \Rightarrow MH \,//\, AN \Rightarrow MI \,//\, NC$.

Theo hệ quả ĐL Talet ta có $\dfrac{MI}{NC} = \dfrac{BI}{BC}$ (*)

Tương tự ta có $\dfrac{IH}{CA} = \dfrac{BI}{BC}$ (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \dfrac{MI}{NC} = \dfrac{IH}{CA} \Rightarrow MI = IH$.

b) Chứng minh tương tự $DF = DB$.

Gọi $I' = MH \cap AD$. Tương tự I' là trung điểm của MH.

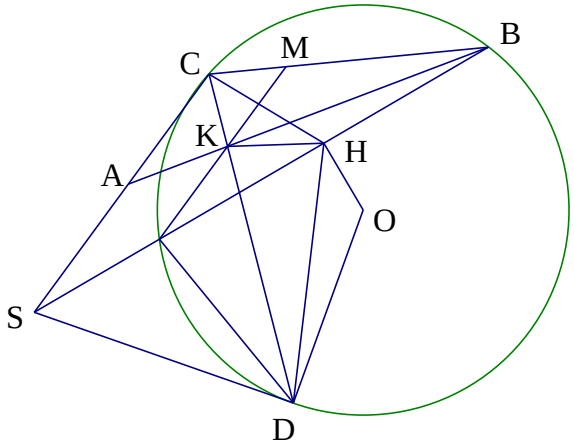
Do I' là trung điểm của $MH \Rightarrow I \equiv I'$ hay A, I, D thẳng hàng.

Bài 3: Cho $(O;R)$ và dây cung AB không đi qua O. Từ điểm S thuộc tia đối của tia AB, $S \neq A$, vẽ hai tiếp tuyến SC, SD đến $(O;R)$ với C, D là các tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ AB. Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng đi qua A và song song với SC cắt CD tại K.

a) Chứng minh $ADHK$ nội tiếp.

b) Chứng minh KB đi qua trung điểm của SC.

Giải



a) Ta có $\widehat{SCO} = 90^\circ$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính), $\widehat{SHO} = 90^\circ$ (bán kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây)

$\Rightarrow \widehat{SCO} = \widehat{SHO} = 90^\circ \Rightarrow SCHO$ là tứ giác nội tiếp.

Tương tự $SHOD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính SO.

Xét đường tròn ngoại tiếp 5 điểm S, C, H, O, D.

Ta có $\widehat{SCD} = \widehat{SHD} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{SD}$.

Do $SC \,//\, HK$ nên $\widehat{SCD} = \widehat{AKD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{AHD}$.

Xét tứ giác $AKHD$ có $\widehat{AKD} = \widehat{AHD} \Rightarrow AKHD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi $M = AK \cap CB$.

Do $ADKH$ nội tiếp nên $\widehat{ADK} = \widehat{AHK} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{AK}$ (1)

Xét (O) có $\widehat{ADK} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{AC}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = \widehat{AHK}$.

Mà $\widehat{AHK}$ và $\widehat{ABC}$ đồng vị $\Rightarrow HK \,//\, CB$.

Mà H là trung điểm của $AB \Rightarrow K$ là trung điểm của AM.

Xét ΔIBC có $\frac{KM}{BC} = \frac{BK}{BI}$ (3)

Xét ΔISB có $KH \,//\, SI$ ta có $\frac{AK}{SI} = \frac{BK}{BI}$ (4)

Từ (3)(4) $\Rightarrow \frac{AK}{SI} = \frac{KM}{CI}$ và K là trung điểm của $AM \Rightarrow I$ là trung điểm của SC.

DẠNG 6. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC

Tính chất 1: Với AD là tia phân giác trong của $\widehat{BAC}$ thì $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

Với AK là tia phân giác ngoài của ΔABC thì $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$.

Từ (1) (2) $\Rightarrow \frac{KB}{KC}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow KB.DC=KC.BD$.

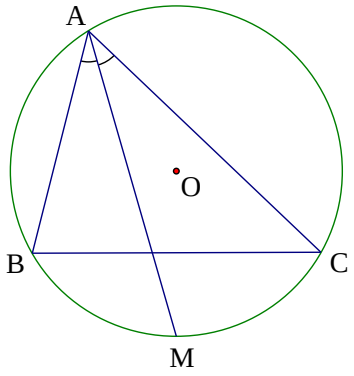
$AK\perp AD$.

$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

Tính chất 2: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Nếu AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ thì M là điểm chính giữa cung BC.

Ngược lại M là điểm chính giữa cung BC

$\Rightarrow \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{BC}\Rightarrow sd\overset{\frown}{BM}=sd\overset{\frown}{BC}\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{CAM}$.

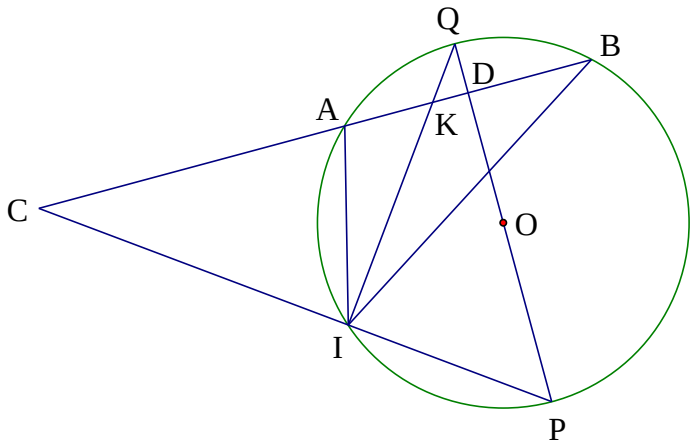


Bài 1: Cho (O) và dây AB. Lấy điểm C nằm ngoài đường tròn và nằm trên tia BA. Gọi P là điểm chính giữa cung lớn AB. Kẻ đường kính PQ của (O), PQ cắt AB tại D, tia CP cắt (O) tại I. Các dây AB và QI cắt nhau tại K.

a) Chứng minh $CA.CB=CD.CK$.

b) Chứng minh $AK.BC=BK.AC$.

Giải



a) Ta có $IABP$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CIA}=\widehat{CBP}$.

Xét ΔCIA và ΔCBP có $\widehat{C}$ chung, $\widehat{CIA}=\widehat{CBD}$ (cmt) $\Rightarrow \Delta CIA\#\Delta CBP$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{CI}{CB} = \dfrac{CA}{CP} \Rightarrow CI.CP = CB.CA$ (1)

Do P là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PB}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{QB} \Rightarrow PQ \perp AB$ tại D.

Xét ΔCDP và ΔCIK có $\widehat{C}$ chung, $\widehat{CIK} = \widehat{CDP} = 90°$.

$\Rightarrow \Delta CDP \# \Delta CIK$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{CD}{CI} = \dfrac{CP}{CK} \Rightarrow CD.CK = CI.CP$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow CD.CK = CA.CB$.

b) Ta có $QA = QB \Rightarrow \widehat{AIQ} = \widehat{QIB} \Rightarrow IQ$ là tia phân giác của $\widehat{AIB}$.

Xét ΔAIB có IK là phân giác, $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AI}{AB}$ (3)

Do $IC \perp IK \Rightarrow IC$ là phân giác ngoài của $\widehat{CIB} \Rightarrow \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{CA}{CB}$ (4)

Từ (3) (4) $\Rightarrow \dfrac{AK}{BK} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow AK.CB = BK.CA$.

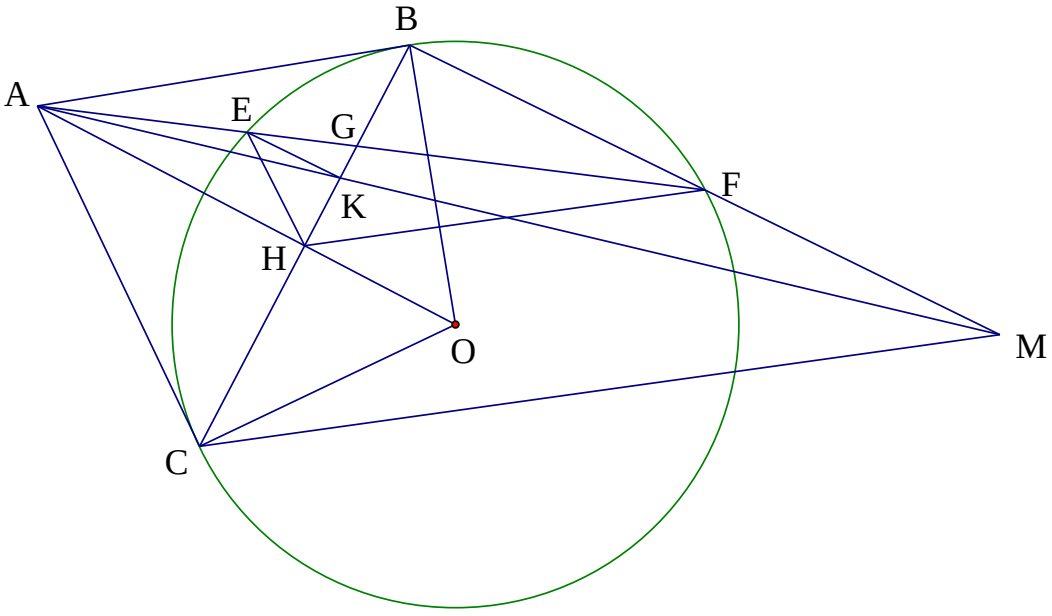
Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Kẻ tia Ax nằm giữa hai tia AB, AD cắt đường tròn tại E và F (E nằm giữa A và F).

a) Chứng minh $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $AB^2 = AE.AF$ và $\widehat{OEF} = \widehat{OHF}$ với H là giao của OA và BC.

c) Đường thẳng qua E song song với BF cắt BC tại K. Đường thẳng AK cắt BF tại M. Chứng minh $MC = 2HF$.

Giải



a) Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{ABE}+\widehat{AFB}=\frac{1}{2}sd\widehat{BE}$.

Xét ΔABE và ΔAFB có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ABE}=\widehat{AFB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABE\# \Delta AFB$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AF}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow AB^2=AE.AF$ (đpcm) (1)

Xét ΔABO vuông tại B, đường cao BH có $AB^2=AH.AO$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow AE.AF=AH.AO$.

Xét ΔAEH và ΔAOF có $\widehat{A}$ chung, $\frac{AE}{AH}=\frac{AF}{AC}$

$\Rightarrow \Delta AEH\# \Delta AOF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AEH}=\widehat{AOF}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AEH}+\widehat{HEF}=180^\circ\Rightarrow \widehat{HOF}+\widehat{HEF}=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $EFOH$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác nội tiếp $AFOH$ có $\widehat{OHF}+\widehat{OEF}=\frac{1}{2}sd\widehat{OF}$ (đpcm)

c) Gọi $O=AF\cap BC$. Ta có $EK\ /\!/\ FM$ theo ĐL Talet: $\frac{EK}{FM}=\frac{AE}{AF},\frac{EK}{BF}=\frac{EG}{GF}$.

Ta có $AE.AF=AB^2, AH.AO=AB^2\Rightarrow AE.AF=AH.AO\Rightarrow \frac{AF}{AO}=\frac{AH}{AF}$.

Xét ΔAEH và ΔAOF có $\widehat{A}$ chung, $\frac{AE}{AO}=\frac{AH}{AO}\Rightarrow \Delta AEH\# \Delta AOF$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AHF}=\widehat{OFE}$. Mặt khác $\widehat{AHE}+\widehat{EHO}=180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{EHO}+\widehat{OFE}=180^\circ\Rightarrow EHOF$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $OF-OE=R\Rightarrow \widehat{OFE}=\widehat{OEF}=\widehat{OHF}=\widehat{EHA}$.

Do $\widehat{AHF}+\widehat{EHB}=90^\circ, \widehat{BHF}+\widehat{FHO}=90^\circ\Rightarrow \widehat{EHG}=\widehat{GHF}$

$\Rightarrow HG$ là đường phân giác của $\Delta EHF\Rightarrow \frac{GE}{GF}=\frac{HE}{HF}$ (1)

Mà $AH\perp HG\Rightarrow AH$ là phân giác ngoài của $\Delta HEF\Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{EH}{HF}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{EH}{HF}=\frac{AE}{AF}=\frac{GE}{GF}$ (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \frac{EK}{BF}=\frac{AE}{AF}=\frac{EK}{KM}\Rightarrow BF=FM$.

$\Rightarrow FM$ là trung điểm của BM. Xét ΔBCM có $HB=HC, FB=FM$.

$\Rightarrow FM$ là đường trung bình của $\Delta BCM\Rightarrow HF=\frac{CM}{2}\Rightarrow CM=2HF$.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho $(O;R)$ đường kính AC, kẻ tiếp tuyến Ax. Trên tia Ax lấy điểm M, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn, MC cắt đường tròn tại D. AB cắt MD tại H.

a) Chứng minh $AMBD$ nội tiếp và $MB^2 = MH.MO$.

b) Chứng minh $MC.MD = MH.MO$ và $COHD$ nội tiếp.

c) Gọi $\{I\} = BD \cap OM, \{K\} = AB \cap CD$. Chứng minh MB, HC, IK đồng quy.

Bài 2: Cho $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy M bất kì thuộc $OA, M \neq A, O$. Tia DM cắt đường tròn tại N.

a) Chứng minh O, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $DM.DN = DO.DC = 2R^2$.

c) Đường tròn $(M;MC)$ cắt AC, BC lần lượt tại E, F. Chứng minh F, M, E thẳng hàng. TÌm vị trí của M trên OA để $S = \dfrac{4}{CE} + \dfrac{1}{CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB và điểm C nằm giữa A và B $(AC < BC)$. Lấy điểm M bất kì trên nửa đường tròn, $M \neq A, B$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm M, vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt tia Ax tại P.

a) Chứng minh A, C, M, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua C vuông góc với CP cắt By tại Q. Chứng minh $AC.BC = AP.BQ$.

c) AM cắt PC tại D, BM cắt CQ tại F. Chứng minh $DE \parallel AB$.

d) Gọi H là trung điểm của CQ. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm M bất kì trên tiếp tuyến Ax của đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Gọi $\{I\} = OM \cap AC$.

a) Chứng minh A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OI.OM = OA^2$ và $OM \parallel BC$.

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB, MB cắt (O) tại D và cắt CH tại K. Chứng minh K là trung điểm của CH.

Bài 5: Cho $(O;R)$ và đay cung AB không đi qua O. Từ điểm S thuộc tia đối của tia AB, $(S \neq A)$ vẽ hai tiếp tuyến SC, SD đến (O) với C, D là tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ AB. Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh S, C, D, H, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là giao điểm của OH và CD. Chứng minh $\Delta OHD \# \Delta ODI$ và BI là tiếp tuyến của đường tròn.

c) Đường thẳng đi qua A song song với SI cắt CD tại K. Chứng minh BK đi qua trung điểm của SC.

Bài 6: Cho $(O;R)$ đường kính AD. Lấy $B \in (O)$ sao cho $AB < BD$ và điểm C thuộc cung nhỏ BD, AC cắt BD tại E. Gọi H là hình chiếu của E lên AO $(H \neq O)$.

a) Chứng minh $ABEH$ nội tiếp.

b) Chứng minh BE là phân giác của $\widehat{HBC}$.

c) Chứng minh $AC.AE + DE.DB = 4R^2$.

d) Gọi I là trung điểm của AE. Chứng minh $BCHI$ nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác HIC luôn đi qua hai điểm cố định khi C di động trên cung nhỏ BD (A, B, O cố định).

Bài 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp $(O;R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Các đường thẳng BE, CF cắt đường tròn tại Q, K.

a) Chứng minh B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $KQ \parallel FE$.

c) Gọi I là trung điểm của BC, chứng minh I thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

d) Cho BC cố định, tìm vị trí điểm A để chu vi ΔDEF có giá trị lớn nhất.

Bài 8: Cho $(O;R)$ ngoại tiếp tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Kẻ đường kính AD của (O). Tiếp tuyến tại D của $(O;R)$ cắt BC tại E. Kẻ $OH \perp BC$ tại H.

a) Chứng minh $OHDE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $ED^2 = EC.EB$.

c) Từ C kẻ đường thẳng song song với OE, đường này cắt AD tại I. Chứng minh $IH \parallel AB$.

d) Đường thẳng OE cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Gọi F là giao điểm thứ hai của DQ với đường tròn. Chứng minh B, O, F thẳng hàng.

Bài 9: Cho $(O;R)$, dây cung BC cố định và điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AC > AB, AC > BC$. Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Các tiếp tuyến của (O) tại C, D cắt nhau tại E. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AB với CD, AD với CE.

a) Chứng minh $DE \parallel AB$.

b) Chứng minh $PHCQ$ nội tiếp.

c) Gọi $\{S\} = AD \cap BC$. Chứng minh $\dfrac{1}{CE} = \dfrac{1}{CQ} + \dfrac{1}{CS}$.

Bài 10: Cho $(O;R)$ và đường thẳng d không cắt đường tròn. Gọi M là điểm thuộc d. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d.

a) Chứng minh $OAMH$ nội tiếp.

b) Gọi $\{K\} = AB \cap OH, \{I\} = AB \cap OM$. Chứng minh $OK.OH = OI.OM$.

c) OM cắt (O) tại E. Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB. Tìm vị trí điểm M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

BẤT ĐẲNG THỨC.
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN

§1. BẤT ĐẲNG THỨC.
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức Cô-si

- *Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm:*Với hai số a, b không âm, ta luôn có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Lưu ý: Với hai số *a, b* bất kỳ, ta luôn có:

$$a^2+b^2 \geq 2ab\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm: Với ba số a, b và c không âm, ta luôn có:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Lưu ý: Đây là bất đẳng thức nằm ngoài chương trình SGK hiện hành nên muốn áp dụng học sinh cần chứng minh trước khi hoặc sau khi sử dụng như một bổ đề!

2. Một số bổ đề thường dùng khác

Bổ đề 1. Voí mọi số thực *a, b* ta luôn có:

$$*(a+b)^2 \geq 4ab\ ; \qquad *a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Bổ đề 2. Với mọi số thực *a, b, c,* ta luôn có:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca\ .$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bổ đề 3. Với hai số thực dương a và b ta luôn có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Bổ đề 4. Với hai số thực không âm a và b ta có:

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Bổ đề 5. Với ba số thực không âm a, b và c ta có:

$$\sqrt{a+b+c}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3(a+b+c)}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Lưu ý: Với mỗi bất đẳng thức trên, ta cần nhớ và vận dụng linh hoạt cả chiều xuôi và chiều

ngược của nó.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Do khuôn khổ cuốn sách có hạn nên chúng tôi chỉ trình bày 3 kỉ thuật quan trọng để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức đại số.

Dạng 1. Kĩ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cô-si

Phương pháp giải: Dự đoán dấu bằng (tức điểm rơi) của bài toán, từ đó điều chỉnh hệ số để đảm bảo việc dấu bằng luôn xảy ra.

1A. Cho $x\geq 2$. Tìm GTNN của biểu thức $P=x+\frac{1}{x}$.

1B. Cho $x\geq 3$. Tìm GTNN của biểu thức $Q=x+\frac{1}{x}$.

2A. Cho các số x, y>0 . Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}$;

b) $A=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$;

c) $C=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{6xy}{(x+y)^2}$;

d*) $D=\frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}+\frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$.

2B. Cho các số x, $y>0$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $M=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2xy}{x^2+y^2}$;

b) $N=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2-xy+y^2}$;

c) $P=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{4xy}{(x+y)^2}$;

d) $Q=\frac{(x+y+2)^2}{xy+2(x+y)}+\frac{xy+2(x+y)}{(x+y+2)^2}$.

3A. Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y\le 1$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A=x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$;

b) $B=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$;

c) $C=x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$;

d) $D=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$.

3B. Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y\le 2$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A=x+y+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$;

b) $B=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(y+\frac{2}{y}\right)$;

c) $C=x^2+y^2+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{y^2}$;

d) $D=\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+\left(y+\frac{2}{y}\right)^2$.

4A. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x}\le 3$;

c) $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx}\le\sqrt[3]{3}$;

d) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\le\sqrt[3]{9}$;

e) $\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{z+x}\le\sqrt[3]{18}$.

4B. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 3$;

b) $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x}\le 3\sqrt{3}$;

c) $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx}\le 3$;

d) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\le 3$;

e) $\sqrt[3]{x(x+y)}+\sqrt[3]{y(y+z)}+\sqrt[3]{z(z+x)}\le 3\sqrt[3]{2}$.

Dạng 2. Kĩ thuật "khai thác giả thiết"

Trong nhiều bài toán bất đẳng thức, hoặc tìm GTLN, GTNN, đôi khi chúng ta cần cố gắng khai thác giả thiết để thu được những dữ kiện mới "có giá trị hơn".

Phương pháp giải: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (ẩn phụ, tách ghép, chia, …), hoặc sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

5A. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x+2}-y^3=\sqrt{y+2}-x^3$.

a) Tìm GTNN của các biểu thức:

i) $A=x^2+2xy-2y^2+2y+10$;

ii) $B=\dfrac{x^2+7}{y+3}+\dfrac{y^2+7}{x+3}$.

b) Tìm GTLN của biểu thức $C=\dfrac{x}{x^2+4}+\dfrac{y}{y^2+4}$.

5B. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x+1}-y^3=\sqrt{y+1}-x^3$.

a) Tìm GTNN của biểu thức:

i) $A=x^2-xy+y^2+2x+2018$;

ii) $B=\dfrac{x^2+5}{y+2}+\dfrac{y^2+5}{x+2}$.

b) Tìm GTLN của biểu thức $C=\dfrac{x}{x^2+9}+\dfrac{y}{y^2+9}$.

6A. Cho các số $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z+xy+yz+zx=6xyz$.

Chứng minh $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\ge 3$.

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2013 – 2014)

6B. Cho các số $x,y,z>0$ thỏa mãn:

$2(x+y+z)+xy+yz+zx=9xyz$.

Chứng minh $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq 3$.

7A. Cho các số thực $x\geq 1, y\geq 1, z\geq 1$ thỏa mãn $xy+yz+zx=9$. Tìm GTNN và GTLN

của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm hcoj 2017 – 2018)

7B. Cho các số thực $x\geq 1, y\geq 1, z\geq 1$ thỏa mãn $x+y+z=4$. Tìm GTNN và GTLN

của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

8A. Cho các số thực *x, y* thỏa mãn $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y$. Tìm GTLN và GTNN của

biểu thức: $P=x+y$.

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2016 – 2017)

8B. Cho các số thực *x, y* thỏa mãn $x-\sqrt{x+1}=\sqrt{y+1}-y$. Tìm GTLN và GTNN của

biểu thức: $P=x+y+2017$.

9A. Cho các số thực $x, y>0$ thỏa mãn $xy+4\leq 2y$.

a) Tìm GTNN của biểu thức $A=\frac{x^2+2y^2}{xy}$.

b) Tìm GTLN của các biểu thức:

i) $B=\frac{xy}{x^2+2y^2}$; ii) $C=\frac{xy}{(x+y)^2}$.

9B. Cho các số thực $x, y>0$ thỏa mãn $xy+9\leq 3x$.

a) Tìm GTNN của biểu thức $A=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

b) Tìm GTLN của các biểu thức:

i) $B=\frac{xy}{x^2+y^2}$; ii) $C=\frac{xy}{(x+4y)^2}$.

Dạng 3. Kĩ thuật "Cô-si ngược dấu"

Có một số bài toán mà khi đọc đề, ta có thể nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức Cô-si. Tuy nhiên nếu làm như vậy đôi khi sẽ gặp tình huống bị ngược dấu. Và kĩ thuật "Cô-si ngược dấu" được sinh ra để giải quyết vấn đề này.

Phương pháp giải: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (như thêm bớt hoặc tách ghép…) để đưa bài toán từ "trạng thái ngược dấu" về "trạng thái xuôi dấu".

10A. Cho các số $a,\ b,\ c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$;

b) $\dfrac{a^3}{1+b^2}+\dfrac{b^3}{1+c^2}+\dfrac{c^3}{1+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$;

c) $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\ge\dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge 3$;

e) $\dfrac{a}{b^3+ab}+\dfrac{b}{c^3+bc}+\dfrac{c}{a^3+ca}\ge\dfrac{3}{2}$.

10B. Cho các số $a,\ b,\ c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\ge\dfrac{1}{2}$;

b) $\dfrac{a}{1+9b^2}+\dfrac{b}{1+9c^2}+\dfrac{c}{1+9a^2}\ge\dfrac{1}{2}$;

c) $\dfrac{1}{9a^2+1}+\dfrac{1}{9b^2+1}+\dfrac{1}{9c^2+1}\ge\dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{a+1}{9b^2+1}+\dfrac{b+1}{9c^2+1}+\dfrac{c+1}{9a^2+1}\ge 2$.

11A. Cho các số dương *a, b, c* có tích bằng 1. Chứng minh:

$$a+b+c\ge\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}.$$

11B. Cho các số dương *a, b, c* có tích bằng 1. Chứng minh:

$$a+b+c\ge\frac{a+2}{b+2}+\frac{b+2}{c+2}+\frac{c+2}{a+2}.$$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

12. Cho $x\ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức $P=x+\dfrac{2}{x}$.

13. Cho $x,\ y>0$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$;

b) $B=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{3xy}{x^2+xy+y^2}$;

c) $C=\dfrac{(x-y)^2}{4xy}+\dfrac{xy}{(x+y)^2}$;

d) $D=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\right)^2}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\right)^2}$.

14. Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\le 3\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x+2y+3z}+\sqrt{y+2z+3x}+\sqrt{z+2x+3y}\le 3\sqrt{6}$;

c) $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx}\le 3$;

d) $\sqrt[3]{x(y+z)}+\sqrt[3]{y(z+x)}+\sqrt[3]{z(x+y)}\le 3\sqrt[3]{2}$;

e) $\sqrt[3]{3x+5y}+\sqrt[3]{3y+5z}+\sqrt[3]{3z+5x}\le 6$.

15. Cho các số x, $y>0$ thỏa mãn $x+\frac{4}{y}\le 2$.

a) Tìm GTNN của biểu thức: $A=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$;

b) Tìm GTLN của các biểu thức:

i) $B=\frac{xy}{x^2+y^2}$; ii) $C=\frac{xy}{x^2+2y^2+3xy}$.

16. Cho *x, y* là các số dương thỏa mãn điều kiện $x\ge 2y$. Tìm GTNN của biểu thức

$$M=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2012 – 2013)

17. Cho các số x, y, z, $t>0$ và $x+y+z+t=4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\ge 2.$$

18. Cho các số a, b, $c>0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ca}+\sqrt{2c+ab}.$$

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2014 – 2015)

19. Cho các số không âm *a, b* thỏa mãn $a^2+b^2=4$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M=\frac{ab}{a+b+2}.$$

(Trích Đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2015 – 2016)

20. Cho $a\ge 2017$ và $b\ge 2018$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{a-2017}}{a+1}+\frac{\sqrt{b-2018}}{b+2}.$$

§2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bài toán về giải phương trình, nhất là phương trình chứa căn thức trong đề thi vào 10 THPT thường rất đa dạng và có nhiều cách giải khác nhau. Trong bài này, chúng tôi chỉ giới thiệu một số dạng toán thường gặp về giải phương trình chứa căn thức, đó là:

- Giải phương trình bằng cách sử dụng các phép biến đổi đại số;
- Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ;
- Giải phương trình bằng phương pháp đánh giá.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải phương trình bằng cách sử dụng các phép biến đổi đại số.

Phương pháp giải: Các phép biến đổi đại số thường sử dụng để khử căn thức là:

- Thêm bớt hạng tử;
- Nâng lên lũy thừa cả hai vế;
- Phép nhân liên hợp;
- …

Từ đó đưa phương trình đã cho về phương trình đơn giản, đã biết cách giải.

1A. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}}-\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}\left(3x^3-x^2+6x-2\right).$$

1B. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\left(2x^3+x^2+2x+1\right).$$

2A. Giải phương trình:

a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$

b) $3\sqrt{5x+2}=x^2+2.$

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-5}-2}+\sqrt{x-3\sqrt{2x-5}+2}=2\sqrt{2}.$

2B. Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}.$

b) $\sqrt{x^2-2x+1}-5|x-1|=4.$

Dạng 2. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Phương pháp giải: Đặt một, hai hoặc ba biểu thức phức tạp bằng ẩn mới (gọi là ẩn phụ) và giải phương trình thu được, sau đó tìm được nghiệm. Ta thường gặp các loại sau:

Loại 1. Sử dụng một ẩn phụ

3A. Giải phương trình $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{3}\left(x^2+1\right)=3\sqrt{3}x$.

3B. Giải phương trình $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$

Loại 2. Sử dụng hai ẩn phụ

4A. Giải phương trình:

a) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3.$

b) $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{10-x^2}=5.$

4B. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}.$

b) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6.$

*Loại 3.*Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về hệ phương trình đối xứng.

5A. Giải phương trình: $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

5B. Giải phương trình: $x^3-3\sqrt[3]{3x+2}=2$.

Loại 4. Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về phương trình bậc hai đối với một ẩn.

6A. Giải phương trình: $2x^2+3x+7=\left(x+5\right)\sqrt{2x^2+1}$.

6B. Giải phương trình:

a) $x^2+3x+5=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+5}$.

b) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$.

Dạng 3. Giải phương trình bằng phương pháp đánh giá.

Phương pháp giải: Ta sử dụng kiến thức sau: Phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ nếu luôn có

$f\left(x\right)\ge m$ và $g\left(x\right)\le m$ thì tương đương với $\begin{cases}f\left(x\right)=m\\g\left(x\right)=m\end{cases}$.

7A. Giải phương trình

$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

7B. Giải phương trình

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}.$

b) $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16.$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Giải các phương trình sau

8. $4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1.$

9. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$.

10. $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}.$

11. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$

12. $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1.$

13. $4\sqrt{x^2+x+1}=1+5x+4x^2-2x^3-x^4.$

14. $x+1=(2x+1)\sqrt{\sqrt{x+1}+2}.$

15. a) $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{10-x^2}=5.$

b) $\sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{2x-\sqrt{x+1}+1}=2\sqrt{x+1}+1.$

16. a) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$ b) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

17. a) $\sqrt[3]{x^3+5x^2}-1=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}.$

b) $(2x^2-x-5)\sqrt{x^2+x+2}+(2x^2+x+1)\sqrt{x+3}=0.$

18. $3(x^2+2x+2)=10\sqrt{x^3+2x^2+2x+1}.$

19. a) $x=10+\sqrt{10+\sqrt{x}}$. b) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1.$

20. a) $(x^2+3x-4)^2+3(x^2+3x-4)=x+4$ b) $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30.$

21. a) $x^2+3x+5=(x+3)\sqrt{x^2+5}.$ b) $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$.

c) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$.

22. a) $2x^2+3x+7=(x+5)\sqrt{2x^2+1}.$ b) $x^2+4x+7=(x+4)\sqrt{x^2+7}.$

c) $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}.$

23. a) $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}.$ b) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1.$

24. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=x^2-12x+38.$

25. $\sqrt{-x^2+3x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2}.$

26. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$

PHẦN D. GỢI Ý – ĐÁP ÁN
BẤT ĐẲNG THỨC
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN
BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1A *Sai lầm thường gặp:* Vì $x \ge 2 > 0$ nên theo BĐT Cô-Si, ta có:

$P = x + \frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow P_{\min} = 2$

Sai lầm vì dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1\ (KTM\ x \ge 2)$.

Gợi ý hướng giải: Dự đoán $P_{\min}$ đạt được tại $x = 2$.

Ta có $P = mx + \frac{1}{x} + x - mx$. Dấu "=" khi $\begin{cases} mx = \frac{1}{x} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \\ x = 2 \end{cases}$.

Từ đó dẫn đến biến đổi $P = \frac{3x}{4} + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)$ trong đó $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \ge 2\sqrt{\frac{x}{4}.\frac{1}{x}} = 1$ (BĐT Cô-si)

và dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2$. Từ đó tìm được $P_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$

1B Tương tự 1A. Biến đổi $P = \frac{8x}{9} + \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{x}\right)$. Từ đó tìm được: $Q_{\min} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = 3$

2A. ***a)*** Ta có: $A = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + y^2} = t + \frac{1}{t}$ với $t = \frac{x^2 + y^2}{xy} \ge 2$.

Từ kết quả câu 1A, ta có $A_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$.

b) Ta có : $B = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + xy + y^2 - 1} = t + \frac{1}{t} - 1$ với $t = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy} \ge 3$

Từ kết quả của 1B, ta có : $B_{\min} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = y.$

c) Ta có $C = \frac{(x+y)^2}{xy} + \frac{6xy}{(x+y)^2} - 4 = t + \frac{6}{t} - 4$ với $t = \frac{(x+y)^2}{xy}$

Biến đổi $C=\frac{5t}{8}+\left(\frac{3t}{8}+\frac{6}{t}\right)-4\ge\frac{3}{2}$

Tìm được $C_{\min}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow x=y$

d*) Đặt $t=\frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}$

Sử dụng BĐT $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ suy ra $t\ge 3$

Từ kết quả của 1B, ta có : $D_{\min}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x=y=1$

2B ***a)*** Ta có : $A=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2xy}{x^2+y^2}=t+\frac{2}{t}$ với $t=\frac{x^2+y^2}{xy}\ge 2$

Từ $M=\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)\ge 3$, tìm được $M_{\min}=3\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y$

b) Biến đổi ta được $N=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}+\frac{xy}{x^2-xy+y^2}+1=t+\frac{1}{t}+1$ với

$t=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}\ge 1$

Từ đó tìm được $N_{\min}=3\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=y$

c) Biến đổi được $P=\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{4xy}{(x+y)^2}-4=t+\frac{4}{t}-4$ với $t=\frac{(x+y)^2}{xy}\ge 4$

Ta có : $P=\frac{3t}{4}+\left(\frac{t}{4}+\frac{4}{t}\right)\ge 5$ từ đó $P_{\min}=1\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow x=y$

d) Ta có : $Q=t+\frac{1}{t}$ với $t=\frac{(x+y+2)^2}{xy+2(x+y)}\ge 3$

Từ đó tìm được $Q_{\min}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x=y=2$

3A. ***a)*** Biến đổi được : $A=\left(4x+\frac{1}{x}\right)+\left(4y+\frac{1}{y}\right)-3(x+y)\ge 5$

Từ đó: $A_{\min}=5\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

b) Ta có: $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{1}{4}$

Biến đổi được: $B = \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(16xy+\frac{1}{xy}\right)-15xy \ge \frac{25}{4}$

Từ đó ta biến đổi được: $B_{\min} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

c) Ta có $C \ge 2\left(xy+\frac{1}{xy}\right) = 2\left[\left(16xy+\frac{1}{xy}\right)-15xy\right]$

Mà $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{1}{4}$, từ đó ta suy ra được $C \ge \frac{17}{2}$

Vậy $C_{\min} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

d) <u>*Cách 1*</u>. Sử dụng BĐT: $a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$, ta có:

$$D \ge \frac{\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^2}{2} = \frac{A^2}{2} \ge \frac{25}{2} \Rightarrow D_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

<u>*Cách 2.*</u> Sử dụng BĐT Cô-Si, ta có :

$$D \ge 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) = 2B \ge \frac{25}{2} \Rightarrow D_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

<u>*Cách 3.*</u> Biến đổi ta được :

$$D = x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+4 = C+4 \ge \frac{25}{2} \Rightarrow D_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

3B. ***a)*** Biến đổi được : $A = \left(2x+\frac{2}{x}\right)+\left(2y+\frac{2}{y}\right)-(x+y) \ge 6$

Từ đó $A_{\min} = 6 \Leftrightarrow x = y = 1$

b) Biến đổi được $B = 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\left(xy+\frac{1}{xy}\right)-3xy \ge 9$

Trong đó $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = 1$. Vậy $B_{\min} = 9 \Leftrightarrow x = y = 1$

c) Tương tự 3A.

d) Tương tự 3A, ta có:

Cách 1. $D \ge \frac{A^2}{2} \ge 18 \Rightarrow D_{\min} = 18 \Leftrightarrow x = y = 1.$

Cách 2. $D \ge 2B \ge 18 \Rightarrow D_{\min} = 18 \Leftrightarrow x = y = 1.$

Cách 3. $D = C + 8 \ge 18 \Rightarrow D_{\min} = 18 \Leftrightarrow x = y = 1$

4A. ***a)*** Ta có : $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3x+1)$

Tương tự ta được : $\sqrt{y} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3y+1);\ \sqrt{z} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3z+1)$

Do đó : $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

b) Áp dụng BĐT Cô-si ta có : $\sqrt{x+2y} \le \frac{x+2y+1}{2}$

Đánh giá tương tự với các biểu thức : $\sqrt{y+2z};\ \sqrt{z+2x}$.

Từ đó ta được : $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x} \le \frac{3(x+y+z)+3}{2} = 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

c) Ta có : $\sqrt[3]{xy} = \frac{\sqrt[3]{3x.3y.1}}{\sqrt[3]{9}} \le \frac{3x+3y+1}{3\sqrt[3]{9}}$

Đánh giá tương tự với các biểu thức : $\sqrt[3]{yz};\ \sqrt[3]{zx}$

Từ đó suy ra : $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx} \le \sqrt[3]{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

d) Ta có : $\sqrt[3]{x} = \frac{\sqrt[3]{3x.1.1}}{\sqrt[3]{3}} \le \frac{3x+1+1}{3\sqrt[3]{3}}$.

Đánh giá tương tự với các biểu thức : $\sqrt[3]{y};\ \sqrt[3]{z}$

Từ đó suy ra : $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z} \le \frac{3(x+y+z)+6}{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{9}$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

e) Ta có : $\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{z+x}\le\frac{6(x+y+z)+12}{3\sqrt[3]{12}}=\sqrt[3]{18}$.

4B. Tương tự **4A.**

a) Ta có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{(x+1)+(y+1)+(z+1)}{2}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

b) Gợi ý : $\sqrt{x+2y}+\sqrt{y+2z}+\sqrt{z+2x}\le\frac{3(x+y+z)+9}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

c) Gợi ý : $\sqrt[3]{xy}\le\frac{x+y+1}{3}$

Ta có : $\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{zx}\le\frac{2(x+y+z)+3}{3}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

d) Ta có : $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\le\frac{x+y+z+6}{3}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

e) Gợi ý : $\sqrt[3]{x(x+y)}\le\frac{2x+x+y+2}{3\sqrt[3]{4}}$

Ta có : $\sqrt[3]{x(x+y)}+\sqrt[3]{y(y+z)}+\sqrt[3]{z(z+x)}\le3\sqrt[3]{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

5A. Điều kiện $x\ge-2;\ y\ge-2$

Biến đổi giả thiết ta có : $\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+x^3-y^3=0$

<u>*Cách 1 :*</u> TH1 : $x>y\ge-2$ ta có : $\sqrt{x+2}>\sqrt{y+2}$ và $x^3>y^3$

Suy ra: $\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+x^3-y^3>0$ (mâu thuẫn)

TH2: $-2\le x<y$ suy ra $\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}+x^3-y^3<0$

Vậy ta được: $x=y$

<u>*Cách 2:*</u> Trục căn thức ta có: $\frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\left(x^2+xy+y^2\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$ chứng minh được

$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+\left(x^2+xy+y^2\right)>0,\ \forall x,y\geq -2$

a) *i)* Ta có: $A=x^2+2x+10=(x+1)^2+9\geq 9,\ \ \forall x\geq -2$

Vậy $A_{\min}=9\Leftrightarrow x=-1=y$

ii) Biến đổi thành:

$B=\frac{2\left(x^2+7\right)}{x+3}=2\left[x+3+\frac{16}{x+3}-6\right]\geq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $(x+3)^2=16$

$x+3\geq 0\Rightarrow x=1$. Mà $x+3>0$ nên $B\geq 4$. Vậy $B_{\min}=4\Leftrightarrow x=1=y$

b) Ta có: $C=\frac{2x}{x^2+4}$. Xét $\frac{1}{C}=\frac{x^2+4}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

+ Nếu $x>0\Rightarrow \frac{1}{C}\geq 2\Leftrightarrow 0<C\leq \frac{1}{2}$

+ Nếu $-2<x<0\Rightarrow \frac{1}{C}\leq 2\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq C<0$

Vậy $C_{\max}=\frac{1}{2}$ khi $x=y=2;\ \ C_{\min}=-\frac{1}{2}$ khi $x=y=-2$

5B. Tương tự 5A, ta có: $x=y$

a) *i)* $A_{\min}=2017\Leftrightarrow x=-1$ *ii)* $B_{\min}=4\Leftrightarrow x=1$

b) $C_{\max}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=3$

6A. Biến đổi giả thiết về dạng : $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6$

Đặt $a=\frac{1}{x};\ \ b=\frac{1}{y};\ \ c=\frac{1}{z}$. Bài toán thành :

Chứng minh $a^2+b^2+c^2\geq 3$ với $a,\ b,\ c>0$ thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$

Thật vậy, sử dụng BĐT Cô-si, ta có:

$a^2+b^2+c^2=a^2+1+b^2+1+c^2+1-3\ge 2(a+b+c)-3$

$2(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2\ge 2(ab+bc+ca)$

Cộng theo vế của hai BĐT trên ta được :

$3(a^2+b^2+c^2)\ge 2(a+b+c+ab+bc+ca)-3=9$

Do đó $a^2+b^2+c^2\ge 3$ hay $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

6B. Tương tự như ***6A*.**

Bài toán trở thành: Chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge 3$ với $a,\ b,\ c>0$ thỏa mãn

$a+b+c+2ab+2bc+2ca=9$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2\ge 2(a+b+c)-3$

$4(a^2+b^2+c^2)\ge 4(ab+bc+ca)$

Từ đó ta được: $5(a^2+b^2+c^2)\ge 15$

Do đó: $a^2+b^2+c^2\ge 3$ hay $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

7A. Sử dụng BĐT Cọ-si, ta có:

$P=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}\ge xy+yz+zx=9$

Suy ra : $P_{\min}=9\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$

Ta lại có : $(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)\ge 0$

$\Rightarrow 2(x+y+z)\le xy+yz+zx+3\Rightarrow x+y+z\le 6$

Bởi vậy $P=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\le 18$

Từ đó : $P_{\max}=18$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1,\ z=4$

7B. Sử dụng BĐT : $x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}$, ta được : $P\ge\frac{16}{3}$

Vậy $P_{\min}=\frac{16}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{4}{3}$

Tương tự 7A, ta có $xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)-3=5$, nên :

$P=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\le 6$

Khi $x=y=1,\ z=2\Rightarrow P=6$, từ đó $P_{\max}=6$

8A. Điều kiện $x\ge -6,\ y\ge -6$, biến đổi giả thiết ta có :

$x+y=\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}$

Bởi vậy $P=x+y\ge 0$, mặt khác $P^2=P+12+2\sqrt{(x+6)(y+6)}$

Suy ra $P^2\ge P+12\Rightarrow (P-4)(P+3)\ge 0\Rightarrow P\ge 4$ (Vì $P\ge 0$)

Vậy $P_{\min}=4$. Dấu bằng xảy ra khi $x=-6,\ y=10$

Sử dụng BĐT Cô-si, ta có :

$2\sqrt{(x+6)(y+6)}\le x+y+12=P=12$

Suy ra $P^2\le 2P+24\Rightarrow (P-6)(P+4)\le 0\Rightarrow P\le 6$ (do $P>0$)

Vậy $P_{\max}=6$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

8B. Tương tự **8A**.

Cần tìm GTLN, GTNL của biểu thức $(x+y)$

Từ đó tìm được : $P_{\min}=2019\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$

$P_{\max}=2018+\sqrt{5}$ khi $x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

9A. Sử dụng BĐT Cô-si ta có:

$2y\ge xy+4\ge 4\sqrt{xy}\Rightarrow \frac{y}{x}\ge 4$

a) Biến đổi được $A=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{16x}\right)+\frac{31}{16}.\frac{y}{x}\ge \frac{33}{4}$

Từ đó tìm được : $A_{\min}=\frac{33}{4}\Leftrightarrow x=1,\ y=4$

b) *i)* Ta có : $A,B>0\Rightarrow B=\frac{1}{A}\le\frac{4}{33}$

Vậy $B_{\max}=\frac{4}{33}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=1,y=4$

ii) Xét biểu thức $\frac{1}{C}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{16x}\right)+\frac{15}{16}.\frac{y}{x}\ge\frac{25}{4}$

Do $C>0$ nên $C\le\frac{4}{25}$

Vậy $C_{\max}=\frac{4}{25}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=1,y=4$

9B. Tương tự **9A**, ta có $\frac{x}{y}\ge 4$. Từ đó tìm được

a) $A_{\min}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow x=6,\ y=\frac{3}{2}$

b) *i)* $B_{\max}=\frac{4}{17}\Leftrightarrow x=6,\ y=\frac{3}{2}$ *ii)* $C_{\max}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow x=6,\ y=\frac{3}{2}$

10A. ***a)*** Ta có : $\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{b}{2}$

Tương tự : $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2};\quad \frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$

Do đó $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

b) Gợi ý biến đổi : $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab}{2}$

Biến đổi và đánh giá tương tự với các biểu thức : $\frac{b}{1+c^2};\quad\frac{c}{1+a^2}$

Từ đó ta được $VT\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}\ge\frac{3}{2}$

Do $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

c) Chú ý $\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\geq 1-\frac{a}{2}$

Tương tự $\frac{1}{b^2+1}\geq 1-\frac{b}{2};\ \ \frac{1}{c^2+1}\geq 1-\frac{c}{2}$

Do đó chứng minh được $VT\geq 3-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

d) Chú ý biến đổi $\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\geq a+1-\frac{(a+1)b}{2}$

Biến đổi và đánh giá tương tự với các biểu thức $\frac{b+1}{c^2+1};\ \ \frac{c+1}{a^2+1}$

Từ đó ta được: $VT\geq 3+\frac{a+b+c}{2}-\frac{ab+bc+ca}{2}$

Do $ab+bc+ca\leq \frac{(a+b+c)^2}{3}=a+b+c\Rightarrow VT\geq 3$

đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

e) Chú ý rằng $\frac{a}{b^3+ab}=\frac{1}{b}-\frac{b}{a+b^2}\geq \frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{a}}$

Biến đổi và đánh giá tương tự với các biểu thức $\frac{b}{c^3+bc};\ \ \frac{c}{a^3+ca}$

Ta được $VT\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{a}}-\frac{1}{2\sqrt{b}}-\frac{1}{2\sqrt{c}}$

Sử dụng BĐT Cô-si ta có: $\frac{1}{2\sqrt{a}}\leq \frac{1}{4a}+\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{a}\geq 2-a$, từ đó

$\frac{1}{a}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\geq \frac{1}{a}-\frac{1}{4a}-\frac{1}{4}=\frac{3a}{4}-\frac{1}{4}\geq \frac{3}{4}(2-a)-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}-\frac{3a}{4}$.

Suy ra được $VT\geq \frac{15}{4}-\frac{3}{4}(a+b+c)=\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

10B. a) Chú ý $\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\geq a-\frac{b}{2}$.

b) Chú ý $\frac{a}{1+9b^2}=a-\frac{9ab^2}{1+9b^2}\geq a-\frac{3ab}{2}$ và $ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}$.

c) Chú ý $\frac{1}{9a^2+1}=1-\frac{9a^2}{9a^2+1}\ge 1-\frac{3a}{2}$.

d) Chú ý $\frac{a+1}{9b^2+1}=a+1-\frac{9(a+1)b^2}{9b^2+1}\ge a+1-\frac{3(a+1)b}{2}$ và $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$.

11A. Gợi ý: Biến đổi $a+1-\frac{a+1}{b+1}=\frac{(a+1)b}{b+1}$.

Đưa bài tóab về chứng minh $\frac{(a+1)b}{b+1}+\frac{(b+1)c}{c+1}+\frac{(c+1)a}{a+1}\ge 3$.

Sử dụng BĐT Cô-si cho ba số hạng ở VT, chú ý abc = 1.

Từ đó suy ra ĐPCM. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

11B. Gợi ý: Biến đổi $a+2-\frac{a+2}{b+2}=\frac{a+2}{2}+\frac{(a+2)b}{2(b+2)}$.

Đưa bài toán về chứng minh BĐT:

$\frac{a+b+c}{2}+\frac{(a+2)b}{2(b+2)}+\frac{(b+2)c}{2(c+2)}+\frac{(c+2)a}{2(a+2)}\ge 3$.

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, chú ý abc = 1, ta có

$a+b+c\ge 3;\ \frac{(a+2)b}{(b+2)}+\frac{(b+2)c}{(c+2)}+\frac{(c+2)a}{(a+2)}\ge 3$.

Từ đó suy ra ĐPCM. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

12. Đáp số: $P_{min}=3\Leftrightarrow x=2$.

13. a) Đặt $t=\frac{x^2+y^2}{xy}\Rightarrow t\ge 2$, ta có $A=t+\frac{4}{t}$.

$\Rightarrow A_{min}=4\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y$.

b) Đặt $t=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}\Rightarrow t\ge 3$, ta có $B=t+\frac{3}{t}-1$.

$\Rightarrow B_{min}=3\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x=y$.

c) Đặt $t=\frac{(x+y)^2}{xy}\Rightarrow t\ge 4$, ta có $C=\frac{t}{4}+\frac{1}{t}-1$.

$\Rightarrow C_{min}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow x=y$.

d) Đặt $t=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1)^2}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}\Rightarrow t\ge 3$, ta có $D=t+\frac{1}{t}$.

$\Rightarrow D_{min}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x=y=1$.

14. a) Chú ý $\sqrt{x+y}=\frac{\sqrt{2\cdot(x+y)}}{\sqrt{2}}\le\frac{x+y+2}{2\sqrt{2}}$.

b) Chú ý $\sqrt{x+2y+3z}=\dfrac{\sqrt{6\cdot(x+2y+3z)}}{\sqrt{6}}\le\dfrac{x+2y+3z+6}{2\sqrt{6}}$.

c) Chú ý $\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{x\cdot y\cdot 1}\le\dfrac{x+y+1}{3}$.

d) Chú ý $\sqrt[3]{x(y+z)}=\dfrac{\sqrt[3]{2\cdot 2x\cdot(y+z)}}{\sqrt[3]{4}}\le\dfrac{2x+y+z+2}{3\sqrt[3]{4}}$.

e) Chú ý $\sqrt[3]{3x+5y}=\dfrac{\sqrt[3]{8\cdot 8\cdot(3x+5y)}}{4}\le\dfrac{3x+5y+16}{12}$.

15. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có $2\ge x+\dfrac{4}{y}\ge 4\sqrt{\dfrac{x}{y}}\Rightarrow\dfrac{y}{x}\ge 4$.

Đặt $t=\dfrac{y}{x}\Rightarrow t\ge 4$. Ta có:

a) $A=t+\dfrac{1}{t}\Rightarrow A_{min}=\dfrac{17}{4}\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow x=1,\ y=4$.

b) i) $B=\dfrac{1}{A}\Rightarrow B_{max}=\dfrac{4}{17}\Leftrightarrow x=1,\ y=4$.

ii) $\dfrac{1}{C}=2t+\dfrac{1}{t}+3\Rightarrow C_{max}=\dfrac{4}{45}\Leftrightarrow x=1,\ y=4$.

16. Đặt $t=\dfrac{x}{y}\ge 2$, ta có $M=t+\dfrac{1}{t}\Rightarrow M_{min}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=2y$.

17. Chú ý $\dfrac{1}{x^2+1}=1-\dfrac{x^2}{x^2+1}\ge 1-\dfrac{x}{2}$.

18. Biến đổi được:

$\sqrt{2a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\dfrac{2a+b+c}{2}$.

Biến đổi tương tự với các biểu thức $\sqrt{2b+ca}$; $\sqrt{2c+ab}$.

Từ đó suy ra $Q\le 2(a+b+c)=4$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{2}{3}$, từ đó $Q_{max}=4$.

19. Ta có $ab=\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}=\dfrac{(a+b)^2-4}{2}$.

Từ đó biến đổi $M=\dfrac{a+b-2}{2}$.

Sử dụng BĐT: $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow a+b\le 2\sqrt{2}$ nên $M\le\sqrt{2}-1$.

Vậy $M_{max}=\sqrt{2}-1$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=\sqrt{2}$.

20. Ta có: $\sqrt{a-2017}=\dfrac{\sqrt{2018\cdot(a-2017)}}{\sqrt{2018}}\le\dfrac{a+1}{2\sqrt{2018}}$.

$$\sqrt{b-2018}=\frac{\sqrt{2020\cdot(b-2018)}}{\sqrt{2020}}\le\frac{b+2}{2\sqrt{2020}}.$$

Do đó $P\le\frac{1}{2\sqrt{2018}}+\frac{1}{2\sqrt{2020}}\Rightarrow P_{max}=\frac{1}{2\sqrt{2018}}+\frac{1}{2\sqrt{2020}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=4035,\ b=4038$.

BÀI 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

1A. $VP=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)\Rightarrow$ ĐK: $x\ge\frac{1}{3}$.

Ta có $VT=\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$.

$PT\Leftrightarrow x-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x-1)(x^2+2)$. Tìm được $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

1B. Tương tự 1A. ĐK $x\ge-\frac{1}{2}$. PT tương đương

$$\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(2x+1)(x^2+1)\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x+1)(x^2+1)$$

$\Leftrightarrow(2x+1)x^2=0$. Tìm được $S=\left\{-\frac{1}{2};0\right\}$.

2A. a) ĐK: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$.

$PT\Leftrightarrow(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0$

$$\Leftrightarrow(x-5)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right]=0$$

Với $-\frac{1}{3}\le x\le 6$ thì $\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right]>0$

Vậy $S=\{5\}$.

b) $PT\Leftrightarrow 5x+2+3\sqrt{5x+2}+\frac{9}{4}=x^2+2+5x+2+\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x+2}+\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ với $x\ge\frac{5}{2}$ có

Trường hợp 1. $\sqrt{5x+2}=x+1$ tìm được $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$;

Trường hợp 2. $\sqrt{5x+2}=-(x+4)$ (vô nghiệm).

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-5}-2}+\sqrt{x-3\sqrt{2x-5}+2}=2\sqrt{2}$.

Nhân hai vế với $\sqrt{2}$ đưa về $\left|\sqrt{2x-5}+1\right|+\left|\sqrt{2x-5}-3\right|=4$ với $x\ge\frac{5}{2}$.

- Với $\sqrt{2x-5}\ge 3$ thì $\sqrt{2x-5}+1>0$ nên có $\sqrt{2x-5}+1+\sqrt{2x-5}-3=4$.

Tìm được x = 7.

- Với $0\le\sqrt{2x-5}<3$ thì $\sqrt{2x-5}+1-\sqrt{2x-5}=4$ đúng với mọi x thuộc tập xác định.

Vậy $\frac{5}{2}\le x\le 7$.

2B. a) ĐK: $x\ge\sqrt[3]{2}$. PT $\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Ta có: $1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\frac{x+3}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2+3}<2$

$\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2$ nên $x-3=0\Leftrightarrow x=3$. Vậy $S=\{3\}$.

b) PT $\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+16}-5|x-1|=4$;

Sử dụng BĐT $\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|$ nên

$$\sqrt{(x-1)^2+16}-5|x-1|\le|x-1|+4-5|x-1|=4-4|x-1|$$

Từ đó $4\le 4-4|x-1|\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

3A. Từ phương trình ta thấy x > 0. Chia cả 2 vế cho x ta được

$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\sqrt{3}$. Đặt: $t=x+\frac{1}{x}$, $t\ge 2$

PT trở thành: $\sqrt{t^2-1}=\sqrt{3}(3-t)\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 3\\t^2-9t+14=0\end{cases}\Leftrightarrow t=2$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=1$. Vậy $S=\{1\}$.

3B. PT $\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 1-x=1+4x^4+4x^2(1-x^2)-4x^2-4x\sqrt{1-x^2}+8x^3\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow x(1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2})=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}=0\ (*)\end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$. ĐK: $t\ge 0$. Ta có $x^2=1-t^2$.

PT trở thành: $1-4t+8t(1-t^2)=0$

$\Leftrightarrow 8t^3-4t-1=0 \Leftrightarrow (2t+1)(4t^2-2t-1)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Tìm được $x=\pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Thử lại loại nghiệm $x=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Vậy $S=\left\{0;-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}\right\}$.

4A. Đặt $\begin{cases}\sqrt{4x^2+5x+1}=a\\ 2\sqrt{x^2-x+1}=b\end{cases}$. ĐK: $a,b>0$.

PT trở thành: $a-b=a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b\\ a+b=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+5x+1=4x^2-4x+4\\ \sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{4x^2+5x+1}=1-2\sqrt{x^2-x+1}\ (*)\end{array}\right.$

Ta có (*) vô nghiệm. Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

4B. ĐK: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Bình phương 2 vế ta có:

$\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=x^2+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=(x^2+2x)-(2x-1)$

Đặt: $\begin{cases}x^2+2x=a\\ 2x-1=b\end{cases}$. Khi đó: $ab=a^2-b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}b\\ a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b\end{array}\right.$

Do $a,b\ge 0$ nên $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b \Leftrightarrow x^2+2x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(2x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^2+2(1-\sqrt{5})x+(\sqrt{5}+1)=0;\ \Delta'<0$ (vô nghiệm)

Vậy $S\in\varnothing$.

5A. a) PT $\Leftrightarrow x^3+2x=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}$

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}$, ta được $x^3+2x=t^3+2t$

$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2)+2(x-t)=0 \Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2+2)=0$

Vì $x^2+xt+t^2+2=\left(x+\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3t^2}{4}+2>0$ nên x = t.

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$.

Tìm được $S=\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5B. Đặt: $\sqrt[3]{3x+2}=t$. PT trở thành $x^3=3t+2$. Lại có: $t^3=3x+2$

Ta có hệ: $\begin{cases}x^3=3t+2\\t^3=3x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=3t+2\\x^3-t^3=3(t-x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=3t+2\\(x-t)(x^2+tx+t^2+3)=0\ (*)\end{cases}$. Vì $x^2+tx+x^2+3>0,\ \forall x,t$

$\Rightarrow x-t=0\Leftrightarrow x=t\Rightarrow x^3-3x-2=0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-2)=0$

Tìm được $S=\{-1;2\}$.

6A. PT $\Leftrightarrow 2x^2+1-(x+5)\sqrt{2x^2+1}+3x+6=0$.

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}\ (t\ge 1)$. PT trở thành: $t^2-(x+5)t+3x+6=0$

$\Delta=\left[-(x+5)\right]^2-4(3x+6)=(x-1)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=x+2\end{array}\right.$.

$t=3$ tìm được $x=\pm 2$.

$t=x+2$ tìm được $x=2\pm\sqrt{7}$. Vậy $S=\left\{\pm 2;2\pm\sqrt{7}\right\}$.

6B. a) PT $\Leftrightarrow (x^2+5-x\sqrt{x^2+5})+(-3\sqrt{x^2+5}+3x)=0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}-3)=0$

Vậy $S=\{\pm 2\}$.

b) ĐK: $x\ge -1$. Ta có $x=0$ không nghiệm của PT nên ta nhân hai vế phương trình với $\sqrt{1+x}-1\ne 0$ ta được:

$x(\sqrt{1+x}+2x-5)=x(\sqrt{1+x}-1)$

$\Leftrightarrow(\sqrt{1+x}+2x-5)=(\sqrt{1+x}-1)\Leftrightarrow x=2$. Vậy $S=\{2\}$.

Cách khác: Tương tự 1A. Phân tích $x=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}-1)$.

7A. PT $\Leftrightarrow\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$

Ta có: $VT\ge 5,\ VP\le 5$. Vì vậy VT = VP = 5.

Dấu "=" $\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$. Vậy $S=\left\{\dfrac{21+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

7B. a) ĐK: $x\ge 0$. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2\le\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+x+1\right]\left[\frac{1}{x+1}+\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right]=x+9$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$

b) ĐK: $-1\le x\le 1$. Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\sqrt{4(1-x^2)x^2}\le\frac{4(1-x^2)+x^2}{2}=\frac{4-3x^2}{2}$$

$$\Rightarrow 13\sqrt{x^2-x^4}\le\frac{52-39x^2}{4}\ (1)$$

$$\sqrt{9x^2.4(1+x^2)}\le\frac{13x^2+4}{2}\Rightarrow 9\sqrt{x^2+x^4}\le\frac{39x^2+12}{4}\ (2)$$

Cộng 2 vế (1) và (2) ta có: $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}\le 16$.

Dấu $"="\Leftrightarrow\begin{cases}4(1-x^2)=x^2\\9x^2=4(1+x^2)\end{cases}$. Tìm được $S=\left\{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$.

8. ĐK: $x\ge\frac{3}{2}$. PT $\Leftrightarrow 4x^2-6x+\frac{9}{4}=(\sqrt{2x+3})^2-\sqrt{2x+3}+\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Tìm được $S=\left\{\frac{5-\sqrt{21}}{4};\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

9. PT $\Leftrightarrow 2x+3\sqrt[3]{x^2-1}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1})=5x$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{5x}=x\Rightarrow 4x^3-5x=0\Rightarrow x=0;\ x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Do phép thay $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$ là không tương đương nên cần thử lại các giá trị của x vừa tìm được.

Vậy $S=\left\{0;\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

10. PT $\Leftrightarrow(\sqrt{x+3}-2x)(\sqrt{x+1}-1)=0$.

Tìm được: x = 0; x = 1. Vậy $S=\{0;1\}$.

11. Tương tự **2B**.

$$\text{PT}\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x-1}+\sqrt{3x^2-7x+3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right)=0$$

Do $\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x-1}+\sqrt{3x^2-7x+3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}>0$

Nên $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ (TMĐK tồn tại căn thức). Vậy $S=\{2\}$.

12. Tương tự 3A.

Ta có x = 0 không phải là nghiệm, chia cả hai vế cho x ta được:

$\left(x-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2$. Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$

Ta có $t^3+t-2=0\Leftrightarrow t=1$. Tìm được $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

13. Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1},\ t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. PT trở thành:

$4t=-t^4+7t^2-5\Leftrightarrow t^4-6t^2+9-(t^2-4t+4)=0$

$\Leftrightarrow (t^2-3)^2-(t-2)^2=0\Leftrightarrow (t^2-t-1)(t^2+t-5)=0$ (*)

(*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-t-1=0\\t^2+t-5=0\end{array}\right.$. Tìm được: $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

Tìm được $S=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}\right\}$.

14. ĐK: $x\ge-\frac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{\sqrt{x+1}+2}\ \ (t>\sqrt{2})$,

Ta có hệ $\left\{\begin{array}{l}x+1+t=2(x+1)t\\t^2-\sqrt{x+1}=2\end{array}\right.$

$\Rightarrow x+1+t=(t^2-\sqrt{x+1})(x+1)t$

$\Leftrightarrow (t\sqrt{x+1}+1)(t+x+1-t^2\sqrt{x+1})=0$

$\Leftrightarrow (t\sqrt{x+1}+1)(t-2\sqrt{x+1})=0\Leftrightarrow t=2\sqrt{x+1}$

$\sqrt{\sqrt{x+1}+2}=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$.

Tìm được $S=\left\{\frac{-15+\sqrt{33}}{32}\right\}$.

15. a) Đk: $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}$

Đặt $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x^2+3}=a\\\sqrt{10-x^2}=b\end{array}\right.$ (*). Điều kiện $a\ge\sqrt{3};\ 0\le b\le\sqrt{10}$

Khi đó ta có hệ: $\left\{\begin{array}{l}a+b=5\\a^2+b^2=13\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a+b=5\\(a+b)^2-2ab=13\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a+b=5\\ab=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=2\\b=3\end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l}a=3\\b=2\end{array}\right.$

Tìm được $S=\left\{\pm\sqrt{6};\pm1\right\}$.

b) Đặt: $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2x+\sqrt{x+1}+1}=a\\\sqrt{2x-\sqrt{x+1}+1}=b\end{array}\right.$, $a;b\ge0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b=2\sqrt{x+1}+1 \\ a^2-b^2=2\sqrt{x+1}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{x+1}+1 \\ b=\sqrt{x+1} \end{cases}.$$

Tìm được x = 3.

16. a) Tương tự 2A.

Cách 1. ĐK: $x>0$. Nhân hai vế phương trình với:

$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\neq 0$

Ta được: $6x=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$ (*)

Cộng hai vế phương trình đã cho với (*) ta được:

$2\sqrt{2x^2+3x+5}=2+3x \Leftrightarrow x=4$. Vậy $S=\{4\}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{2x^2+3x+5}=a,\ \sqrt{2x^2-3x+5}=b$.

Ta có: $3x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$.

b) ĐK: $x^3+x^2-1\geq 0 \Rightarrow x^3+x^2+2>0$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^3+x^2-1} \\ b=\sqrt{x^3+x^2+2} \end{cases}$ Với $b>a\geq 0$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=3 \\ b^2-a^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ (b+a)(b-a)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-1}=1 \\ \sqrt{x^3+x^2+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2-1=1 \\ x^3+x^2+2=4 \end{cases}$$

Tìm được $S=\{1\}$.

17. a) ĐK: $5x^2-2\geq 0$.

Cách 1. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}$ $(t\geq 0)$. Ta có $5x^2=6t^2+2$.

PT trở thành $\sqrt[3]{x^3+6t^2+2}-1=t \Leftrightarrow x^3+6t^2+2=(t+1)^3$

$\Leftrightarrow x^3=(t-1)^3 \Leftrightarrow x=t-1 \Leftrightarrow t=x+1$

$\Leftrightarrow x=-6+\sqrt{28}$. Vậy $S=\{-6+\sqrt{28}\}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt[3]{x^3+5x^2-1}=a,\ \sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}=b$.

Giải hệ $\begin{cases} a^3-6b^2=x^3+2 \\ a-b=1 \end{cases}$

b) Tương tự 4A.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+x+2} \\ b=\sqrt{x+3} \end{cases}$. ĐK: $a \ge \frac{\sqrt{7}}{2}; b \ge 0$.

Ta có: $2x^2-x-5=2a^2-3b^2;\ 2x^2+x+1=2a^2-b^2$.

Thay vào PT ta được:

$$(2a^2-3b^2)a+(2a^2-b^2)b=0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3+3\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{b}{a}\right)-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}=1 \text{ hoặc } \left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{4b}{a}+2=0.$$

- Với: $\left(\frac{b}{a}\right)^2+4\frac{b}{a}+2=0$: PT vô nghiệm do $\frac{b}{a} \ge 0$.

- Với: $\frac{b}{a}=1 \Leftrightarrow b=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\{-1;1\}$.

18. Tương tự 4A.

$x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1)$ nên ĐK: $x \ge -1$.

Ta có $x^2+2x+2=(x+1)+(x^2+x+1)$.

Đặt $a=\sqrt{x+1},\ b=\sqrt{x^2+x+1}$. PT trở thành:

$$3(a^2+b^2)=10ab \Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-3b)(3a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=\frac{b}{3} \end{array}\right.$$

$a=3b \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=3\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow 9x^2+8x+8=0$ (vô nghiệm).

$a=\frac{b}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow x^2-8x-8=0 \Leftrightarrow x=4\pm 2\sqrt{6}$

Vậy $S=\left\{4\pm 2\sqrt{6}\right\}$.

19. a) Điều kiện: $x \ge 0$. Đặt $u=10+\sqrt{x},\ u \ge 10$

Ta có: $\begin{cases} x=10+\sqrt{u} \\ u=10+\sqrt{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow x-u-(\sqrt{x}-\sqrt{u})=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{u})(\sqrt{x}+\sqrt{u}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=u \\ \sqrt{u}+\sqrt{x}+1=0\ (*) \end{array}\right.$$. Ta có (*) vô nghiệm

$$x=u \Leftrightarrow \sqrt{x}=x-10 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 10 \\ x^2-21x+100=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{21+\sqrt{41}}{2}$$

Vậy $S=\left\{\frac{21+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

b) Tương tự 5B.

Đặt: $\begin{cases}\sqrt[3]{x+7}=a\\ \sqrt{x}=b\end{cases}$. ĐK: $a\ge\sqrt[3]{7};\ b\ge 0$.

Ta có hệ sau: $\begin{cases}a-b=1\\ a^3-b^2=7\end{cases}$. Tìm được $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a^3=8\\ b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+7=8\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$. Vậy $S=\{1\}$.

20. a) Đặt $x^2+3x-4=t$. Ta có hệ $\begin{cases}t^2+3t=x+4\\ x^2+3x=t+4\end{cases}$

Trừ 2 vế PT ta được $(t-x)(t+x+4)=0$

Với $t=x\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$.

Với $t=-x-4\Leftrightarrow x=0,\ x=-4$.

b) Đặt $\sqrt[3]{35-x^3}=a\rightarrow x^3+a^3=35$. Ta có $\begin{cases}xa(x+a)=30\\ x^3+a^3=35\ \ (2)\end{cases}$.

$(2)\Leftrightarrow(x+a)(x^2-xa+a^2)=35$

$\Leftrightarrow(x+a)[(x+a)^2-3xa]=35\Leftrightarrow(x+a)^3=125$

Ta có $\begin{cases}x+a=5\\ x.a=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ a=3\end{cases};\ \begin{cases}x=3\\ a=2\end{cases}$.

Tìm được $x\in\{2;3\}$.

21. a) PT $\Leftrightarrow(x^2+5-x\sqrt{x^2+5})+(-3\sqrt{x^2+5}+3x)=0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}-3)=0$

Vậy $S=\{\pm 2\}$.

b) ĐK: $-1\le x\le 1$.

Ta có: $2x=2\left[(1+x)-1\right]=2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1+x}-1=0\ \ (*)\\ \sqrt{1-x}+1=2(\sqrt{1+x}+1)\ (**)\end{array}\right.$.

$(*)\Leftrightarrow x=0$.

$(**)\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x}+1\Leftrightarrow 1-x=4+4x+4\sqrt{1+x}+1$.

Tìm được $x=-\frac{24}{25}$. Vậy $S=\left\{-\frac{24}{25};0\right\}$.

c) ĐK: $x \ge -1$. Ta có $x = 0$ không phải nghiệm của phương trình nên ta nhân hai vế phương trình với $\sqrt{1+x}-1 \ne 0$ ta được:

$x(\sqrt{1+x}+2x-5) = x(\sqrt{1+x}-1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x}+2x-5) = (\sqrt{1+x}-1) \Leftrightarrow x = 2$. Vậy $S = \{2\}$.

Cách khác: Tương tự 1A. Phân tích $x = (\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}-1)$.

22. a) PT $\Leftrightarrow 2x^2+1-(x+5)\sqrt{2x^2+1}+3x+6 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{2x^2+1}$ $(t \ge 1)$.

PT đã cho trở thành: $t^2-(x+5)t+3x+6 = 0$.

$\Delta = [-(x+5)]^2 - 4(3x+6) = (x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = x+2 \end{array}\right.$

Vậy $S = \{\pm 2; 2 \pm \sqrt{7}\}$.

b) PT $\Leftrightarrow x^2+7-x\sqrt{x^2+7}-4\sqrt{x^2+7}+4x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+7}(\sqrt{x^2+7}-x)-4(\sqrt{x^2+7}-x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+7}-x)(\sqrt{x^2+7}-4) = 0$

Tìm được $S = \{\pm 3\}$.

c) Tương tự 6A.

(1) $\Leftrightarrow x^2+2x+3-(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+4x-2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2x+3}-2x+1)(\sqrt{x^2+2x+3}-2) = 0$

Tìm được $S = \left\{\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}; -1 \pm \sqrt{2}\right\}$.

23. a) Tương tự 2B.

Cách 1. PT $\Leftrightarrow x^2-2x-7+3(x+2)-(x+2)\sqrt{x^2-2x+2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-7+(x+2)(3-\sqrt{x^2-2x+2}) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x-7)\left(\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}\right) = 0$.

Vậy $S = \{1 \pm 2\sqrt{2}\}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{x^2-2x+2} = t$. PT trở thành

$t^2-(x+2)t+3x-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = x-1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

b) Tương tự 6A. Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \ge 1$. PT trở thành:

$t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2t^2+(1-4x)t+2x-1 = 0 \Rightarrow t = 2x-1$

Tìm được $S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$.

24. Ta có: $VT^2 = (\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5})^2 \le (1+1)(7-x+x-5) = 4$

Do đó: $0 < VT \le 2$

Mặt khác: $VP = x^2 - 12x + 38 = 2 + (x-6)^2 \ge 2$

Dấu $"="\Leftrightarrow x = 6$. Vậy $S = \{6\}$.

25. Điều kiện: $1 \le x \le 2$. PT $\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{2} - \sqrt{x+1}$

Ta có: $\sqrt{2} - \sqrt{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow x+1 \le 2 \Leftrightarrow x \le 1$

Kết hợp với ĐK tìm được $S = \{1\}$.

26. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-1} \le \dfrac{(x^2+x-1)+1}{2} = \dfrac{x^2+x}{2} \\ \sqrt{x-x^2+1} \le \dfrac{(x-x^2+1)+1}{2} = \dfrac{x-x^2+2}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \le x+1$

Do đó: $x^2 - x + 2 \le x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $S = \{1\}$.